

Hyper-réduction en mécanique non linéaire des matériaux

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech
David.Ryckelynck@mines-paristech.fr

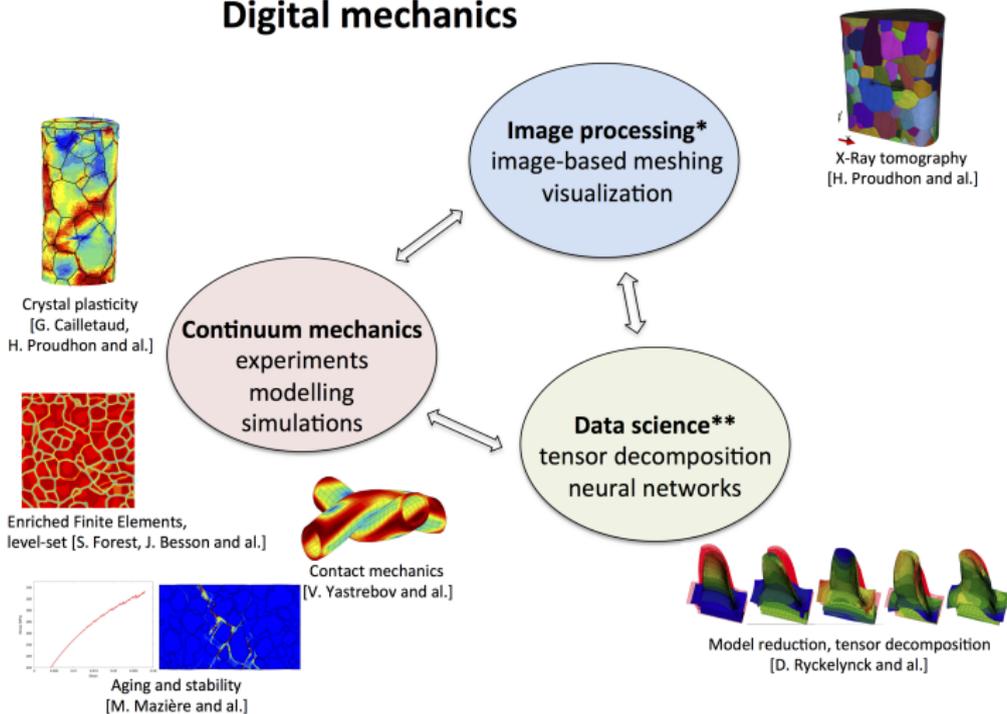
<http://matperso.mines-paristech.fr/Personnel/david.ryckelynck>



Apporter une plus grande attention aux données numériques et expérimentales en mécanique

Axes de recherche de l'équipe CoCas du Centre des Matériaux.

Digital mechanics



Developed with CMM(*) and CGS(**)

Les données sont exploitées pour générer des modèles réduits.

Réduction d'un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{J} \delta \mathbf{q} = -\mathbf{R} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}^T \mathbf{J} \mathbf{V} \delta \gamma = -\mathbf{V}^T \mathbf{R}, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{V} \delta \gamma$$

Si \mathbf{J} est symétrique définie positive, on a :

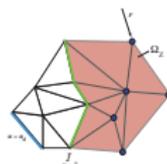
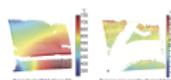
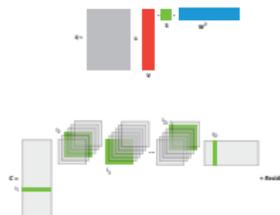
$$\min_{\delta \gamma} \left((\mathbf{V} \delta \gamma)^T \mathbf{R} + \frac{1}{2} (\mathbf{V} \delta \gamma)^T \mathbf{J} (\mathbf{V} \delta \gamma) \right)$$

Si $\mathbf{V}^T \mathbf{J} \mathbf{V} = \mathbf{I}$ la base est orthogonale et les équations réduites sont découplées.

Ces propriétés sont obsolètes en mécanique non linéaire des matériaux.

Axes de développement de la réduction des modèles :

- Compresser des résultats de simulation.
- Visualiser en temps réel des métamodèles de champs complets à approximation tensorielle.
- Compléter des données manquantes, interpoler des données en grande dimension ($> \mathbb{R}^{20}$), résoudre des problèmes inverses.
- Exploiter la mémoire de simulations déjà faites pour réduire les temps de résolution d'EDO ou EDP, en introduisant des modes empiriques, **tout en conservant l'ensemble des paramètres physiques de modélisation.**
- Estimer des erreurs d'interpolation de solutions dans de grands espaces paramétriques.



Tendances, vers une complexité croissante des modèles :

- Les mécaniciens et les métallurgistes veulent des modèles de compréhension toujours plus fins.
- On souhaite mieux décrire les couplages (level-set ...).
- Les essais in-situs se développent de plus en plus.
- Les techniques de tomographie donnent accès à des champs hétérogènes 3D.

Et le nombre de paramètres à identifier explose !

A posteriori model reduction



XXL dof
highfidelity model

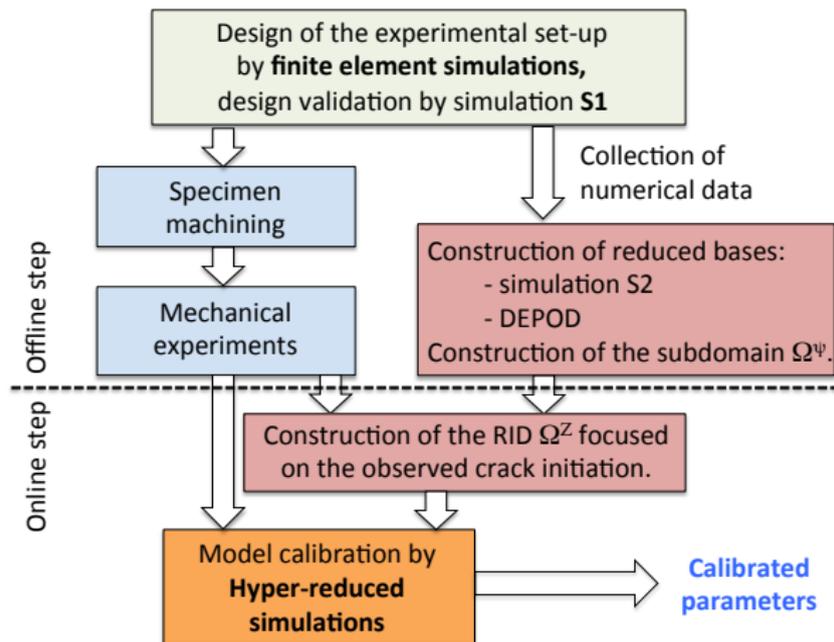


Offline training phase
to lose dof



Low dof and good shape,
Hyper-reduced order model
ready for online phase

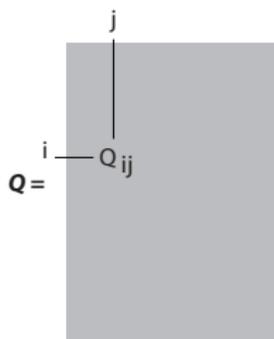
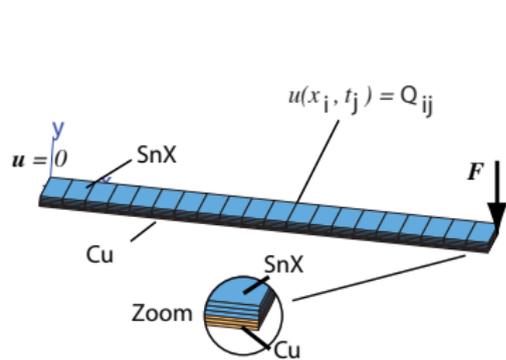
Dans le protocole habituel de calibration, on détruit énormément de données numériques.



Les résultats de simulation sont des données à fouiller, pour réduire les modèles.

Réduction des problèmes non linéaires

La snapshot POD [Sirovich 1987] permet d'extraire des bases réduites de résultats de simulation.



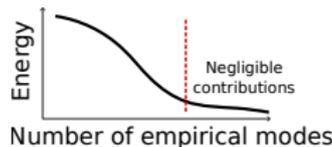
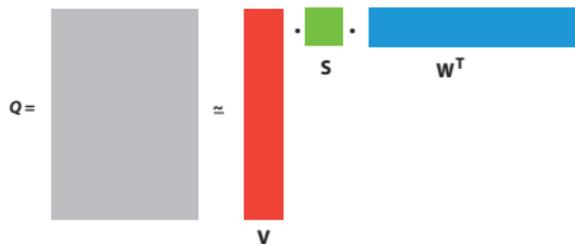
$$\forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_j; \mu_j) = \mathbf{u}_o + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) Q_{ij}$$

$$\mathcal{V}_h = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_{\mathcal{N}})$$

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) V_{ik} \quad k = 1 \dots N$$

Décomposition aux valeurs singulières :

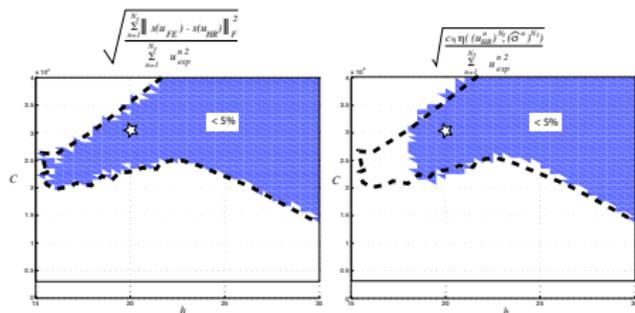
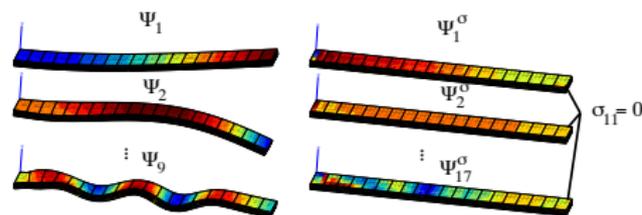


Estimation d'erreur d'approximation par base réduite

Le résidu est vu comme une différence de deux contraintes en suivant la théorie des erreurs en relation de comportement [Ladevèze] :

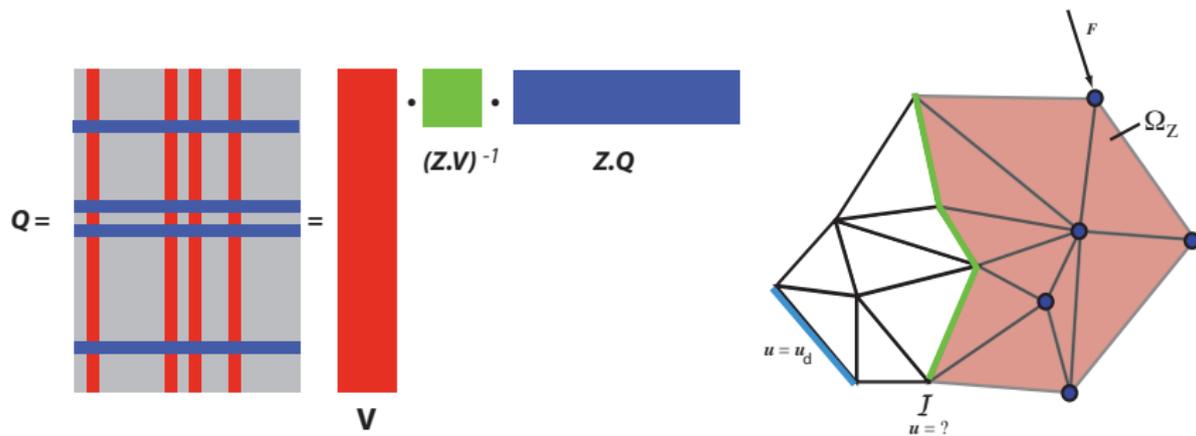
$$R_i = \int_{\Omega} \varepsilon(\varphi_i) : (\sigma_{HROM} - \hat{\sigma}(\sigma_{HROM})) dx, \quad \hat{\sigma}(\sigma_{HROM}) = \sigma_e + \sum_k^{N^\sigma} \psi_k^\sigma \int_{\Omega} \psi_k^\sigma : (\sigma_{HROM} - \sigma_e) dx$$

$$\eta = \|\sigma_{HROM} - \hat{\sigma}(\sigma_{HROM})\|$$



Les résultats de simulation sont des tenseurs de rang faible.

Il existe une matrice de sélection de lignes linéairement indépendantes, \mathbf{Z} , qui permet d'interpoler les lignes.



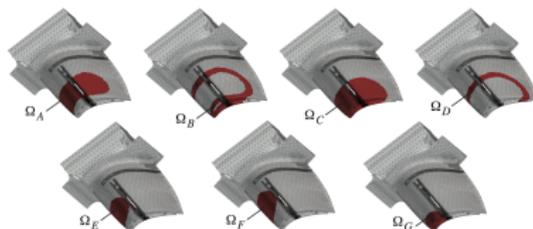
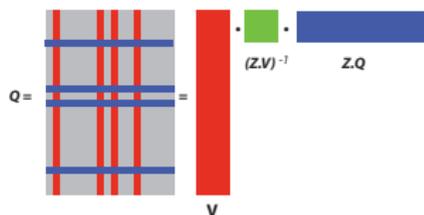
\mathbf{V} , \mathcal{F} et \mathbf{Z} peuvent être construits par la méthode EIM [Barrault 2004] ou la méthode DEIM [Chaturantabut 2009].

Dans la méthode d'hyper-réduction [Ryckelynck 2005] (Zset, Code Aster, CAST3M, VPS), les lignes sélectionnées correspondent aux noeuds d'un maillage réduit.

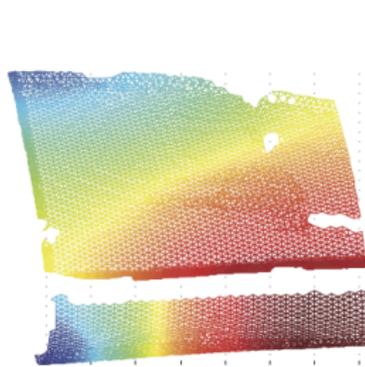
$$\Omega_Z = \Omega_Z^u \cup \Omega_Z^\sigma \cup \Omega_Z^{User}$$

Exemple de reconstruction d'un champ de température mesuré par caméra infrarouge (Zset, thèse SAFRAN)

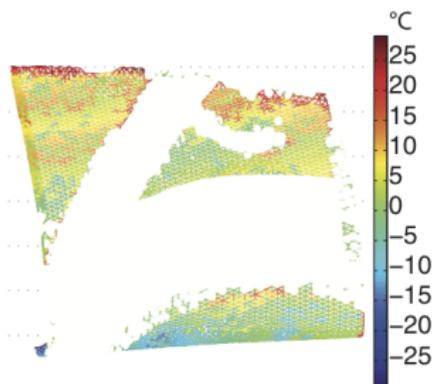
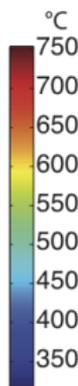
Température 3D simulées : $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{V}$



Température expérimentales mesurées : $\mathbf{Z.Q}_{exp} \rightarrow \mathbf{Q}_{3D}$.



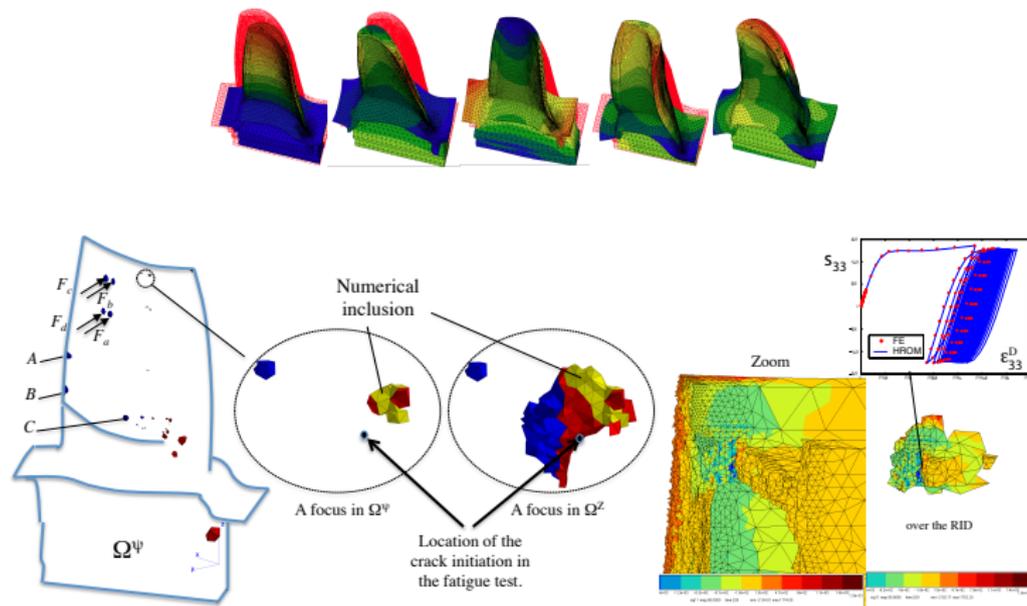
Reconstructed field (also in 3D)



Recovery error over the observed domain

Exemple de simulation élastoplastique par hyper-réduction (Zset, thèse SAFRAN)

Exemple de modèle hyper-réduit pour la plasticité cyclique : 1,7 million de degrés de liberté réduit à 10. 350 000 éléments réduits à 1000.



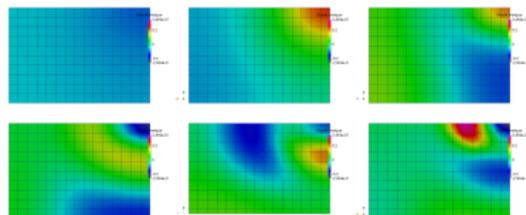
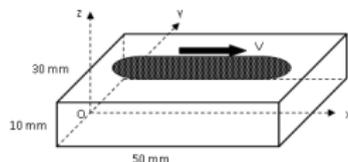
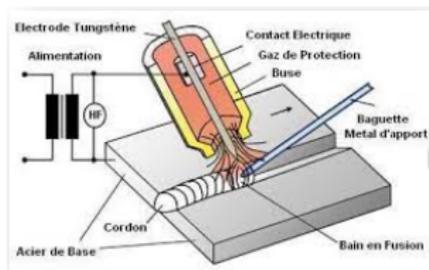
La position des efforts est un paramètre à recaler pour comparer durée de vie simulée et durée de vie expérimentale.

Gain en temps de calcul : 1000 fois plus rapide que la simulation par éléments finis.

Exemple de simulation du soudage par hyper-réduction (thèse EDF, code ASTER et Zset)

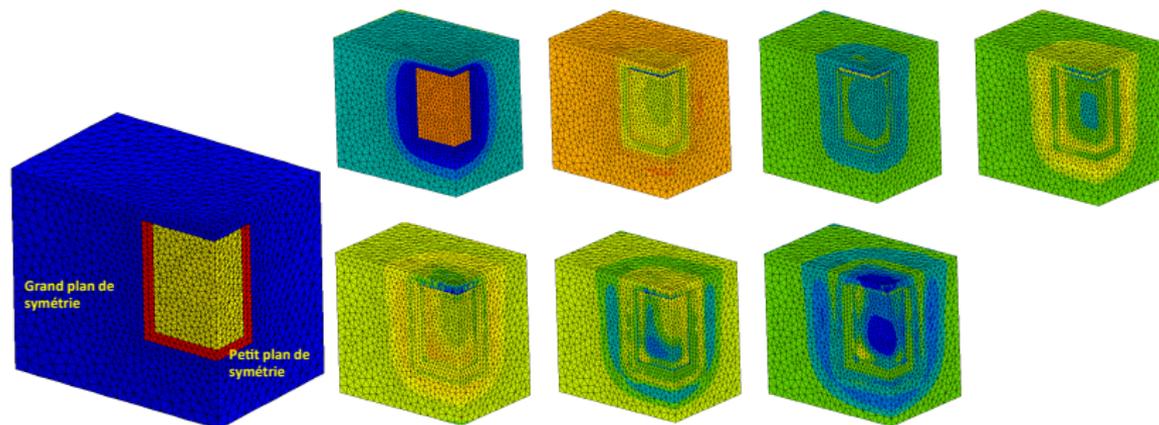
$$T(x, y, z, t; \mu) = T_c(x, y, z, t; \mu) + \sum_{k=1}^{N^{3D}} \psi_k(x, y, z) \gamma_k(t; \mu) + \sum_{k=1}^{N^{2D}} \tilde{\psi}_k(y, z) \tilde{\gamma}_k(x, t; \mu)$$

$$\Omega_Z = \Omega_Z^{3D} \cup (\Omega_Z^{2D} \times [0, L])$$



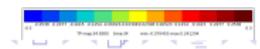
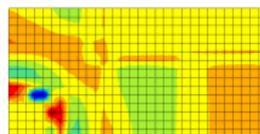
Exemple de simulation du refroidissement de pièces moulées par hyper-réduction (Zset, thèse Saint Gobain)

Objectif : étude paramétrique de la modélisation d'un changement de phase à haute température et de son effet sur les contraintes résiduelles.



Paramètres : coefficients d'échange thermique, densité de l'alumine, coefficients du comportement viscoplastique à changement de phase du matériau moulé.

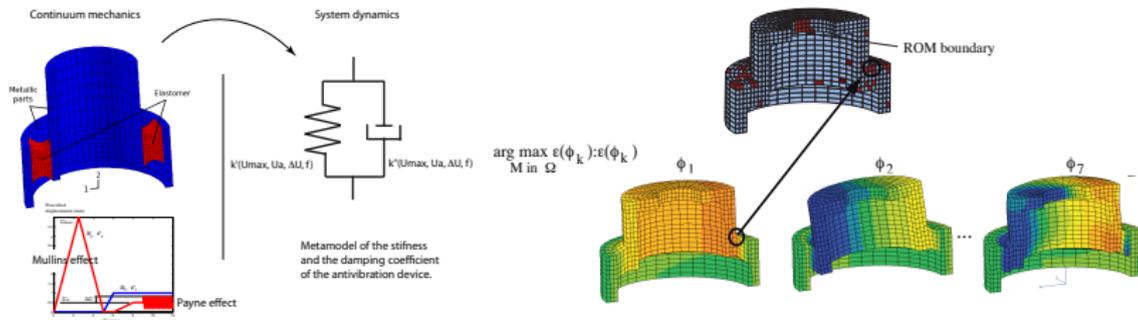
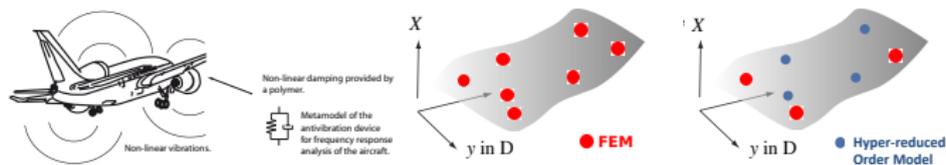
Certains cas sont trop non linéaires pour convenir à des bases réduites POD. Une base POD trop grande contient des modes trop oscillants.



Calcul cyclique en transformation finie d'un système anti-vibration (Zset, thèse Huchinson)

Système anti-vibration en silicone chargé de silice, soumis à une précontrainte et à de grandes déformations.

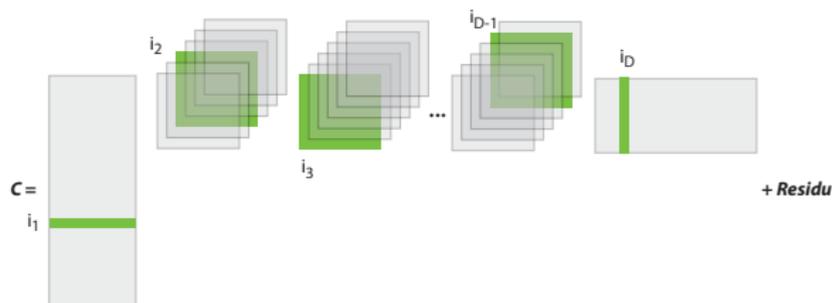
Construction d'un métamodèle de liaison mécanique 0D pour l'étude de vibrations forcées dans un assemblage avion-moteur.



Transformations finies : formulation lagrangienne totale ou réactualisée, sans remaillage.

Les données traitées peuvent avoir un format tensoriel de dimension arbitraire

Pour faire face à la malédiction de la dimensionalité, quand le nombre de paramètres est grand, on peut exploiter différentes méthodes de décomposition de tenseur, dont la PGD [Ladevèze, Chinesta, Nouy] et la TT-cross approximation [Osseledets].



Un train de tenseur de rang faible permet une visualisation en temps réel d'un grand nombre de données représentées de façon compressées, sous la forme d'un métamodèle.

- Nombre de prévisions possibles : N^D
- Place mémoire : $R^2 N D$, $R \ll N^{D/2}$, (pour la PGD : $R N D$)
- Opération de reconstruction : $2 R^2 D$, (pour la PGD : $R D$)

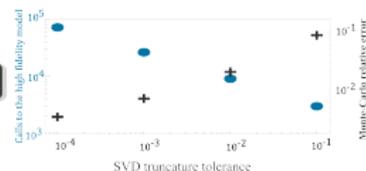
La TT-cross conduit à une Hyper-réduction multi-dimensionnelle.

Approximation par TT-cross de lois de comportement élastoviscoplastiques (Zset+python, thèse SafranTech)

Results of a first viscoplastic model with 6 parameters discretized in 20 points

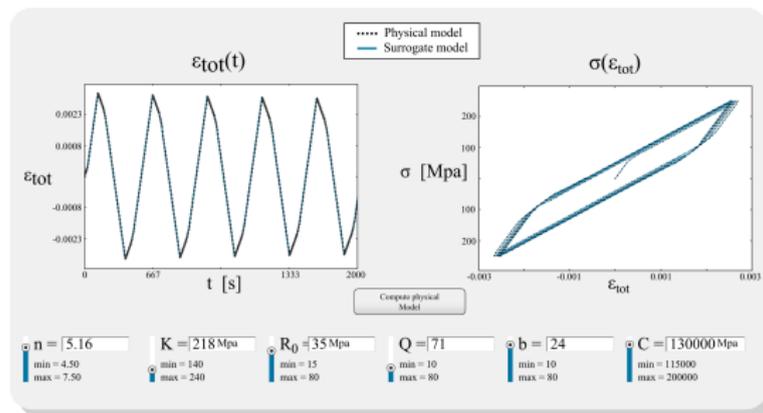


Convergence wrt. svd truncature tolerance



Perspectives

- Extension to model with more parameters
- Error estimation to gain robustness
- Non linear PDE in mechanics of materials
- Managing heterogeneous output data (strain, stress, internal variable)
- Other applications :
 - Optimisation
 - Control
 - Embedded systems



L'intrusivité de la méthode d'hyper-réduction et d'hyper-réduction multi-dimensionnelle

Modification de entrées du solveur linéaire : \mathbf{J} , \mathbf{R} , \mathbf{V} , $\widehat{\mathbf{V}}$, sur un maillage réduit (donné)

Modification des sorties du solveur linéaire : $\delta \mathbf{q}$, $\delta \gamma$

Modification du solveur linéaire :

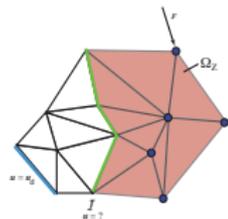
$$\mathbf{J} \delta \mathbf{q} = -\mathbf{R}(\mathbf{q}) \quad \rightarrow \quad \widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{J} \mathbf{V} \delta \gamma = -\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}(\mathbf{q}), \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{V} \delta \gamma$$

Modification du critère de convergence :

$$\|\mathbf{R}\| < \epsilon_{tol} \quad \rightarrow \quad \|\widehat{\mathbf{V}}^T \mathbf{R}\| < \tilde{\epsilon}_{tol}, \quad \|\mathbf{Z} \mathbf{R}\|$$

Divers types d'hyper-réduction :

- par conditions limites reconstruites sur domaine réduit (réf.), $\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{V}$,



- par sélection et pondération de points d'intégration (Energy-conserving sampling and weighting), avec modification de la boucle d'assemblage des éléments,
- par interpolation de forces généralisées (EIM, DEIM, GNAT), sans notion d'élément.

- Approche a posteriori
 - Choix d'un plan d'expérience pour générer des solutions à haute fidélité (éléments finis)
 - Réalisation d'une POD incrémentale à la volée pour construire les modes empiriques de gros modèles
 - Combinaisons éventuelles de bases réduites (DEPOD, base élastique U base plastique, ...)
 - Construction de la contribution des modes empiriques au domaine réduit
 - Insertion d'une zone d'intérêt dans le domaine réduit
 - Simulations Hyper-réduites
 - Post-traitement, reconstruction des déplacement et calcul de contraintes
 - Estimation d'erreur en relation de comportement

- Approche a priori, ou adaptation de modèles réduits
 - Algorithme glouton de recherche du point de l'espace des paramètres le moins bien traité
 - PGD [Ladevèze, Chinesta, Nouy], formulation dédiée des EDP
 - Algorithme incrémental de type APHR (approche similaire à de l'adaptation de maillage)

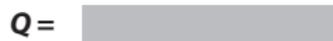
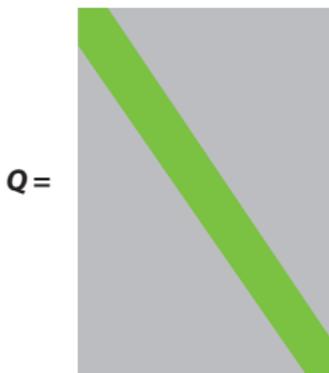
Conclusion : champs d'application et limitations

Champs d'application :

- Thermique transitoire ou stationnaire
- Statique non linéaire des solides, mécanique des matériaux (quasiment tout !)
- Couplages thermo-métallurgico-mécaniques
- Dynamique lente des structures
- Dynamique explicite pour la mise en forme ou la simulation de crashes (automobile)
- Sollicitations fixes ou mobiles à chemin connu (soudage)
- Mécanique du contact (Coll. L. Gallimard).

Limitations :

- Problèmes trop simples
- Propagation d'ondes dans des directions inconnues
- Fissuration



Pour la fissuration et l'insertion de défauts locaux dans les modèles il existe des approches par décomposition de domaine (Local/global model order reduction strategy).