

# TD 21 : Composites

N. BILLON

Un matériau composite est composé de plusieurs composants élémentaires dont l'association lui confère des propriétés qu'aucun des composants, pris seul, ne possède.

Ainsi une résine chargée de fibres de carbone possède une résistance à la traction plus importante que la résine seule. A contrario, les fibres seules n'auraient pas de cohésion entre elles, un bloc de graphite présenterait un mauvais comportement en traction ou en cisaillement.

On distinguera ici deux types de composites :

- Les matériaux à fibres continues ou laminés.
- Les matériaux à phases dispersées (charge minérale ou organique dispersée dans une matrice)

## 1 Les composites à fibres continues

1-1) L'introduction de fibres continues ou de tissés peut produire un certain niveau d'anisotropie dans le matériau. Ainsi, un composite à fibres continues parallèles rangées aléatoirement est un milieu orthotrope de révolution, c'est à dire transversalement isotrope.

- Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire combien de coefficients faut-il pour caractériser le comportement macroscopique de ce matériau ?
- Donnez un exemple de coefficients possibles.

1-2) La plupart du temps ces composites sont utilisés sous forme de plis minces superposés. Il est intéressant de connaître le comportement de ces plis qui sont alors des corps orthotropes minces. Dans ce cas la complaisance du milieu est réduite à 4 coefficients. Dans un système d'axes où les fibres sont parallèles à l'axe  $X_1$  et l'épaisseur à l'axe  $X_3$  on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Avec  $J_{21} = J_{12}$ . Par contre, dans un système d'axes  $X'_1 O X'_2$  faisant un angle  $\theta$  avec le précédent on peut démontrer que  $J'$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E'_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & C \\ \frac{-\nu_{21}}{E'_1} & \frac{1}{E'_2} & D \\ A & B & \frac{1}{G'_{12}} \end{bmatrix}$$

Tous les paramètres de  $J'$  dépendent des paramètres de  $J$  et de l'angle  $\theta$ . On note que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont nuls que pour des angles de  $0$  et  $90^\circ$ .

Qu'implique ceci dans le cas d'une sollicitation uni axiale parallèle à un des axes  $X'_1$  ou  $X'_2$  ?

- Quelle précaution sur la superposition des plis permet d'éviter que ce problème persiste sur le composite ?

1-3) Soit un composite représenté figure 1. Appelons  $E_f$  le module des fibres et  $E_m$  celui de la matrice. Soit, de plus,  $\phi_f$  la fraction de volume de fibres. Donnez une estimation des modules longitudinaux et transverses du composite.



Figure 1

1-4) Les deux bornes calculées sont les bornes de Kelvin-Voigt et Reuss. Elles encadrent généralement la réalité. En réfléchissant sur la déformation de la matrice expliquez qualitativement pourquoi les modules transverses réels sont supérieurs à la borne de Reuss.

- Quelle conclusion générale sur les modèles de comportement doit-on en tirer ?

## 2 Les composites à phases dispersées

2-1) Nous avons mis en évidence un couplage fibre matrice dans le cas précédent. Nous allons maintenant réfléchir au cas d'un composite fait de la dispersion de sphères élastiques dans un milieu élastique. Goodier a traité le cas d'une inclusion sphérique isolée et de rayon  $R$  soumise à une contrainte uniaxiale,  $T$ . Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de l'inclusion sont, respectivement,  $G_i$  et  $\nu_i$ . La matrice contenant l'inclusion est caractérisée par un module de cisaillement  $G_m$  et par un coefficient de Poisson  $\nu_m$ . Hors de l'inclusion ( $r > R$ , figure 2) le calcul, dans un système de coordonnées sphériques, mène à :

$$s_{rr} = 2G_m \left[ \frac{2A}{r^3} - \frac{2u_m}{1-2u_m} \frac{C}{r^3} + 12 \frac{B}{r^5} + \left( -\frac{2(5-u_m)}{1-2u_m} \frac{C}{r^3} + 36 \frac{B}{r^5} \right) \cos(2q) \right]$$

$$s_{qq} = 2G_m \left[ -\frac{A}{r^3} - \frac{2u_m}{1-2u_m} \frac{C}{r^3} - 3 \frac{B}{r^5} + \left( \frac{C}{r^3} - 21 \frac{B}{r^5} \right) \cos(2q) \right]$$

$$s_{jj} = 2G_m \left[ -\frac{A}{r^3} - \frac{2(1-u_m)}{1-2u_m} \frac{C}{r^3} - 9 \frac{B}{r^5} + \left( 3 \frac{C}{r^3} - 15 \frac{B}{r^5} \right) \cos(2q) \right]$$

$$s_{r,q} = 2G_m \left[ \frac{2(1+u_m)}{1-2u_m} \frac{C}{r^3} + 24 \frac{B}{r^5} \right] \sin(2q)$$

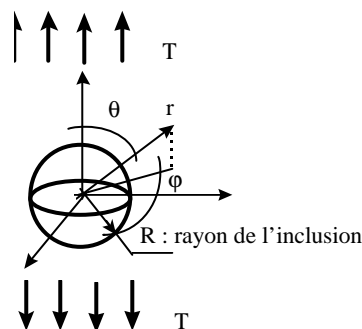


Figure 2 : Inclusion sphérique soumise à une tension uniaxiale

En écrivant la continuité des contraintes et des déformations à l'interface, il est possible de déterminer les constantes A, B et C :

$$\frac{A}{R^3} = \frac{T}{4G_m} \left\{ \frac{\left[ (1 - \mathbf{u}_m) \left( \frac{1 + \mathbf{u}_i}{1 + \mathbf{u}_m} \right) - \mathbf{u}_i \right] G_i - (1 - 2\mathbf{u}_i) G_m}{(1 - 2\mathbf{u}_i) 2G_m + (1 + \mathbf{u}_i) G_i} \right\} -$$

$$\frac{TD \left[ (1 - 2\mathbf{u}_m)(6 - 5\mathbf{u}_m) 2G_i - (1 - 2\mathbf{u}_m) G_m \right]}{(1 - 2\mathbf{u}_m) 2G_m + (1 + \mathbf{u}_m) G_i}$$

$$B = TR^5 D$$

$$C = 5TR^3 D(1 - 2\mathbf{u}_m)$$

Avec

$$D = \frac{G_m - G_i}{8G_m \left[ (7 - 5\mathbf{u}_m) G_m + (8 - 10\mathbf{u}_m) G_i \right]}$$

On rappelle, par ailleurs, que le champ de contrainte hors présence de la sphère serait :

$$\mathbf{s}_{rr} = \frac{T}{2} (1 + \cos(2\mathbf{q}))$$

$$\mathbf{s}_{\theta\theta} = \frac{T}{2} (1 - \cos(2\mathbf{q}))$$

$$\mathbf{s}_{r\theta} = -\frac{T}{2} \sin(2\mathbf{q})$$

Que peut on dire de l'effet de la particule sur la matrice ?

- De quoi dépend la contrainte vue localement par la matrice ?
- Quel est le rôle de l'interface ?

2-2) Les polymères peuvent être sensibles à deux types d'endommagement plastique :

- Les craquelures, endommagement de type traction, amorcées par les contraintes hydrostatiques positives.
- Les bandes de cisaillement amorcées au lieu de concentration de contrainte de von Misès.

Les premiers conduisent à une rupture fragile les deuxièmes à une rupture ductile. Potentiellement et en toute généralité, quel peut être l'effet de ces particules ?