

Mastère COMADIS

Lois de comportement non
linéaires des matériaux

J. Besson, G. Cailletaud, S. Forest
Centre des Matériaux

Ecole des Mines de Paris

2 Mécanique non linéaire des matériaux

4 Mécanique non linéaire des matériaux

Table des matières

Chapitre 1	Introduction	7
1.1.	La mise en modèle	7
1.2.	Applications des modèles	11
Chapitre 2	Concepts généraux	13
2.1.	Formulation des lois de comportement	13
2.2.	Principe des puissances virtuelles	14
2.3.	Thermodynamique des processus irréversibles	15
2.4.	Les grandes classes de comportement	22
2.5.	Critères	35
2.6.	Méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations non- linéaires	43
2.7.	Méthodes numériques d'intégration des équations différentielles . . .	53
2.8.	Éléments finis	59
Chapitre 3	Plasticité et viscoplasticité 3D	73
3.1.	Généralités	73
3.2.	Formulation des lois de comportement	76
3.3.	Directions d'écoulement associées aux critères courants	82
3.4.	Expression de quelques lois particulières en plasticité	84
3.5.	Écoulement à vitesse de déformation totale imposée	86
3.6.	Plasticité non associée	87
3.7.	Écrouissage non linéaire	88
3.8.	Quelques variantes classiques	98
3.9.	Écrouissage et restauration en viscoplasticité	104
3.10.	Modèles multimécanismes	107
3.11.	Comportement des matériaux poreux	123
Annexe	Notations employées	135
A.1.	Tenseurs	135
A.2.	Vecteurs, Matrices	136
A.3.	Notations de Voigt	136

Chapitre 1

Introduction

1.1. La mise en modèle

Connaître pour mieux utiliser, puis connaître pour influencer, est un principe que l'Homme applique depuis toujours à son environnement. Cela peut commencer par une saveur, un tour de main, sans aucun besoin de quantification. Mais lorsque vient ensuite le besoin de transmettre l'expérience, ou lorsque les systèmes deviennent de plus en plus complexes, il faut songer à décrire cet environnement, naturel ou artificiel, à lui trouver des représentations simplifiées, qui contiennent ses principales caractéristiques, et qui réagissent de façon similaire face à une sollicitation extérieure donnée. Il faut donc construire des *modèles*, ensembles d'algorithmes et de nombres qui vont devenir de plus en plus abstraits. Le domaine des matériaux et des structures n'échappe pas à cette évolution. A l'interface entre recherche et ingénierie, il comporte son lot de modèles pour la compréhension et de modèles pour la conception, ceux-là servant à mettre à l'épreuve l'idée que l'on a d'un mécanisme, ceux-ci à bâtir des représentations simplifiées de systèmes complexes.

Cet ouvrage aborde les modèles mécaniques en considérant différentes échelles, depuis la structure ou système mécanique jusqu'à la microstructure du matériau. Dans ce cadre, les modèles pour comprendre seront souvent destinés au développement des nuances de matériau, les modèles pour concevoir, au dimensionnement des pièces mécaniques. Quoi qu'il en soit, il est maintenant raisonnable de penser que, au-delà du développement des matériaux eux-mêmes, ce sont les développements des *connaissances* sur ceux-ci qui sont critiques pour le développement des performances.

Ainsi, c'est la bonne connaissance des *lois de comportement* des matériaux [LEM 85b] qui permet d'utiliser la quantité optimale de matière dans les composants, et d'employer les bons matériaux au bon endroit. Le fait de concevoir ainsi «au plus juste» les structures, est la marque d'une démarche qui, outre son élégance, présente deux aspects importants :

- il y a une amélioration de la sécurité, dans la mesure où il est préférable d'avoir

- une bonne connaissance des phénomènes physiques plutôt que d'appliquer un large coefficient de sécurité, qui s'apparente souvent à un «coefficient d'ignorance» ; par ailleurs, dans certains cas, l'utilisation de plus grandes quantités de matière peut devenir préjudiciable (ainsi, augmenter l'épaisseur de paroi d'une enceinte sous pression peut certes diminuer les contraintes purement mécaniques, mais aussi être néfaste s'il y a des gradients thermiques dans la paroi),
- le résultat est une meilleure performance sur le plan écologique, ainsi le gain de quelques dixièmes de gramme sur chaque boîte-boisson conduit à des économies de matière première importantes, si l'on songe aux quelques centaines de milliards qui sont fabriquées chaque année ; de même, la diminution de poids permet de réduire la consommation des automobiles ou des avions.

1.1.1. Modéliser pour comprendre

Lorsqu'on a un modèle en main, cela signifie que l'on a capturé une partie de la réalité. On peut, en faisant fonctionner le modèle, vérifier que le matériau ou le système mécanique que l'on considère réagit bien selon les prévisions. C'est pourquoi il se développe actuellement toute une lignée de modèles *déductifs* [FRA 91] qui cherchent à prendre en compte la microstructure du matériau en vue de déterminer ses propriétés macroscopiques. Ainsi un métal sera considéré comme un *polycrystal*, agrégat de grains d'orientations cristallographiques différentes, et au comportement individuel parfaitement caractérisé, un composite se verra représenté par sa matrice et ses fibres, un béton par la matrice et les granulats. Cette approche choisit donc de modéliser l'hétérogénéité des matériaux, en vue de mieux prévoir le comportement moyen global (par exemple si les proportions des constituants changent). Elle peut utiliser des méthodes simplifiées pour représenter la microstructure, mais fait aussi de plus en plus appel à des calculs de microstructures, dans lesquels un *élément de volume représentatif* est discrétisé afin que sa réponse soit évaluée au moyen d'un calcul par éléments finis. Elle est donc relativement riche, de par son principe même, mais elle est également lourde à mettre en œuvre, si bien que son utilisation est encore limitée à la prévision du comportement des matériaux, dans l'optique de mieux comprendre leur «fonctionnement» et d'améliorer leurs propriétés mécaniques.

L'approche *inductive*, à l'inverse, cherchera simplement à caractériser globalement le comportement d'un élément de volume représentatif, faisant alors abstraction de la structure fine du matériau. Il s'agit de déterminer les relations de cause à effet qui existent entre les variables constituant les entrées et les sorties du processus étudié. Elle trouve une justification dans le fait que des phénomènes de l'échelle microscopique très divers peuvent conduire, après des effets de moyenne, à des réponses globales de même nature. Par contre, son emploi aveugle peut être dangereux s'il s'agit d'appliquer le modèle hors de son domaine de détermination initial. Il reste que cette méthode est, dans bien des cas, la seule applicable dans un cadre industriel.

Ces deux approches sont de nature phénoménologique : la construction du mo-

dèle fait appel à un ensemble d'équations qui doivent ensuite être étalonnées pour un matériau donné à l'aide d'une base expérimentale constituée d'essais mécaniques, et, éventuellement, d'observations microstructurales.

1.1.2. *Modéliser pour concevoir*

La bonne connaissance des matériaux et leur bonne utilisation font donc intervenir trois domaines d'activité.

1. Le développement du matériau lui-même (ce secteur étant absent dans le cas des géomatériaux). Là se jouent l'évolution du matériau, la découverte de nouvelles microstructures, qui concourent à l'amélioration des performances intrinsèques.
2. La caractérisation des propriétés d'emploi. Ce point a pour but d'apporter une meilleure connaissance d'un matériau existant, (mécanismes physiques qui provoquent ou accompagnent la déformation, effets mécaniques macroscopiques), donc de réduire les incertitudes et d'augmenter la fiabilité des modèles utilisés.
3. Le travail sur les modèles numériques permet d'améliorer la représentation des pièces, structures ou domaines calculés (par amélioration des algorithmes, qui autorisent le traitement de modèles numériques plus importants, par exemple 3D au lieu de 2D).

Le point (1) est le domaine des métallurgistes et des chimistes. Le point (2) celui de la mécanique des matériaux (*solides* pour ce qui nous concerne ici). Le point (3) celui de la mécanique des structures. C'est au carrefour (2)–(3) que se situent les chapitres qui suivent. La figure 1.1 schématise par ailleurs les différents environnements, les différentes opérations industrielles auxquels se rattachent les ensembles de modèles qui vont être exposés.

La phase de *conception* (figure 1.1a) met en œuvre une approche synthétique du problème, qui est en fait résolu par *méthode inverse*, soit : «quelle forme donner à la pièce, en quel matériau la construire pour qu'elle réponde au cahier des charges». Dans la mesure où les éléments extérieurs sont nombreux, et parfois non scientifiques, il n'y a en général pas d'autre solution que de choisir des descriptions simples des matériaux, et d'appliquer des *codes* ou règles simplifiées. Dans la plupart des cas, cette approche est suffisante.

Il peut subsister parfois des cas litigieux (pièces de haute sécurité, ...) qui nécessitent la mise en place d'une procédure de *justification* (figure 1.1b). Au contraire de la précédente, cette démarche est analytique, puisque la géométrie, les charges, le matériau, etc. ... sont figés, et qu'il s'agit simplement, par un calcul direct, de caractériser la bonne tenue. Cette procédure peut être employée à la construction, ou encore longtemps après la mise en route d'une installation, afin d'obtenir une *requalification* qui prolonge la durée de vie : un système (par exemple une centrale nucléaire) dont la durée de vie garantie est de 30 ans, en utilisant des méthodes de dimensionnement

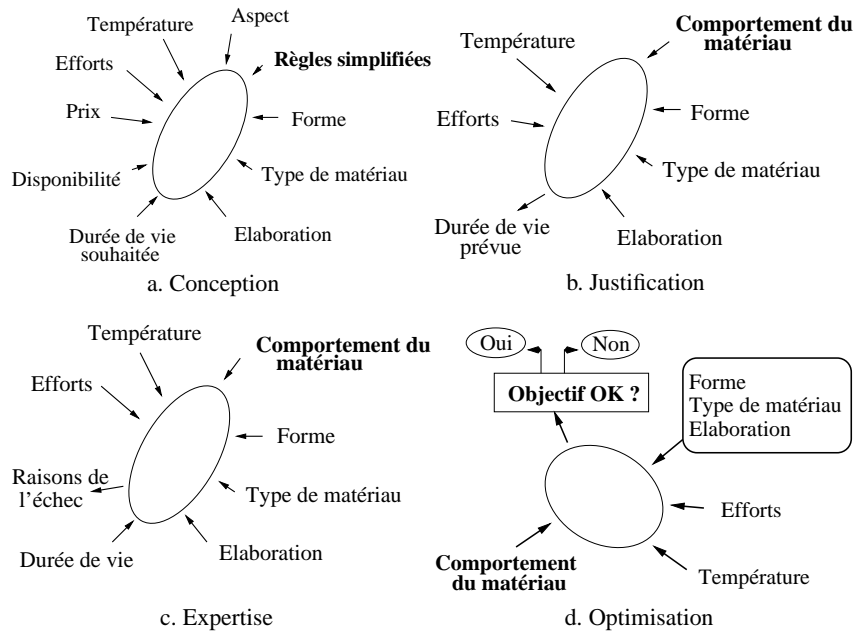


Figure 1.1. Opérations industrielles où intervient le comportement des matériaux

simplifiées, peut voir sa vie prolongée d'une dizaine d'années à l'aide de méthodes plus précises.

Il faut encore avoir recours à des modèles plus précis dans le cas de l'*expertise* (figure 1.1.c) puisqu'une telle opération intervient après qu'un problème, grave ou non, soit apparu. Il est important dans ce cas de mettre en regard les modèles utilisés et les phénomènes physiques qui se sont produits.

L'*optimisation* (figure 1.1.d) va tendre à se généraliser, grâce à l'arrivée de calculateurs suffisamment puissants pour qu'il soit envisageable d'effectuer plusieurs dizaines de fois le calcul de la structure à étudier.

Dans le cadre de ces applications, le modèle choisi va dépendre des domaines d'utilisation. Sans s'étendre sur ce sujet, il est facile d'imaginer que par exemple un acier à température ambiante pourra être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles, ou qu'un polymère sera considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées.

1.2. Applications des modèles

L'utilisation de modèles de comportement non linéaire est encore relativement peu présente dans l'industrie. C'est qu'il faut pouvoir disposer du modèle adéquat, des paramètres qui caractérisent le matériau considéré, et du code de calcul de structures qui contient ce modèle. Les années 80 ont pourtant constitué une période de développements importants pour les modèles. C'est à ce moment que se sont simultanément épanouis des modèles macroscopiques répondant à une multitude de comportements différents, et que l'on a commencé à utiliser des modèles plus complexes, issus des méthodes d'homogénéisation, la puissance des ordinateurs permettant de considérer un nombre de plus en plus grand de variables pour représenter le matériau. C'est à ce moment-là que s'est imposé le terme de *mécanique des matériaux* pour désigner l'étude de l'élément de volume du mécanicien des structures.

Les années 90 ont permis une certaine décantation dans les modèles, mais surtout l'arrivée de méthodes d'intégration robustes, qui autorisent l'exploitation de modèles très fortement non linéaires dans des calculs de routine. Ces méthodes ont été implémentées dans les codes de calcul de structures. Il reste maintenant à construire les bases de données matériau, et à gagner du temps CPU, pour pouvoir traiter en quelques heures des problèmes non linéaires comportant entre 10^5 et 10^6 nœuds.

Le présent ouvrage se donne donc comme but de faire le point sur les modèles de comportement et les méthodes numériques associées. Le calcul de structures est une discipline à part entière dans laquelle la représentation des matériaux ne tient qu'une (trop) petite place. Cet ouvrage n'aborde bien entendu pas les problèmes de maillage, de méthodes numériques générales pour la résolution de systèmes linéaires,... Par contre, le lecteur trouvera ici l'exposé des méthodes numériques attachées à l'exploitation des lois de comportement dans les calculs de structures, notamment les méthodes d'intégration. De même, l'étape d'*identification* des coefficients du modèle n'a pas été considérée ici. Ce vide devrait être comblé lors de la parution d'une suite au présent ouvrage.

Le lecteur trouvera donc successivement :

- le rappel de quelques outils fondamentaux pour la compréhension de l'ouvrage ; on a rangé dans cette partie une présentation élémentaire de notions de mécanique et de thermodynamique, une introduction aux comportements non linéaires des matériaux en uniaxial à l'aide de modèles rhéologiques, la description des fonctions utilisées classiquement comme critère de plasticité, mais aussi un «minimum vital» sur les méthodes numériques et la méthode des éléments finis ;
- une présentation des modèles de plasticité et de viscoplasticité en petites perturbations, regroupant modèles très classiques et quelques propositions plus avancées, notamment sur les modèles multimécanismes ;
- quelques éléments sur la mécanique de l'endommagement, où l'on discute notamment la notion de couplage endommagement-comportement, et le phénomène d'activation-désactivation de celui-ci ;
- une brève présentation de la mécanique des milieux hétérogènes et des méthodes

d'homogénéisation, en élasticité, thermo-élasticité, et en non-linéaire, qui mentionne une solution pragmatique au problème de la règle de localisation ;

— les éléments nécessaires à la généralisation des modèles précédents aux transformations finies, où le propos est illustré par des exemples, et où on traite également le cas des milieux continus généralisés ;

— la mise en œuvre dans un programme de calcul par éléments finis des modèles présentés, où l'accent est mis sur le caractère générique des méthodes utilisées ;

— la description des phénomènes de localisation de la déformation, avec quelques commentaires sur les méthodes de régularisation, qui permettent de les limiter.

Cet ouvrage vient à la suite d'un certain nombre de recueils «généralistes», qu'il est bien sûr impossible de citer tous. Ayant en mémoire le mot-clé de *matériaux*, le lecteur se reportera aux livres de Friedel [FRI 64] et Jaoul [JAO 85], ou encore de MacClintock et Argon [MCC 66], de Argon [ARG 75], de Asbby et Jones [ASH 80]. Pour ce qui concerne la *mécanique des solides*, les livres à considérer sont ceux de Hill [HIL 89], Germain [GER 73], Mandel [MAN 66, MAN 78], Salençon et ses collaborateurs [SAL 84, HAL 87], mais aussi des ouvrages sur les géomatériaux, qui permettront au lecteur de constater la similitude des outils théoriques et numériques entre les différents domaines de la mécanique des matériaux [DAR 87, COU 91]. L'aspect loi de comportement est présent dans le classique ouvrage de Lubliner [LUB 90]. Il faut enfin citer l'ouvrage de Simo et Hughes [SIM 97], qui constitue une importante contribution pour ce qui concerne le traitement numérique, et les tout récents livres de Doghri [DOG 00] ou Doltsiris [DOL 00].

Mais parmi tous ceux qui sont cités ici, il convient d'accorder une mention particulière aux ouvrages qui sont dans le courant français de mécanique et matériaux [LEM 85b, FRA 91, FRA 93] dont se réclame également ce travail.

Chapitre 2

Concepts généraux

2.1. Formulation des lois de comportement

Excepté le cas de l'élasticité, les modèles considérés ici s'expriment habituellement sous forme différentielle, si bien que la réponse actuelle dépend de la sollicitation actuelle et de son histoire (propriété d'hérédité). Il y a deux manières de prendre en compte celle-ci, la première consiste à la décrire par une dépendance fonctionnelle entre les variables, la seconde fait l'hypothèse qu'il est possible de représenter son effet par des variables internes, qui «concentrent» les informations importantes définissant l'état du matériau. Sauf quelques cas exceptionnels comme celui de la visco-élasticité linéaire, la seconde méthode de travail produit des modèles dont l'utilisation numérique est plus simple.

Les autres hypothèses importantes qui sont classiquement utilisées pour l'écriture de modèles de comportement sont :

1. le principe de *l'état local*, qui considère que le comportement en un point M ne dépend que des variables définies en ce point, et non pas du voisinage ;
2. le principe de *simplicité matérielle*, qui suppose que seul intervient dans les équations de comportement le premier gradient de la transformation ;
3. le principe d'*objectivité*, qui traduit l'indépendance de la loi de comportement vis-à-vis de l'observateur, et qui implique que le temps ne peut pas intervenir explicitement dans les relations de comportement.

Ces hypothèses seront examinées dans le chapitre ???. Dans le cas des matériaux homogènes et isotropes, l'ensemble de ces hypothèses se résume par une expression entre les contraintes et les déformations du type :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}_{-\infty}^t(\varepsilon(\tau)) \quad (2.1)$$

2.2. Principe des puissances virtuelles

La présentation donnée ici donne un «éclairage minimal» sur le principe des puissances virtuelles. Le lecteur est invité à se reporter au chapitre ?? pour un exposé plus complet.

Le principe indique que, pour tout champ de vitesses virtuelles $\underline{v}'(\underline{x}, t)$, la somme des puissances des efforts intérieurs et extérieurs est nulle, quel que soit le domaine \mathcal{D} , de surface extérieure $\partial\mathcal{D} = S$ considéré d'un solide Ω (figure 2.1).

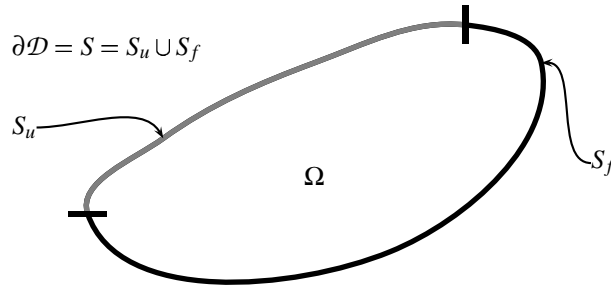


Figure 2.1. *Domaine \mathcal{D} d'un solide Ω avec ses surfaces extérieures.*

La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'évalue en formant le produit contracté du *tenseur des contraintes réel* par le tenseur vitesse de déformation virtuelle, soit :

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{\xi}' dV \quad (2.2)$$

La symétrie du tenseur $\underline{\sigma}$ permet, en remplaçant la vitesse de déformation par la partie symétrique du gradient de vitesse, d'effectuer une intégration par partie, puis d'appliquer le théorème de la divergence, ce qui décompose la puissance intérieure en deux termes, l'un qui reste volumique, et un second qui devient surfacique. En désignant par \underline{n} la normale sortante en un point courant de $\partial\mathcal{D}$, la nouvelle expression est alors :

$$\mathcal{P}^{(i)} = \int_{\mathcal{D}} (\underline{\text{div}} \underline{\sigma}) \cdot \underline{v}' dV - \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) : \underline{v}' dS \quad (2.3)$$

La puissance des efforts extérieurs comporte un terme volumique d'actions à distance, et un terme surfacique d'efforts de contact :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_{\mathcal{D}} \underline{f} \cdot \underline{v}' dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{E} \cdot \underline{v}' dS \quad (2.4)$$

L'application du principe conduit donc à :

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}) \cdot \underline{v}' dV - \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \underline{E}) \cdot \underline{v}' dS = 0 \quad (2.5)$$

Comme il n'y a pour le moment aucune hypothèse sur le champ de vitesse, il est possible de le choisir successivement nul sur la surface externe, ou nul en dehors d'une partie quelconque de la surface externe, il vient alors :

$$\underline{\text{div}}\underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{D} \quad (2.6)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F} \quad \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{D} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du milieu et les conditions au bord s'obtiennent en choisissant pour \mathcal{D} le solide Ω lui-même.

Le même schéma de calcul peut également être appliqué en utilisant un tenseur de contrainte *statiquement admissible* (CSA) $\underline{\sigma}^*$, et un champ de vitesse *cinématiquement admissible* (CCA) \underline{v}^l (et *a priori* non reliés par une loi de comportement), vérifiant respectivement les équations 2.9 et 2.10 et l'équation 2.11 :

$$\underline{\text{div}}\underline{\sigma}^* + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij}^* n_j = F_i \quad \text{sur } S_f^i \quad (2.10)$$

$$v_i^l = v_i^d \quad \text{sur } S_d^i \quad (2.11)$$

où S_f^i sont les surfaces où la composante i des efforts surfaciques \underline{F} est imposée, S_d^i sont les surfaces où la composante i de la vitesse est imposée, avec :

$$S_d^i \cap S_f^i = \emptyset \quad S_d^i \cup S_f^i = S \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Il vient alors :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^l dV = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\dot{u}}^l dV + \int_S \underline{F} \cdot \underline{\dot{u}}^l dS \quad (2.12)$$

2.3. Thermodynamique des processus irréversibles

Le but de cette section est de donner quelques éléments sur les bilans énergétiques en présence de déformation mécanique, et sur les interactions possibles entre la température et les déformations élastiques ou inélastiques. La formulation est proposée ici en petites perturbations, les compléments nécessaires pour les transformations finies étant donnés au chapitre ??.

2.3.1. Premier et second principes de la thermodynamique

Après la conservation de la masse et les relations d'équilibre, la troisième grande loi de conservation de la mécanique des milieux continus exprime la conservation de l'énergie ; il s'agit du premier principe de la thermodynamique, qui indique que à

chaque instant, la dérivée particulière de l'énergie totale d'un système est la somme de la puissance des efforts exercés sur le système, $\mathcal{P}^{(e)}$, et du taux de chaleur reçue, \dot{Q} . L'énergie est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, qui ne sera pas considérée ici. Le principe s'écrit donc, en introduisant l'énergie interne E sur un domaine \mathcal{D} , ou l'énergie interne spécifique e :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{de}{dt} dV = \mathcal{P}^{(e)} + \dot{Q} \quad (2.13)$$

En choisissant comme champs statiquement admissible et cinématiquement admissible les champs réels, la section précédente indique qu'il est possible d'écrire la puissance des efforts extérieurs comme :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} dV \quad (2.14)$$

Le terme \dot{Q} est la somme de deux termes, le premier correspondant à la densité surfacique du taux de chaleur reçue, qui se définit en fonction du vecteur courant de chaleur \underline{q} et de la normale \underline{n} , (\underline{n} désigne la normale sortante sur la surface $\partial\mathcal{D}$ du domaine considéré), le second, r , représentant une chaleur volumique, provenant des sources de chaleur, liées par exemple à des réactions chimiques ou des transformations de phases non prises en compte directement dans la modélisation mécanique ou encore à des sources de chaleur externes, par rayonnement :

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{q} \cdot \underline{n} dS = \int_{\mathcal{D}} (r - \text{div} \underline{q}) dV \quad (2.15)$$

La variation d'énergie interne spécifique est donc la somme du taux d'énergie spécifique due aux forces intérieures et du taux de chaleur spécifique reçue :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} + r - \text{div} \underline{q} \quad (2.16)$$

Le second principe fournit une borne supérieure du taux de quantité de chaleur que peut recevoir le volume \mathcal{D} à une température T , et s'exprime, en fonction de l'entropie S ou de l'entropie spécifique s :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} dS \quad (2.17)$$

$$\text{d'où :} \quad \int_{\mathcal{D}} \left(\rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \text{div} \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) \right) dV \geq 0 \quad (2.18)$$

En introduisant l'énergie libre spécifique de Helmholtz ψ , telle que $e = \psi + Ts$, dans les équations 2.16 et 2.18, on aboutit alors à l'inégalité dite de Clausius-Duhem :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \rho \frac{d\psi}{dt} - \rho s \dot{T} - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \underline{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (2.19)$$

2.3.2. Dissipation

La *méthode de l'état local* postule que l'état thermomécanique du milieu en un point et à un instant donné est complètement défini par la donnée de variables d'état, ne dépendant que du point considéré. L'évolution du système est considérée comme une suite d'états d'équilibre, les dérivées des variables n'intervenant pas pour définir l'état. L'énergie libre définit un potentiel qui dépend de la température et des variables d'état α_I qui caractérisent le système mécanique. Il est donc possible d'exprimer la dérivée de Ψ sous la forme :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}\dot{\alpha}_I \quad (2.20)$$

En introduisant cette expression dans 2.19, on obtient successivement :

$$s = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} \quad (2.21)$$

$$\sigma : \dot{\xi} - \rho \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}\dot{\alpha}_I - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \underline{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (2.22)$$

L'expression 2.22 met en évidence deux types de contribution à la dissipation, la dissipation intrinsèque volumique ϕ_1 et la dissipation thermique volumique ϕ_2 :

$$\phi_1 = \sigma : \dot{\xi} - \rho \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}\dot{\alpha}_I \quad (2.23)$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{T} \underline{q} \cdot \underline{\text{grad}}(T) \quad (2.24)$$

2.3.3. Équation de la chaleur

Il est classique de considérer que les dissipations intrinsèque et thermique sont découplées, et qu'il faut donc assurer séparément leur positivité. Celle de la dissipation thermique est assurée si on admet la loi de conduction de Fourier. Dans le cas d'un matériau isotrope, elle s'exprime par :

$$\underline{q} = -k(T, \alpha_I) \underline{\text{grad}}(T) \quad (2.25)$$

La fonction scalaire k , à valeurs strictement positives, représente la conduction (en W/m/K). Cette forme assure la positivité de ϕ_2 , et indique que la chaleur se déplace des zones chaudes vers les zones froides. Dans le cas où la conduction est anisotrope, elle sera définie par une forme quadratique non négative :

$$\phi_2 = \frac{1}{T} \underline{\text{grad}}T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\text{grad}}T \quad (2.26)$$

Le report de la loi de Fourier dans la relation 2.16 permet, en utilisant l'expression de la dérivée de ψ en fonction de la température et des variables d'état, d'obtenir, en posant $C_\varepsilon = T \partial s / \partial T$ (chaleur spécifique à déformation constante, en J/kg/K) :

$$\operatorname{div}(\underline{k grad}(T)) = \rho C_\varepsilon \dot{T} - r - \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} + \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \alpha_I} \right) \dot{\alpha}_I \quad (2.27)$$

Cette égalité exprime l'équation de la chaleur en présence de déformations mécaniques. Le membre de gauche est proportionnel au laplacien ΔT lorsque la conduction est isotrope avec un coefficient k constant. Avec ρ exprimé en kg/m^3 , le produit ρC_ε , qui caractérise la quantité de chaleur utilisée par le matériau pour élever sa température, est donc en $N/m^2/K$, ce qui permet bien de mettre en regard le produit $\rho C_\varepsilon \dot{T}$ avec le terme volumique r (qui est en J/m^3), et les termes d'origine mécanique $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}$ (en Pa/s). La forme de l'équation écrite ici est indépendante du type de comportement mécanique considéré. Les différences entre les matériaux seront simplement prises en compte par la forme de l'énergie libre ψ et par les variables d'état introduites. L'énergie mécanique dissipée est représentée par le terme $\phi_1 = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \rho (\partial \psi / \partial \alpha_I) \dot{\alpha}_I$, qui prend en compte l'apport d'énergie et la partie qui est stockée (momentanément ou non) dans le matériau. Il y a une possibilité de couplage thermomécanique au niveau des variables d'état si la dérivée croisée $\partial^2 \psi / (\partial T \partial \alpha_I)$ est non nulle.

2.3.4. Thermo-élasticité linéaire

Il s'agit d'un type de comportement où la déformation est décomposée en une partie élastique et une partie thermique ; la déformation élastique est nulle pour un état de référence $\underline{\sigma}^I$, et la déformation thermique est nulle pour une température de référence T^I . En se restreignant au cas isotrope, une loi de thermoélasticité linéaire peut être construite en choisissant l'énergie libre sous la forme suivante, dans laquelle K désigne le coefficient de compressibilité du matériau ($3K = 3\lambda + 2\mu$, λ et μ coefficients de Lamé) et α le coefficient de dilatation linéaire :

$$\begin{aligned} \rho \psi = \underline{\sigma}^I : \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{trace}(\underline{\varepsilon}))^2 + \mu \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon} - 3K\alpha \operatorname{trace}(\underline{\varepsilon})(T - T^I) \\ - \frac{1}{2} \frac{\rho C_\varepsilon}{T^I} (T - T^I)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

La variable d'état est la déformation thermoélastique. Comme la thermoélasticité est un processus réversible, la dissipation intrinsèque, qui s'exprime $\phi_1 = (\underline{\sigma} - \rho \partial \psi / \partial \underline{\varepsilon}) : \underline{\dot{\varepsilon}}$, doit être nulle pour un incrément infinitésimal quelconque de déformation thermoélastique. La dérivation de ψ par rapport à la déformation thermoélastique permet donc de définir la loi de comportement :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{\sigma}^I + \lambda \operatorname{trace}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} - 3K\alpha (T - T^I) \underline{I} \quad (2.29)$$

$$\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^I = \lambda (\operatorname{trace}(\underline{\varepsilon}) - 3\alpha (T - T^I)) \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (2.30)$$

Il est également possible de calculer la variation d'entropie spécifique, puisque :

$$\rho s = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial T} = 3K\alpha \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{\rho C_\varepsilon}{T^I} (T - T^I) \quad (2.31)$$

Cette expression justifie la définition de C_ε au voisinage de la température T^I : $C_\varepsilon = T^I \partial s / \partial T$. Il est intéressant dans ce cas simple d'illustrer la différence entre évolutions isotherme et adiabatique. En supposant que $s = 0$ dans l'équation (2.31), il est possible de trouver la variation de température consécutive à un changement relatif de volume $\Delta V / V = \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}})$:

$$(T - T^I) = -\frac{3K\alpha T^I}{\rho C_\varepsilon} \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (2.32)$$

Le report de cette expression dans la loi de comportement (2.30) permet de comparer les réponses :

$$\text{— isotherme : } \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^I = \lambda \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.33)$$

$$\text{— adiabatique : } \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^I = \left(\lambda + \frac{9K^2 \alpha^2 T^I}{\rho C_\varepsilon} \right) \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.34)$$

Le module de cisaillement est inchangé par rapport au cas isotherme lors d'une évolution adiabatique, par contre le premier coefficient de Lamé λ augmente. L'équation (2.31) montre par ailleurs qu'en chargement adiabatique, lorsque le volume augmente, ($\text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) > 0$), par exemple lors d'une traction simple, la température diminue, et vice-versa. Les ordres de grandeur de ces perturbations sont en général faibles. Ainsi une évaluation pour des valeurs typiques d'un acier ($E=200$ GPa, $\nu=0,3$, $\rho=8000$ kg/m³, $C_\varepsilon = 500$ J/kg/K, $\alpha = 15 \times 10^{-6}$) fournit :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{3K\alpha}{\rho C_\varepsilon} \frac{\Delta V}{V} = -1,875 \frac{\Delta V}{V} \quad (2.35)$$

Notons que la loi de thermo-élasticité d'un milieu anisotrope quelconque pourra s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^\theta) \quad (2.36)$$

où $\underline{\underline{\Lambda}}$ est le tenseur (ordre 4) des rigidités élastiques et $\underline{\underline{\varepsilon}}^\theta$ la dilatation thermique $\underline{\underline{\varepsilon}}^\theta = \alpha(T - T^I)$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représentant la déformation élastique.

2.3.5. Comportement non-linéaire

Ecriture de la dissipation

On suppose, comme cela sera justifié plus loin, que la déformation combine de façon additive une déformation thermoélastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ (déformation mécanique + dilatation) et une déformation inélastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ (petites perturbations) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.37)$$

On modifie également légèrement les notations initiales, en venant distinguer parmi les variables α_I celles qui caractérisent l'*écrouissage* du matériau, c'est-à-dire l'évolution de ses propriétés par des mécanismes qui conservent la continuité locale de la matière (redistribution de contraintes locales, variations de densité de dislocations...), et pour lesquelles la dénomination α_I sera conservée, et celles qui caractérisent l'*endommagement*, qui est lié aux détériorations du matériau, avec ouverture de porosités ou de microfissures, qui seront notées d_J . Le jeu de variables d'état le plus général fait donc apparaître (ξ^e, α_I, d_J) , et la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\phi_1 = (\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi^e}) : \dot{\xi}^e + \underline{\sigma} : \dot{\xi}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \dot{\alpha}_I - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_J} \dot{d}_J \quad (2.38)$$

Soit, comme il n'y a pas de dissipation thermoélastique (et le terme en température n'intervient pas non plus à cause de (2.21)) :

$$\phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\xi}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \dot{\alpha}_I - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_J} \dot{d}_J \quad (2.39)$$

L'évaluation complète nécessite de choisir la loi de comportement, ce qui sera fait plus loin. Les deuxième et troisième termes du membre de droite désignent le changement d'énergie libre de l'élément de volume à température constante. C'est la part d'énergie qui est stockée dans le matériau du fait de l'écrouissage, ou qui est utilisée à rompre les liaisons, et qu'il faut donc soustraire de la puissance plastique pour obtenir l'énergie effectivement dissipée en chaleur. Garder Φ_1 positif revient donc à dire que le processus irréversible que l'on considère produit de la chaleur. L'élévation de température est gouvernée par :

$$\text{div}(\underline{k grad}(T)) = \rho C_\varepsilon \dot{T} - r - \phi_1 - \phi_{is} \quad (2.40)$$

où ϕ_{is} représente la somme des termes dits "isentropiques", déduits du second terme dans la parenthèse au second membre de (2.27). Ce terme isentropique est en général faible. Il correspond à la dépendance en température des forces thermodynamiques.

Evaluation approchée de la dissipation

Indépendamment du modèle de comportement choisi, il est souvent d'usage de remplacer le terme de dissipation intrinsèque par une fraction β de la puissance plastique (avec $0 \leq \beta \leq 1$). Il s'agit d'une méthode approchée pour prendre en compte empiriquement la proportion d'énergie qui est effectivement dissipée en chaleur au cours de la déformation, l'expérience montrant que la valeur de β est en général supérieure à 0,9 dans le domaine des déformations importantes.

Le cas du chargement adiabatique s'exprime dans cette relation en remarquant que, dans ce cas, le terme $\text{div}(\underline{k grad}(T))$ est nul. Une évaluation approchée de l'élévation

de température est donc donnée, dans le cas où il n'y a pas de source de chaleur volumique, par l'expression :

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} = \phi_1 \quad (2.41)$$

L'élévation de température ne sera sensible que pour le cas de chargements suffisamment rapides pour qu'il n'y ait pas d'évacuation de chaleur. Contrairement au cas du couplage thermoélastique, le couplage thermoplastique doit être pris en compte, notamment dans des problèmes de mise en forme. Il conduit à des élévations de températures quelle que soit la sollicitation considérée.

Modèle standard généralisé

En définissant les forces thermodynamiques A_I (resp. y_J) associées aux variables d'état α_I (resp. d_J) par :

$$A_I = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \quad ; \quad y_J = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d_J} \quad (2.42)$$

en désignant par Z le vecteur constitué par les composantes du tenseur de contraintes et celles des variables A_I et y_J , et par z le vecteur constitué par les déformations plastiques et les variables d'état, la dissipation s'exprime :

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I + y_J \dot{d}_J = Z \dot{z} \quad (2.43)$$

avec :

$$Z = \{\underline{\sigma}, A_I, y_J\} \quad ; \quad z = \{\underline{\varepsilon}^p, -\alpha_I, d_J\} \quad (2.44)$$

Un modèle sera dit *standard généralisé* s'il existe un *potentiel* $\Omega(Z)$ tel que :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \quad (2.45)$$

Si Ω est une fonction convexe de Z qui contient l'origine, la dissipation intrinsèque est automatiquement positive, car, pour le point courant Z , tous les points du domaine délimité par l'équipotentielle $\Omega = Cte$ sont situés du même côté du plan tangent, défini par la normale $\partial \Omega / \partial Z$, et :

$$\phi_1 = Z \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \quad (2.46)$$

L'application de la transformation de Legendre-Fenchel permet de définir Ω^* , dépendant des vitesses des variables d'état :

$$\Omega^*(\dot{z}) = \max_Z (Z \dot{z} - \Omega(Z)) \quad (2.47)$$

Les variables Z s'obtiennent alors comme les dérivées partielles de Ω^* par rapport à \dot{z} . Les modèles standards généralisés supposent donc que toute l'information concernant le comportement non-linéaire des matériaux peut être résumée dans deux potentiels, l'énergie libre, qui décrit les relations entre les variables d'état et les forces thermodynamiques associées, et les lois de comportement des phénomènes réversibles, et le *potentiel de dissipation* Ω^* , qui permet de caractériser les phénomènes dissipatifs.

Couplages d'état, couplages dissipatifs

Un couplage d'état [MAR 89] est le résultat de la présence dans l'énergie libre de termes croisés des variables d'état, ce qui introduit une dépendance au niveau de la force thermodynamique. Ce type de couplage sera par exemple considéré entre l'élasticité et l'endommagement (chapitre ??). Il suppose une certaine symétrie des interactions, ainsi pour deux variables A_1 et A_2 forces associées de α_1 et α_2 :

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (2.48)$$

On rencontre au contraire un couplage dissipatif lorsqu'il y a plusieurs potentiels Ω , soit Ω_K , il vient alors :

$$\dot{z} = \sum_K \frac{\partial \Omega_K}{\partial Z} \quad (2.49)$$

Ce type de couplage se rencontre également dans les modèles «multisurfaces» ou dans les approches cristallographiques.

2.4. Les grandes classes de comportement**2.4.1. Les briques de base**

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements «de base», qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont, en figure 2.2 :

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (figure 2.2a).
2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (figure 2.2b) ou non-linéaire (figure 2.2c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (figure 2.2d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder un trop grand crédit

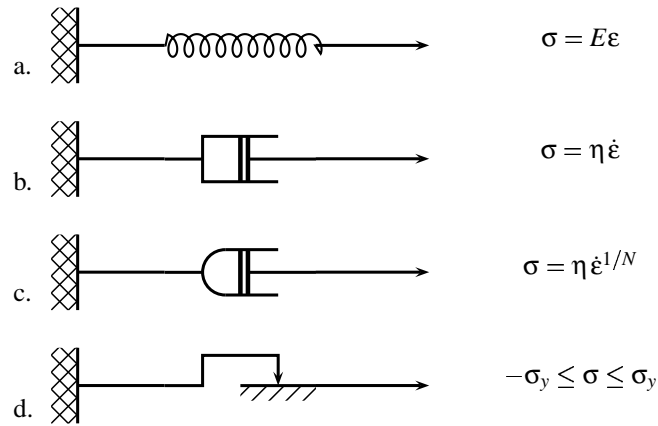


Figure 2.2. Les « briques de base » pour la représentation des comportements.

pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires. C'est aussi l'occasion d'introduire l'ensemble du vocabulaire qui sera utile dans le cas général des chargements tridimensionnels.

La réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents, qui permettent d'illustrer le comportement lors d'essais de type :

- *écrouissage*, ou augmentation monotone de la charge ou de la déformation, (plan déformation–contrainte, ε – σ) ;
- *fluage*, ou maintien de la charge (plan temps–déformation, t – ε) ;
- *relaxation*, ou maintien de la déformation (plan temps–contrainte, t – σ).

2.4.2. Plasticité uniaxiale

Modèle élastique–parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (figure 2.3a) produit un comportement *élastique parfaitement plastique*, modélisé en figure 2.3c. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que σ_y .

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une *fonction de charge* f dépendant

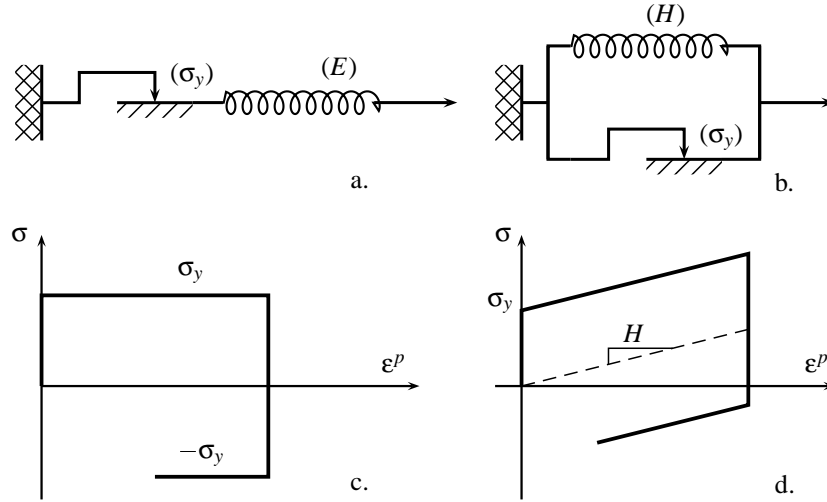


Figure 2.3. Associations en série ou parallèle de patin et ressort

de la seule variable σ , et définie par :

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2.50)$$

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de f , et le comportement du système se résume alors aux équations suivantes :

- domaine d'élasticité si : $f < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$)
- décharge élastique si : $f = 0$ et $\dot{f} < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$)
- écoulement plastique si : $f = 0$ et $\dot{f} = 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p$)

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

Le modèle est *sans écrouissage*, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a donc pas d'énergie stockée au cours de la déformation, la dissipation en chaleur est donc égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

Modèle de Prager

L'association en parallèle de la figure 2.3b correspond au comportement illustré en figure 2.3d. Dans ce cas, l'écroutissement est linéaire. Il est dit *cinématique*, car dépendant de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan $\sigma - \varepsilon^p$ est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut $X = H\varepsilon^p$. Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit $|\sigma - H\varepsilon^p|$, est égale à σ_y . Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une *contrainte interne* qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.51)$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. Ceci conduit à la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \quad (2.52)$$

D'où :

$$\text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \quad (2.53)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{X}, \text{ et finalement : } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\sigma}/H \quad (2.54)$$

Dans ce cas, la contrainte évolue au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où $H = 0$ redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.55)$$

Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est *temporairement* stockée dans le matériau (ici, dans le ressort), et *entièrement* restituée à la décharge. Ceci donne une illustration physique de la notion d'écrouissage *renversable*, alors que les règles d'écrouissage cinématique non-linéaire considérées plus loin seront accompagnées d'une dissipation d'énergie (paragraphe 3.7.2).

Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge–décharge» s'expriment donc :

- domaine d'élasticité si : $f(\sigma, A_i) < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E$)
- décharge élastique si : $f(\sigma, A_i) = 0$ et $\dot{f}(\sigma, A_i) < 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E$)
- écoulement plastique si : $f(\sigma, A_i) = 0$ et $\dot{f}(\sigma, A_i) = 0$ ($\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\epsilon}^p$)

Dans le cas général, le module H dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point (σ, A_i) s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la *condition de cohérence* :

$$\dot{f}(\sigma, A_i) = 0 \quad (2.56)$$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxial, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront ensuite utilisés dans le cas plus complexe des chargements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écrouissage, le second fait intervenir une variable X qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Le type d'écrouissage correspondant s'appelle écoulement cinématique (figure 2.4b). Dans le cas particulier illustré par le modèle rhéologique, l'évolution de la variable X est linéaire en fonction de la déformation plastique, c'est le modèle d'écrouissage cinématique linéaire (Prager, 1958).

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (figure 2.4a) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit d'un écoulement isotrope (Taylor et Quinney, 1931). La variable d'écrouissage qui intervient dans f est la dimension du domaine d'élasticité, notée R :

$$f(\sigma, X, R) = |\sigma| - R - \sigma_y \quad (2.57)$$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la *déformation plastique cumulée*, p , variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique : $\dot{p} = |\dot{\epsilon}^p|$. Bien entendu, il n'y a pas de différence entre p et ϵ^p tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour l'écrouissage cinématique, cela s'écrit $\sigma = X + \sigma_y$, et pour l'écrouissage isotrope $\sigma = R + \sigma_y$. Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'écrouissage qui détermine exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nul ou constant. Il est souvent plus réaliste de

considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg–Osgood, avec deux coefficients matériaux K et m) ou une exponentielle, cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime σ_u supportable par le matériau (deux coefficients matériau, σ_u et b en plus de σ_y) :

$$\sigma = \sigma_y + K (\varepsilon^p)^m \quad (2.58)$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \exp(-b \varepsilon^p) \quad (2.59)$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un écrouissage isotrope. Ce type d'écrouissage est prédominant pour les déformations importantes (au delà de 10%). Cependant, l'écrouissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les chargements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'effet Bauschinger, c'est-à-dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un préécrouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'écrouissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat.

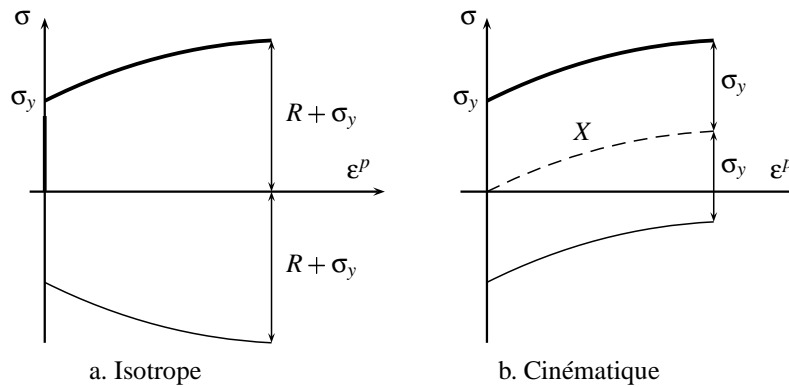


Figure 2.4. Illustration des deux principaux types d'écrouissage

2.4.3. Viscoélasticité uniaxiale

Un exemple de modèle rhéologique

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (figure 2.5a), celui de Voigt un amortisseur et un ressort en parallèle (figure 2.5b). Leurs équations

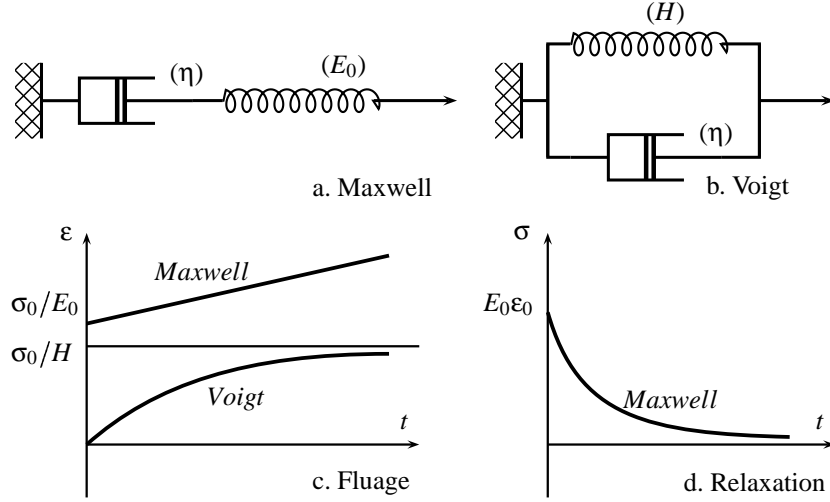


Figure 2.5. Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt

respectives sont :

$$\text{–Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta \quad ; \quad (2.60)$$

$$\text{–Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{ou encore : } \dot{\varepsilon} = (\sigma - H\varepsilon)/\eta \quad (2.61)$$

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine : l'application d'un saut de déformation en $t = 0$ produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin–Voigt du paragraphe suivant). Sous l'effet d'une contrainte σ_0 constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique σ_0/H , le fluage est donc limité (figure 2.5c). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur ε_0 , la contrainte asymptotique sera $H\varepsilon_0$. Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (figure 2.5c), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (figure 2.5d).

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Les formules ob-

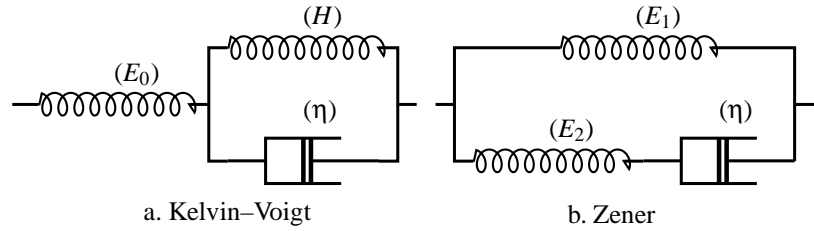


Figure 2.6. Exemple de modèles composés.

tenues sont respectivement, pour le modèle de Maxwell :

$$\text{— fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \varepsilon = \sigma_0/E_0 + \sigma_0 t / \eta \quad (2.62)$$

$$\text{— relaxation à la déformation } \varepsilon_0 : \quad \sigma = E_0 \varepsilon_0 \exp[-t/\tau] \quad (2.63)$$

et pour le modèle de Voigt :

$$\text{— fluage sous une contrainte } \sigma_0 : \quad \varepsilon = (\sigma_0 / H)(1 - \exp[-t/\tau']) \quad (2.64)$$

Les constantes $\tau = \eta/E_0$ et $\tau' = \eta/H$ sont homogènes à un temps, τ désignant le *temps de relaxation* du modèle de Maxwell.

2.4.4. Étude d'un modèle composé

Le modèle de Kelvin-Voigt (figure 2.6a) présente respectivement les réponses suivantes, pour $t > 0$, en fluage sous une contrainte σ_0 , en posant $\tau_f = \eta/H$, et en relaxation pour une déformation ε_0 , en posant $\tau_r = \eta/(H + E_0)$:

$$\varepsilon(t) = C(t) \sigma_0 = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} (1 - \exp[-t/\tau_f]) \right) \sigma_0 \quad (2.65)$$

$$\sigma(t) = E(t) \varepsilon_0 = \left(\frac{H}{H + E_0} + \frac{E_0}{H + E_0} \exp[-t/\tau_r] \right) E_0 \varepsilon_0 \quad (2.66)$$

Le temps caractéristique en relaxation, τ_r , est plus court que le temps correspondant en fluage, τ_f . Le matériau évolue donc plus vite vers son état asymptotique en relaxation qu'en fluage.

Le modèle de Zener (figure 2.6b) peut se ramener au modèle de Kelvin-Voigt, à l'aide du double changement de variable $1/E_1 = 1/E_0 + 1/H$, et $E_2 = E_0 + H$, ce qui prouve que les deux modèles sont en fait identiques. La même observation peut être faite en fluage. Ce modèle correspond au comportement du béton. Les modèles indiqués peuvent être encore améliorés :

- le *modèle de Kelvin–Voigt généralisé* est obtenu en ajoutant en série d’autres modules amortisseur-ressort (H, η) dans le cas du premier modèle ; ce modèle représente en général correctement le comportement des polymères fortement réticulés ;
- le *modèle de Maxwell généralisé* est obtenu en ajoutant en parallèle d’autres modules amortisseur-ressort (E_2, η) au second modèle ; ce modèle représente qualitativement le comportement des polymères thermoplastiques.

2.4.5. Viscoplasticité uniaxiale

Un exemple de modèle rhéologique

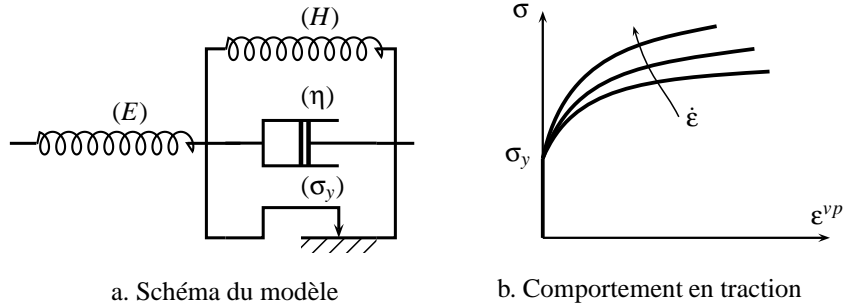


Figure 2.7. Modèle de Bingham généralisé

La figure 2.7a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer très simplement d’un modèle ayant un comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. On retrouverait l’original de ce modèle en enlevant le ressort en série $(E \rightarrow \infty, \text{pas d'élasticité instantanée, on obtient alors un modèle rigide viscoplastique, et en supprimant le ressort en parallèle, } H = 0, \text{ pas d'écrouissage})$. La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique E , la déformation viscoplastique, que l’on nommera ϵ^{vp} , aux bornes de l’assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s’effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\epsilon^{vp} \quad \sigma_v = \eta \dot{\epsilon}^{vp} \quad \sigma_p \leq \sigma_y \quad (2.67)$$

où X , σ_v et σ_p sont respectivement les contraintes dans le ressort de caractéristique H , dans l’amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p \quad (2.68)$$

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d’élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque $|\sigma_p| = \sigma_y$. On distingue alors trois régimes de fonctionnement,

selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive ou négative :

$$(a) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} = 0 \quad |\sigma_p| = |\sigma - H\varepsilon^{vp}| \leq \sigma_y \quad (2.69)$$

$$(b) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} > 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = \sigma_y \quad (2.70)$$

$$(c) \quad \dot{\varepsilon}^{vp} < 0 \quad \sigma_p = \sigma - H\varepsilon^{vp} - \eta\dot{\varepsilon}^{vp} = -\sigma_y \quad (2.71)$$

Le cas (a) correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ($|\sigma_p| < \sigma_y$) ou à un état de décharge élastique ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\dot{\sigma}_p| \leq 0$), les deux autres cas à de l'écoulement ($|\sigma_p| = \sigma_y$ et $|\dot{\sigma}_p| = 0$). En posant $\langle x \rangle = \max(x, 0)$, les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\eta\dot{\varepsilon}^{vp} = \langle |\sigma - X| - \sigma_y \rangle \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.72)$$

ou encore :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - X), \quad \text{avec} \quad f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (2.73)$$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone $f > 0$, et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation. Ceci explique qu'en figure 2.7b la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte visqueuse σ_v sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité (on peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante). Par ailleurs, il est possible de simuler des expériences de fluage ou de relaxation.

En fluage (figure 2.8), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à $\sigma_o > \sigma_y$) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est une exponentielle en fonction du temps t , avec un temps caractéristique $\tau_f = \eta/H$ (figure 2.8a) :

$$\varepsilon^{vp} = \frac{\sigma_o - \sigma_y}{H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (2.74)$$

La figure 2.8b montre, dans le plan contrainte-déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne X et du seuil $X + \sigma_y$. Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée σ_o , la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à ε_o tel que $E\varepsilon_o > \sigma_y$) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation $\tau_r = \eta/(E + H)$:

$$\sigma = \sigma_y \frac{E}{E + H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) + \frac{E\varepsilon_o}{E + H} \left(H + E \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) \quad (2.75)$$

La figure 2.9a montre le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de contrainte au cours de la relaxation (pente $-E$ puisque $\dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\sigma}/E = 0$). La figure 2.9b représente

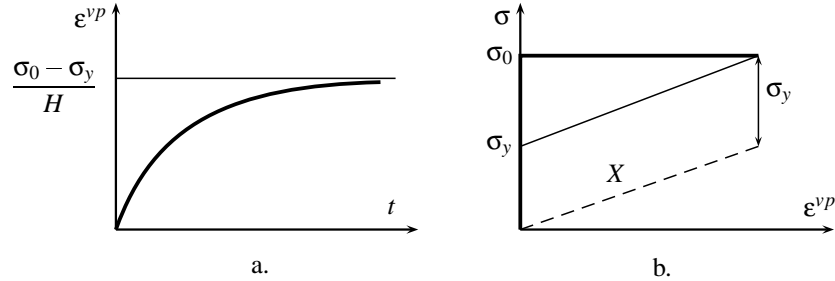


Figure 2.8. Fluage avec le modèle de Bingham

quant à elle le trajet caractéristique au cours d'une expérience d'effacement, ou encore de recouvrance. En fonction du niveau de chargement initial, on peut rencontrer après décharge une vitesse d'écoulement négative ou nulle, mais en aucun cas on ne pourra ramener la déformation viscoplastique à zéro, sauf dans le cas particulier où la contrainte σ_y est nulle. Il n'y a alors plus de seuil initial, et on conçoit bien qu'il n'est plus nécessaire dans ce cas de définir une décomposition de la déformation : on retrouve d'ailleurs le modèle de Kelvin-Voigt, donc une approche viscoélastique.

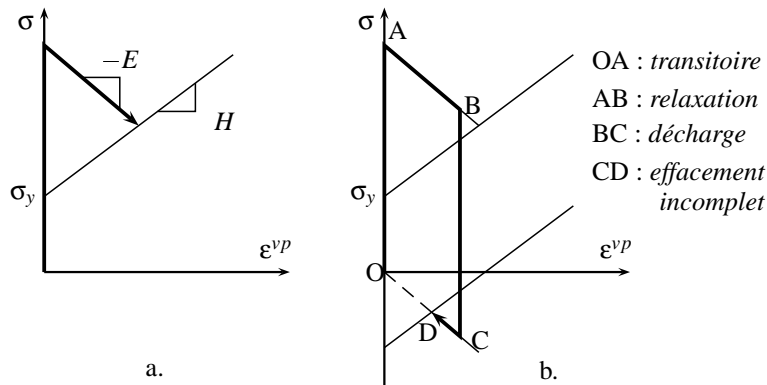


Figure 2.9. Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée

Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction f au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme

plus générale, en introduisant une fonction de viscosité, ϕ , qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \phi(f) \quad (2.76)$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'érouissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple :

$$\sigma = \sigma_y + X + R + \phi^{-1}(\dot{\epsilon}^{vp}) = \sigma_y + X + R + \sigma_v \quad (2.77)$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité (au travers de X et R), mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse σ_v . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que $\phi(0) = 0$, et on suppose également que ϕ est une fonction monotone croissante. Dans le cas où σ_v s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, et plus la contrainte atteinte pour une déformation donnée sera élevée.

Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il y a donc deux possibilités pour introduire de l'érouissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type X et R , et on peut également jouer sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à érouissage additif ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à érouissage multiplicatif ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine d'élasticité se réduit à l'origine ($\sigma = 0$), et qui ne possède pas d'érouissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de Norton (avec deux coefficients matériau K et n) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.78)$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans érouissage, ou réintroduire X et R aux côtés de σ_y , ce qui conduit à un modèle à érouissage additif ([LEM 85b]).

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad (2.79)$$

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - X) \quad (2.80)$$

Il y a également une grande liberté pour choisir d'autres formes que la fonction puissance, ainsi un sinus hyperbolique dans le modèle de Sellars et Teggart (loi sans érouissage, coefficients A et K) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = A \sinh \left(\frac{|\sigma|}{K} \right) \text{signe}(\sigma) \quad (2.81)$$

Pour obtenir des lois à écrouissage multiplicatif, il faut admettre que la fonction ϕ ne dépend pas uniquement de f , ainsi la loi de Lemaitre (coefficients matériau K , m et n positifs) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n p^{-n/m} \text{signe}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \dot{p} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| \quad (2.82)$$

2.4.6. Influence de la température

Tous les coefficients caractéristiques qui ont été définis ci-dessus sont susceptibles de dépendre de la température. Les dépendances se définissent en général par des tables, après examen du comportement isotherme. Dans certains cas, lorsque les mécanismes physiques sont bien définis, il est possible de préciser explicitement l'influence de la température. La loi la plus couramment utilisée pour cela est la loi d'Arrhenius. Elle est valide en fluage. Elle introduit une énergie d'activation thermique Q , et R , constante des gaz parfaits (le rapport Q/R est homogène à une température), et indique que plus la température est élevée pour une charge donnée, plus la vitesse de déformation est grande :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\varepsilon}_o \exp(-Q/RT) \quad (2.83)$$

Ceci permet de construire des équivalences temps-température, et, en menant en laboratoire des essais à température plus élevée que la température de fonctionnement visée dans les applications, d'obtenir en un temps limité des informations sur le comportement à long terme. Cette approche doit bien entendu être manipulée avec précaution dans le cas de matériaux vieillissants, et elle ne peut être étendue à de trop grandes plages de température.

2.4.7. Résumé

Les équations très générales qui ont été écrites pour le moment mettent en évidence la nature des modèles de viscoélasticité, de plasticité et de viscoplasticité. Ces deux derniers ont en commun l'existence d'un domaine d'élasticité (éventuellement réduit à l'origine pour le modèle viscoplastique) et de variables d'écrouissage. Par contre, il faut aussi retenir que l'écoulement plastique est *instantané*, alors que l'écoulement viscoplastique est *retardé* :

$$d\varepsilon^p = g(\sigma, \dots) d\sigma; d\varepsilon^{vp} = g(\sigma, \dots) dt \quad (2.84)$$

Ceci aura des conséquences importantes pour l'écriture du comportement élasto-(visco)-plastique tangent. On n'a vu pour le moment que des formes très naïves d'écrouissage. Les formes réalistes seront abordées plus loin, afin de les considérer directement dans le cas tridimensionnel.

2.5. Critères

La description des modèles à utiliser sous chargement uniaxial qui a été faite dans le chapitre précédent a mis en évidence un domaine d'élasticité, dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage, pour lequel il n'y a pas d'écoulement plastique ou viscoplastique. La trace de ce domaine sur l'axe de la contrainte se limite à un segment de droite, qui peut subir une translation ou une extension (il peut même parfois se limiter à un point). Par ailleurs certains modèles sont capables de représenter une contrainte maximale supportable par le matériau. Afin de pouvoir aborder l'étude des chargements multiaxiaux, il est nécessaire de se donner les moyens de définir de telles limites en tridimensionnel. On passe donc en revue les outils disponibles pour écrire ces modèles dans le cas de milieux continus, enfin on montre les principales classes de critères. De même que pour les lois d'écoulement qui ont été citées précédemment, le choix de tel ou tel critère va dépendre du matériau étudié.

2.5.1. Les outils disponibles

Le cas du chargement uniaxial étudié jusqu'à présent fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. Ainsi dans le cas du modèle de Prager, le domaine d'élasticité initial est le segment $[-\sigma_y, \sigma_y]$, et sa position pour une déformation plastique ε^p est $[-\sigma_y + X, \sigma_y + X]$, avec $X = H\varepsilon^p$. Il est décrit par la fonction de charge (définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}), $f : (\sigma, X) \rightarrow f(\sigma, X)$. Pour définir ce même domaine en présence de chargements multiaxiaux, la fonction f devient une fonction du tenseur de contrainte, $\underline{\sigma}$ et du tenseur $\underline{X} = H\underline{\varepsilon}^p$, (de \mathbb{R}^{12} dans \mathbb{R}) telle que si $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) < 0$, l'état de contraintes est élastique, si $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) = 0$, le point de fonctionnement est sur la frontière, la condition $f(\underline{\sigma}, \underline{X}) > 0$ définissant l'extérieur du domaine. Dans le cas général, l'ensemble de départ contiendra les contraintes et toutes les variables d'écrouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir $f(\underline{\sigma}, A_i)$. On va dans un premier temps limiter la présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables A_i sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions f dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est convexe (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en $\underline{\sigma}$, ce qui implique, pour tout réel λ compris entre 0 et 1, et pour un couple $(\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2)$ quelconque de la frontière :

$$f(\lambda \underline{\sigma}_1 + (1 - \lambda) \underline{\sigma}_2) \leq \lambda f(\underline{\sigma}_1) + (1 - \lambda) f(\underline{\sigma}_2) \quad (2.85)$$

Comme dans le cas de l'étude du tenseur d'élasticité, il faut ici encore respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope

que f soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(\underline{\sigma}) &&= \sigma_{ii} \\ I_2 &= (1/2) \text{Tr}(\underline{\sigma}^2) &&= (1/2) \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 &= (1/3) \text{Tr}(\underline{\sigma}^3) &&= (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{aligned}$$

L'expérience montre que la déformation plastique d'un grand nombre de matériaux est indépendante de la pression hydrostatique. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur \underline{s} , défini en enlevant à $\underline{\sigma}$ la pression hydrostatique, et ses invariants :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{\sigma} - (I_1/3)\underline{I} \\ J_1 &= \text{Tr}(\underline{s}) &&= 0 \\ J_2 &= (1/2) \text{Tr}(\underline{s}^2) &&= (1/2) s_{ij} s_{ji} \\ J_3 &= (1/3) \text{Tr}(\underline{s}^3) &&= (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki} \end{aligned}$$

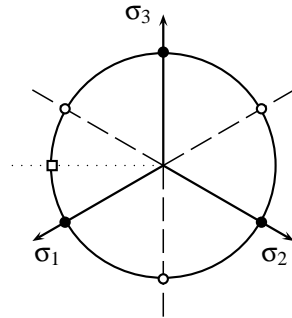
Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de f sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de J_2 l'invariant J , qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ou de la contrainte σ dans le cas d'un état de traction simple :

$$J = ((3/2)s_{ij}s_{ji})^{1/2} = ((1/2)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2))^{1/2} = |\sigma| \quad (2.86)$$

La valeur précédente est à rapprocher de celle de la contrainte de cisaillement octaédral. Les plans octaédraux sont ceux dont le vecteur normal est de type $\{1, 1, 1\}$ dans l'espace des contraintes principales. Il est aisé de montrer que le vecteur contrainte évalué sur le plan $(1,1,1)$ à partir des valeurs de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a pour composantes normale σ_{oct} et tangentielle τ_{oct} :

$$\sigma_{oct} = (1/3)I_1 \quad ; \quad \tau_{oct} = (\sqrt{2}/3)J \quad (2.87)$$

La valeur de J définit donc le cisaillement dans les plans octaédraux. Les remarques précédentes indiquent que le plan de normale $(1,1,1)$ va être un plan privilégié pour la représentation des critères. En effet, tous les points représentant des états de contrainte qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique (donc qui sont équivalents vis-à-vis d'un critère qui ne fait pas intervenir la pression hydrostatique) s'y projettent sur le même point. La figure 2.10 montre ce plan, dans lequel les projections des axes principaux déterminent des angles de $2\pi/3$, et qui a comme équation $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -I_1/3$.



● désigne les points qui peuvent se ramener à de la traction simple, ○ ceux qui peuvent se ramener à la compression simple (par exemple un chargement biaxial, car un état où les seules contraintes non nulles sont $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ est équivalent à $\sigma_3 = -\sigma$), □ est un état de cisaillement

Figure 2.10. Définition du plan déviateur

2.5.2. Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

Critère de von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore J . Ceci correspond à un ellipsoïde dans l'espace des tenseurs \underline{s} symétriques (expression quadratique des composantes s_{ij} , qui sont toutes équivalentes), soit, si σ_y est la limite d'élasticité en traction :

$$f(\underline{\sigma}) = J - \sigma_y \quad (2.88)$$

Critère de Tresca

L'expression du critère de von Mises fait intervenir les cisaillements maximaux dans chaque plan principal, représentés par les quantités $(\sigma_i - \sigma_j)$. La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) :

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y \quad (2.89)$$

Comparaison des critères de Tresca et von Mises

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières

du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent :

- dans le plan traction–cisaillement (figure 2.11a), lorsque seules les composantes $\sigma = \sigma_{11}$ et $\tau = \sigma_{12}$ sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$$

- dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2) (figure 2.11b), lorsque la troisième contrainte principale σ_3 est nulle :

$$\text{– von Mises : } f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y$$

$$\text{– Tresca : } f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$$

(symétrie par rapport à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2$)

- dans le plan déviateur (figure 2.10), le critère de von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone ;
- dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice (1,1,1), qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur.

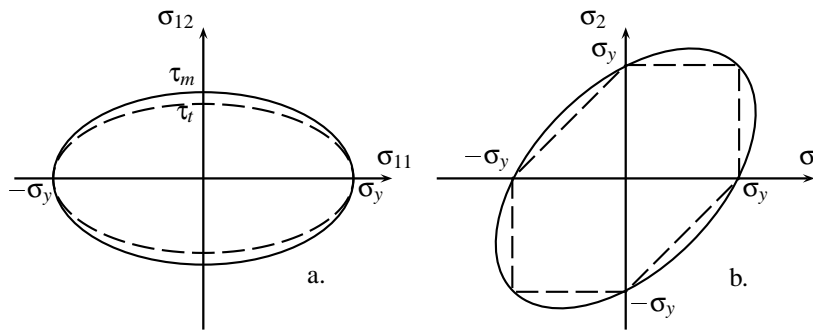


Figure 2.11. Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de von Mises (traits pleins), (a) En traction-cisaillement (von Mises : $\tau_m = \sigma_y/\sqrt{3}$, Tresca : $\tau_t = \sigma_y/2$), (b) En traction biaxiale

2.5.3. Critères faisant intervenir la pression hydrostatique

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression. Cette section montre quelques exemples, certains d'entre eux étant détaillés dans le paragraphe 3.11.

Critère de Drucker-Prager

C'est une extension du critère de von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'«altitude» sur la trissectrice des axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de contraintes principales (figure 2.12a) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = J - \frac{\sigma_y - \alpha I_1}{1 - \alpha} \quad (2.90)$$

La limite d'élasticité en traction reste σ_y , et la limite d'élasticité en compression est $-\sigma_y/(1 - 2\alpha)$. Le coefficient α dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de von Mises pour $\alpha = 0$ (figure 2.12b).

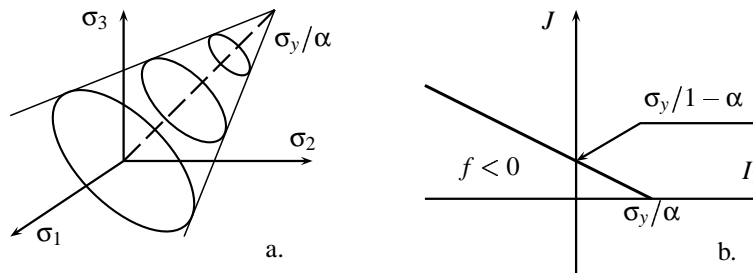


Figure 2.12. Représentation du critère de Drucker-Prager, (a) dans l'espace des contraintes principales, (b) dans le plan $I_1 - J$.

Le critère de Mohr-Coulomb

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximal, mais en même temps la contrainte «moyenne», représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (\text{avec } \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1) \quad (2.91)$$

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau (T_t en figure 2.13a) est d'autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée. La limite admissible constitue une *courbe intrinsèque* dans le plan de Mohr. La formule énoncée ci-dessus est obtenue avec une règle de frottement linéaire :

$$|T_t| < -\tan(\phi) T_n + C \quad (2.92)$$

La constante C est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau sous contrainte moyenne nulle. L'angle ϕ désigne le frottement interne du matériau. Si C est nul et ϕ non nul, le matériau est dit pulvérulent. Si ϕ est nul et C non nul, comme dans le cas du critère de Tresca, le matériau est purement cohérent.

Le critère peut également s'exprimer sous la forme suivante, en fonction de la poussée K_p et de la limite d'élasticité en compression, R_p :

$$f(\underline{\sigma}) = K_p \sigma_1 - \sigma_3 - R_p \quad (2.93)$$

$$\text{avec } K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad R_p = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.94)$$

Dans le plan déviateur (figure 2.13b) on obtient un hexagone irrégulier, caractérisé par les valeurs suivantes (avec $p = (-1/3)I_1$) :

$$\sigma_t = 2\sqrt{6}(C \cos \phi - p \sin \phi)/(3 + \sin \phi) \quad (2.95)$$

$$\sigma_c = 2\sqrt{6}(-C \cos \phi + p \sin \phi)/(3 - \sin \phi) \quad (2.96)$$

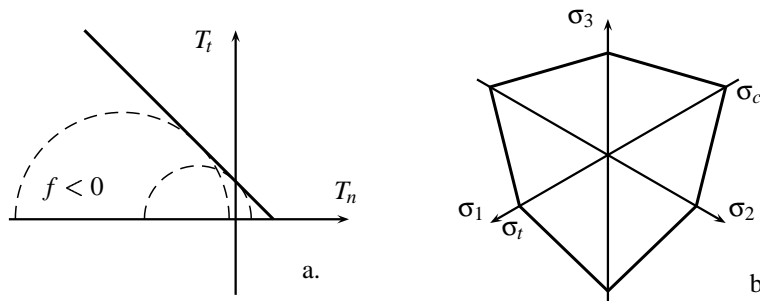


Figure 2.13. Représentation du critère de Mohr-Coulomb, (a) dans le plan de Mohr, (b) dans le plan déviateur

Critères «fermés»

Les deux critères précédents prévoient que le matériau devient infiniment résistant en compression triaxiale. Ce comportement n'est en général pas vérifié sur les matériaux réels qui sont sensibles à la pression hydrostatique. Pour permettre de simuler

par exemple des opérations de compaction, on a recours à des modèles “fermés”, dans lesquels on définit la courbe limite en deux parties, le raccord s’effectuant pour une valeur critique négative de la pression hydrostatique. On retiendra par exemple le *cap model*, qui ferme par une ellipse le critère de Drucker–Prager, ou le modèle de *Cam–clay* (utilisé pour les argiles), dont la courbe limite est définie par deux ellipses dans le plan $(I_1 - J)$.

2.5.4. Critères anisotropes

Lorsqu’on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu’en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation, et une distorsion. Les deux premières modifications sont représentées par les écrouissages isotropes et cinématiques, mais la dernière n’est pas prise en compte par les modèles courants, d’autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe : on est là en présence d’anisotropie induite. Il existe par ailleurs des matériaux fondamentalement anisotropes par fabrication, matériaux composites à fibres longues par exemple. Les modèles de matériaux hétérogènes permettent de tenir compte naturellement de certaines anisotropies, mais ils restent d’un emploi délicat, et on ne peut pas actuellement envisager de traiter dans un cadre industriel le cas de l’anisotropie la plus complexe. Il existe néanmoins de nombreuses possibilités d’extension des critères isotropes à la description de matériaux anisotropes. La voie la plus générale, mais qui n’est pas réellement opérationnelle, consiste à considérer que le critère est une fonction des composantes du tenseur des contraintes dans une base donnée. La forme choisie doit être intrinsèque, ce qui impose que le résultat obtenu soit invariant par changement de repère. Un guide pour construire ce type de modèle est fourni par les théories des invariants (voir par exemple [BOE 78]).

La solution la plus généralement adoptée généralise le critère de von Mises, en utilisant à la place de $J(\sigma)$ l’expression :

$$J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{\sigma} : \underline{\underline{B}} : \underline{\sigma})^{1/2} \quad (2.97)$$

qui fait intervenir le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{B}}$. Choisir pour $\underline{\underline{B}}$ le tenseur $\underline{\underline{J}}$ tel que $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\sigma}}$ ($\underline{\underline{s}}$ déviateur associé à $\underline{\underline{\sigma}}$) redonne bien entendu le critère de von Mises. Comme pour le cas de l’élasticité, on peut réduire le nombre de composantes libres du tenseur $\underline{\underline{B}}$ par des considérations de symétrie. En plus des conditions habituelles sur les composantes $B_{ijkl} = B_{ijlk} = B_{jikl} = B_{klij}$, il faut tenir compte du fait que $B_{jjkl} = 0$ si l’on veut encore assurer l’incompressibilité plastique (la vitesse de déformation plastique est portée par la direction $\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\sigma}}$). Il reste donc 15 coefficients libres (comme une matrice 5×5 symétrique). Si le matériau admet 3 plans de symétrie perpendiculaires, les termes de couplage entre composantes axiales et composantes de cisaillement (tels B_{1112}) sont nuls, et il ne reste que 6 composantes, lorsque le tenseur est exprimé dans

le repère correspondant. On retrouve alors l'expression classique :

$$f(\underline{\sigma}) = (F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2)^{1/2} - \sigma_y = f_H(\underline{\sigma}) \quad (2.98)$$

En représentant le tenseur d'ordre 4 comme une matrice 6x6, les termes de $\underline{\underline{B}}$ s'écrivent dans ce cas particulier :

$$\begin{pmatrix} F+H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G+F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & H+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Une manipulation simple permet de vérifier que le même critère s'exprime également en fonction des composantes du tenseur déviateur associé à $\underline{\sigma}$, $J_B(\underline{\sigma}) = (\underline{s} : \underline{\underline{B}}^l : \underline{s})^{1/2}$, où les composantes de $\underline{\underline{B}}^l$ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 2F - G + 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2F + 2G - H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F + 2G + 2H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

L'isotropie transverse autour de l'axe 3 ne laisse subsister que 3 coefficients indépendants, car on a alors $F = G$, $L = M$, $N = F + 2H$. L'isotropie complète implique de plus $F = H$, $L = N$, $N = 3F$, ce qui redonne le tenseur $\underline{\underline{J}}$ signalé plus haut et l'invariant de von Mises. Si on veut de plus représenter la dissymétrie entre traction et compression, il faut avoir recours à une expression qui réintroduit une forme linéaire, telle celle du critère de Tsai :

$$f(\underline{\sigma}) = f_H(\underline{\sigma}) + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + P(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \quad (2.101)$$

De même qu'il existe une voie de généralisation pour les critères exprimés en terme d'invariants, il existe des résultats pour ceux qui sont exprimés en termes de contraintes principales. Un cas très courant en géotechnique est celui des matériaux isotropes transverses, dont le critère peut s'écrire en fonction des contraintes normales principales et de N et T , qui sont respectivement les contraintes normales et tangentielles sur une facette perpendiculaire à l'axe de schistosité (c'est-à-dire une facette parallèle au plan isotrope de schistosité), défini par le vecteur normé \underline{n} .

$$N = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad ; \quad T = \left(\|\underline{\sigma} \cdot \underline{n}\|^2 - N^2 \right)^{1/2} \quad (2.102)$$

Ainsi le critère de Coulomb pour les matériaux isotropes transverses s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = \max(K_p \max \sigma_i - \min \sigma_i - R_c, T + N \tan \phi' - C') \quad (2.103)$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}, \quad R_c = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.104)$$

où ϕ désigne l'angle de frottement dans le plan de schistosité, C la cohésion, ϕ' l'angle de frottement pour le glissement d'une lame par rapport à l'autre, C' la cohésion.

2.6. Méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations non-linéaires

On présente ici les méthodes générales de résolution de systèmes d'équations non-linéaires se mettant sous la forme :

$$\{R\}(\{U\}) = \{0\} \quad (2.105)$$

où $\{R\}$ est dépendant de $\{U\}$. On se trouve dans le cas linéaire quand $\{R\}(\{U\})$ se met sous la forme $[K] \cdot \{U\} + \{A\}$ où $[K]$ est indépendant de $\{U\}$. Il est à noter qu'une équation écrite sous la forme $\{R\}(\{U\}) = \{A\}$ peut se réécrire sous la forme générale de l'équation 2.105. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, ces méthodes de résolution seront employées à la fois lors de la résolution du problème «global» et lors de l'intégration des lois de comportement (problème «local»).

2.6.1. Méthodes de type Newton/Newton modifié

La méthode de Newton est itérative et consiste à linéariser l'équation précédente (k : numéro d'itération) :

$$\{R\}(\{U\}) = \{R\}(\{U\}_k) + \left. \frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right|_{\{U\}=\{U\}_k} \cdot (\{U\} - \{U\}_k) \quad (2.106)$$

On notera :

$$[K](\{U\}) = \frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \quad (2.107)$$

ou

$$K_{ij}(\{U\}) = \frac{\partial R_i}{\partial U_j} \quad (2.108)$$

On obtient après résolution du système linéarisé (figure 2.14a) :

$$\{U\}_{k+1} = \{U\}_k - [K]_k^{-1} \cdot \{R\}_k \quad (2.109)$$

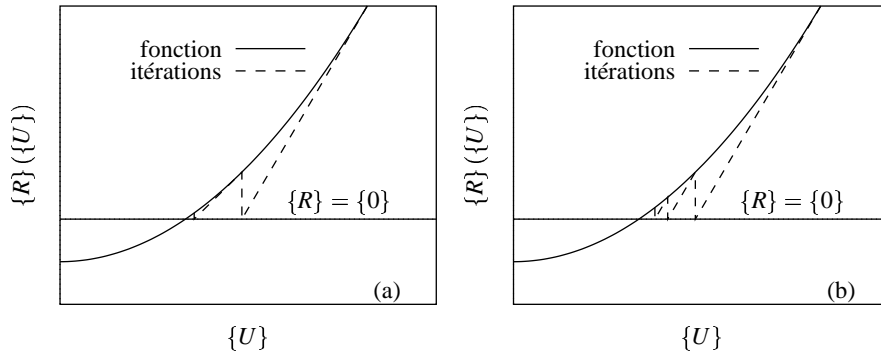


Figure 2.14. (a) Méthode de Newton, (b) Méthode de Newton modifiée.

Dans le cas de systèmes comportant un grand nombre de variables, le coût du calcul de $[K]^{-1}$ peut devenir très important devant le coût du calcul de $\{R\}(\{U\})$ et du produit $[K]^{-1} \cdot \{R\}_k$, de sorte que l'on préfère se contenter de la matrice inversée obtenue pour la première itération et de poursuivre les itérations sans recalculer cette matrice (voir figure 2.14b). Dans ce cas, la convergence est moins rapide en termes de nombre d'itérations mais peut être plus rapide en termes de temps de calcul. On a alors :

$$\{U\}_{k+1} = \{U\}_k - [K]_0^{-1} \cdot \{R\}_k \quad (2.110)$$

Il est possible d'utiliser d'autres variantes de la méthode de Newton modifiée. Ainsi, en inversant la matrice $[K]$ lors des deux premiers incréments, puis en la gardant constante, on obtient :

$$\begin{aligned} \{U\}_1 &= \{U\}_0 - [K]_0^{-1} \cdot \{R\}_0 \\ \{U\}_2 &= \{U\}_1 - [K]_1^{-1} \cdot \{R\}_1 \\ &\dots \\ \{U\}_{k+1} &= \{U\}_k - [K]_1^{-1} \cdot \{R\}_k \end{aligned} \quad (2.111)$$

Dans le cas où l'on réalise un certain nombre d'incrément pour lesquels il faut résoudre un système non-linéaire (comme dans le cas de la méthode des éléments finis) on peut garder la matrice $[K]^{-1}$ calculée au premier incrément. Il est toutefois clair que cette solution ne pourra pas s'appliquer dans le cas de contacts, de grandes transformations, etc.

2.6.2. Cas à une inconnue, ordre de convergence

Méthode du point fixe

Il s'agit ici de résoudre l'équation

$$f(x) = 0 \quad (2.112)$$

où x est un scalaire. Une première méthode consiste à transformer cette équation sous la forme

$$x = g(x) \quad (2.113)$$

dont la solution est appelée **point fixe**. On obtient la solution de manière itérative en choisissant une valeur initiale x_0 :

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (2.114)$$

Soit s la solution de $x = g(x)$. S'il existe un intervalle autour de s tel que $|g'| \leq K < 1$ alors la série x_n converge vers s . Pour prouver cette proposition, on remarque tout d'abord qu'il existe toujours t vérifiant $t \in [x, s]$ tel que (théorème des accroissements finis)

$$g(x) - g(s) = g'(t)(x - s) \quad (2.115)$$

Comme $g(s) = s$ et $x_n = g(x_{n-1})$, on obtient :

$$\begin{aligned} |x_n - s| &= |g(x_{n-1}) - g(s)| && \leq |g'(t)| |x_{n-1} - s| \\ &&& \leq K |x_{n-1} - s| \\ &&& \leq \dots \leq K^n |x_0 - s| \end{aligned} \quad (2.116)$$

Comme $K < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - s| = 0$.

Ordre d'une méthode itérative

On note ϵ_n l'erreur sur x_n

$$x_n = s + \epsilon_n \quad (2.117)$$

En réalisant un développement limité de x_{n+1} on obtient

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 \end{aligned} \quad (2.118)$$

On obtient alors

$$x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1} = g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 \quad (2.119)$$

L'ordre d'une méthode itérative donne une mesure de sa vitesse de convergence. A l'ordre 1 on obtient

$$\varepsilon_{n+1} \approx g'(s)\varepsilon_n \quad (2.120)$$

et à l'ordre 2

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2}g''(s)\varepsilon_n^2 \quad (2.121)$$

Application à la méthode de Newton

Dans le cas de la méthode de Newton, on réalise un développement limité autour de x_n pour trouver x_{n+1} :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0 \quad (2.122)$$

Soit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.123)$$

Ceci nous ramène à la méthode du point fixe avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.124)$$

On a

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad (2.125)$$

et

$$g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} - 2\frac{f(x)f''(x)^2}{f'(x)^3} + \frac{f(x)f'''(x)}{f'(x)^2} \quad (2.126)$$

On remarque que

$$g'(s) = 0 \quad (2.127)$$

La méthode de Newton est donc d'ordre 2. En outre, il existe un intervalle autour de s tel que $|g'(s)| < 1$. La méthode de Newton converge toujours pour une valeur initiale x_0 suffisamment proche de la solution.

Application à la méthode de Newton modifiée

Dans le cas de la méthode de Newton modifiée, on réécrit l'équation 2.122 sous la forme

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)K = 0 \quad (2.128)$$

où K est une constante. On a donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{K} \quad (2.129)$$

soit

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{K} \quad (2.130)$$

et

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{K} \quad (2.131)$$

Comme $g'(s) \neq 0$, cette méthode est d'ordre 1. Elle converge pour K tel que :

$$-1 < 1 - \frac{f'(s)}{K} < 1 \quad (2.132)$$

K étant une dérivée évaluée à l'itération i , soit $K = f'(x_i)$, il faut donc que K et $f'(s)$ aient même signe, et que $f'(s) < 2K$.

2.6.3. Méthode BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno)

Une alternative à la méthode de Newton [BAT 82, MAT 79, PRE 88], consiste à réactualiser l'inverse de la matrice $[K]$ afin d'obtenir une approximation sécante de la matrice de l'itération $k-1$ à l'itération k . Si on définit l'incrément de l'inconnue $\{U\}$ par :

$$\{\delta\}_k = \{U\}_k - \{U\}_{k-1} \quad (2.133)$$

et l'incrément de l'écart à la solution :

$$\{\gamma\}_k = \{R\}_k - \{R\}_{k-1} \quad (2.134)$$

la matrice actualisée $[K]_k$ doit vérifier

$$\{\gamma\}_k = [K]_k \cdot \{\delta\}_k \quad (2.135)$$

La méthode BFGS se divise en trois étapes :

1. Evaluation d'un incrément du vecteur $\{U\}$:

$$\Delta\{\bar{U}\} = -[K]_{k-1}^{-1} \cdot \{R\}_{k-1} \quad (2.136)$$

$\Delta\{\bar{U}\}$ donne la direction du véritable incrément.

2. Recherche d'une solution dans la direction $\Delta\{\bar{U}\}$ sous la forme

$$\{U\}_k = \{U\}_{k-1} + \beta \Delta\{\bar{U}\} \quad (2.137)$$

où β est un scalaire. β est calculé pour minimiser le produit scalaire

$$-\Delta\{\bar{U}\} \cdot \{R\}_k \quad (2.138)$$

On peut toutefois omettre cette étape et prendre $\beta = 1$. On peut alors calculer $\{\delta\}_k$ et $\{\gamma\}_k$.

3. Evaluation de la matrice corrigée $[K]_k^{-1}$. Dans la méthode BFGS, la matrice réactualisée se met sous la forme :

$$[K]_k^{-1} = [A]_k^T \cdot [K]_{k-1}^{-1} \cdot [A]_k \quad (2.139)$$

où $[A]$ est une matrice ayant la forme suivante :

$$[A]_k = [I] + \{v\}_k \otimes \{w\}_k \quad (2.140)$$

où $\{v\}_k$ et $\{w\}_k$ sont des vecteurs calculés à partir de quantités déjà connues :

$$\{v\}_k = - \left[\frac{\{\delta\}_k \cdot \{\gamma\}_k}{\{\delta\}_k \cdot [K]_{k-1}^{-1} \cdot \{\delta\}_k} \right]^{1/2} [K]_{k-1}^{-1} \cdot \{\delta\}_k - \{\gamma\}_k \quad (2.141)$$

$$\{w\}_k = \frac{1}{\{\delta\}_k \cdot \{\gamma\}_k} \{\delta\}_k \quad (2.142)$$

La direction $\Delta \{\bar{U}\}$ est obtenue par le produit :

$$\Delta \{\bar{U}\} = - ([I] + \{w\}_{k-1} \otimes \{v\}_{k-1}) \dots ([I] + \{w\}_1 \otimes \{v\}_1) \cdot [K]_0^{-1} \cdot ([I] + \{v\}_1 \otimes \{w\}_1) \dots ([I] + \{v\}_{k-1} \otimes \{w\}_{k-1}) \cdot \{R\}_{k-1} \quad (2.143)$$

Il n'est pas nécessaire de calculer $[K]_k^{-1}$, il suffit de multiplier $\{R\}_{k-1}$ par $[I] + \{v\}_{k-1} \otimes \{w\}_{k-1} \dots [I] + \{v\}_1 \otimes \{w\}_1$, puis le résultat par $[K]_0^{-1}$ et de faire les multiplications dans le sens inverse $[I] + \{w\}_1 \otimes \{v\}_1 \dots [I] + \{w\}_{k-1} \otimes \{v\}_{k-1}$ pour obtenir $\Delta \{\bar{U}\}$.

2.6.4. Méthode itérative. Gradient conjugué

Cette méthode [LUE 84] a été développée pour résoudre des systèmes de la forme :

$$V(\{U\}) = \frac{1}{2} \{U\} \cdot [K] \cdot \{U\} - \{U\} \cdot \{F\} \quad (2.144)$$

La dérivation de l'équation précédente donne :

$$\frac{\partial V}{\partial \{U\}} = [K] \cdot \{U\} - \{F\} = \{r\} \quad (2.145)$$

où $\{r\}$ est le résidu ou "gradient" de l'équation 2.144. La méthode utilise l'approximation suivante de la solution :

$$\begin{aligned} \{d\}_i &= \{r\}_i + \beta_i \{d\}_{i-1} \\ \{U\}_{i+1} &= \{U\}_i + \alpha_i \{d\}_i = \{U\}_i + \alpha_i \{r\}_i + \alpha_i \beta_i \{d\}_{i-1} \end{aligned} \quad (2.146)$$

où $\{d\}_i$ est la direction de recherche. On cherche α_i et β_i de sorte à minimiser $V(\{u\})$, soit :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \beta_i} = 0 \quad (2.147)$$

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial V}{\partial \{U\}_{i+1}} \cdot \frac{\partial \{U\}_{i+1}}{\partial \alpha_i} = ([K] \cdot \{U\}_{i+1} - \{F\}) \cdot \{d\}_i = \{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_i = 0 \quad (2.148)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_i} = \frac{\partial V}{\partial \{U\}_{i+1}} \cdot \frac{\partial \{U\}_{i+1}}{\partial \beta_i} = \{r\}_{i+1} \cdot (\alpha_i \{d\}_{i-1}) = \alpha_i \{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_{i-1} = 0 \quad (2.149)$$

Le problème revient alors à trouver α_i et β_i tels que

$$\{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_i = 0 \quad (2.150)$$

$$\{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_{i-1} = 0 \quad (2.151)$$

On a

$$\begin{aligned} \{r\}_{i+1} &= -\{F\} + [K] \cdot \{U\}_{i+1} \\ &= -\{F\} + [K] \cdot (\{U\}_i + \alpha_i \{r\}_i + \alpha_i \beta_i \{d\}_{i-1}) \\ &= -\{F\} + [K] \cdot \{U\}_i + \alpha_i [K] \cdot (\{r\}_i + \beta_i \{d\}_{i-1}) \\ &= \{r\}_i + \alpha_i [K] \cdot (\{r\}_i + \beta_i \{d\}_{i-1}) \\ &= \{r\}_i + \alpha_i [K] \cdot \{d\}_i \end{aligned} \quad (2.152)$$

En notant que par construction, on a $\{r\}_i \cdot \{d\}_{i-1} = 0$, on obtient

$$\{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_{i-1} = \alpha_i \{d\}_{i-1} \cdot [K] \cdot (\{r\}_i + \beta_i \{d\}_{i-1}) = 0 \quad (2.153)$$

Soit

$$\beta_i = -\frac{\{d\}_{i-1} \cdot [K] \cdot \{r\}_i}{\{d\}_{i-1} \cdot [K] \cdot \{d\}_{i-1}} \quad (2.154)$$

β_i correspond au coefficient de descente optimal. A partir de β_i , il est possible de calculer $\{d\}_i$. En utilisant la relation $\{r\}_{i+1} = \{r\}_i + \alpha_i [K] \cdot \{d\}_i$ et l'équation $\{r\}_{i+1} \cdot \{d\}_i = 0$, on obtient :

$$\alpha_i = -\frac{\{r\}_i \cdot \{d\}_i}{\{d\}_i \cdot [K] \cdot \{d\}_i} \quad (2.155)$$

Ceci correspond à une orthogonalisation, au sens du produit scalaire associé à $[K]$ du nouveau gradient par rapport à la direction précédente. Le principal avantage de la méthode du gradient conjugué est qu'il n'est pas nécessaire de calculer la matrice $[K]^{-1}$. Le plus grand volume de calcul réside dans les produits matrice-vecteur. Les autres phases du calcul ne sont que de simples produits scalaires et combinaisons linéaires de vecteurs. Dans un contexte éléments finis, il n'est pas nécessaire de stocker la matrice globale $[K]$ mais il faut alors recalculer les matrices élémentaires à chaque itération.

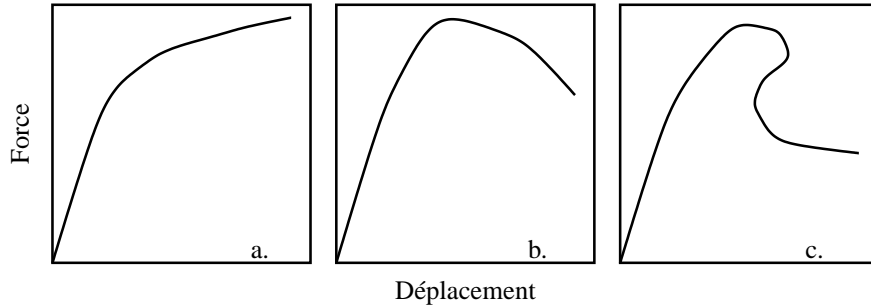


Figure 2.15. Types de réponse charge–déplacement : (a) Charge croissante. Couple U – F unique dans tous les cas. (b) Courbe charge déplacement avec charge limite. Plusieurs solutions en déplacement pour une charge donnée. (c) Courbe charge déplacement avec rebroussement en déplacement. Plusieurs solutions en charge pour un déplacement donné.

2.6.5. Méthode de Riks

Cette méthode [RIK 79], de par sa formulation, s’applique tout particulièrement au cas de la mécanique.

Pilotage du problème

Le mode de pilotage le plus naturel du problème éléments finis consiste à imposer les charges extérieures ($\{F_e\}$). Le système à résoudre est alors de la forme :

$$\{F_i\}(\{U\}) = \{F_e\} \quad (2.156)$$

Ce type de pilotage convient bien au cas où la charge est une fonction monotone du déplacement.

Dans les cas où il existe une charge limite (plasticité) ou une instabilité de structure (cloquage d’une plaque), la charge n’est plus monotone et il faut piloter à déplacement imposé. Cela revient à diminuer le nombre de degrés de liberté du système. Les réactions correspondant à ces degrés de liberté sont alors libres.

Dans les cas où il existe un rebroussement sur la courbe force–déplacement (cloquage), il convient de réaliser un pilotage mixte en déplacement et chargement. La figure 2.15 résume les trois situations.

Paramétrage de la réponse charge-déplacement

L'équation d'équilibre est écrite sous la forme

$$\lambda \{ \mathcal{F}_e \} = \{ F_i \} (\{ U \}) \quad (2.157)$$

$\{ \mathcal{F}_e \}$ est le vecteur des charges de référence et est connu. λ est le paramètre de charge. Il y a donc désormais une inconnue de plus. Le trajet $(\{ U \}, \lambda)$ peut être paramétré par la longueur d'arc s telle que

$$\lambda = \lambda(s) \quad \{ U \} = \{ U \}(s) \quad (2.158)$$

Le vecteur tangent unitaire à la courbe s'écrit :

$$\{ t \} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{m} \frac{d\{U\}}{ds} \\ \frac{1}{m} \frac{d\lambda}{ds} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{d\{U\}}{ds} \cdot \frac{d\{U\}}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda}{ds}} \quad (2.159)$$

La dérivation de l'équation d'équilibre (équation 2.157) par rapport à s donne :

$$\frac{d\lambda}{ds} \{ \mathcal{F}_e \} - [K] \cdot \frac{d\{U\}}{ds} = \{ 0 \} \quad (2.160)$$

avec $[K] = d\{F_i\}/d\{U\}$. On notera $\{U_F\}$

$$\{U_F\} = [K^{-1}] \cdot \{ \mathcal{F}_e \} \quad (2.161)$$

On a donc :

$$\frac{d\{U\}}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} \{U_F\} \quad (2.162)$$

Longueur d'arc imposée

La technique de pilotage mixte à longueur d'arc imposée consiste à réaliser des incréments dans l'espace $(\{U\}, \lambda)$ de sorte que l'incrément ait une longueur donnée Δs :

$$\Delta\{U\} \cdot \Delta\{U\} + (\Delta\lambda)^2 = (\Delta s)^2 \quad (2.163)$$

En écrivant

$$\Delta\{U\} \approx \Delta s \frac{d\{U\}}{ds} \quad (2.164)$$

$$\Delta\lambda \approx \Delta s \frac{d\lambda}{ds} \quad (2.165)$$

l'équation précédente se reformule sous la forme :

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \{U_F\} \cdot \{U_F\} + \left(\frac{d\{U\}}{ds} \right)^2 = 1 \quad (2.166)$$

On obtient donc pour la première itération :

$$\Delta\lambda^1 = \frac{\pm\Delta s}{\sqrt{1 + \{U_F\} \cdot \{U_F\}}} \quad (2.167)$$

$$\Delta\{U\}^1 = \Delta\lambda^1 \{U_F\} \quad (2.168)$$

Le signe de $\Delta\lambda^1$ est choisi de sorte à maximiser le produit scalaire

$$\Delta\lambda_p \Delta\lambda^1 + \Delta\{U\}_p \cdot \Delta\{U\}^1 \quad (2.169)$$

où $(\Delta\lambda_p, \Delta\{U\}_p)$ sont les incréments solutions du pas précédent. On suppose donc qu'il y a une certaine continuité de la direction de déplacement d'un incrément à l'autre.

Pour les itérations suivantes, on note

$$\delta\{U_R\}^i = [K]^{-1} \cdot (\lambda^i \{F_e\} - \{F_i\}^i) \quad (2.170)$$

$\delta\{U_R\}^i$ correspond à l'incrément de déplacement calculé pour un contrôle de charge simple. La solution de l'itération $i + 1$ se met sous la forme

$$\Delta\{U\}^{i+1} = \Delta\{U\}^i + \delta\{U_R\}^i + \delta\lambda \{U_F\} \quad (2.171)$$

avec la condition :

$$\Delta\{U\}^{i+1} \cdot \Delta\{U\}^{i+1} + (\Delta\lambda^{i+1})^2 = (\Delta s)^2 \quad (2.172)$$

Le terme $\delta\lambda \{U_F\}$ correspond à un changement de la charge appliquée. On a en outre

$$\Delta\lambda^{i+1} = \Delta\lambda^i + \delta\lambda \quad (2.173)$$

On obtient alors une équation quadratique en $\delta\lambda$ de la forme (en tenant compte du fait que, par construction $\Delta\{U\}^i \cdot \Delta\{U\}^i + (\Delta\lambda^i)^2 = (\Delta s)^2$) :

$$\begin{aligned} & a(\delta\lambda)^2 + b\delta\lambda + c = 0 \\ \text{avec} \quad & a = 1 + \{U_F\} \cdot \{U_F\} \\ & b = 2 \left(\{v\}^i \cdot \{U_F\} + \Delta\lambda^i \right) \\ & c = 2 \{U\}^i \cdot \delta\{U_R\}^i + \delta\{U_R\}^i \cdot \delta\{U_R\}^i \\ \text{avec} \quad & \{v\}^i = \{U\}^i + \delta\{U_R\}^i \end{aligned} \quad (2.174)$$

Il y a donc deux racines. On choisit la racine permettant de minimiser l'angle entre deux évaluations de $\Delta\{U\}$ successives. On maximise donc :

$$\cos\theta^i = \frac{\left\{ \Delta\{U\}^i, \Delta\lambda^i \right\} \cdot \left\{ \Delta\{U\}^{i+1}, \Delta\lambda^{i+1} \right\}}{(\Delta s)^2} \quad (2.175)$$

2.6.6. Convergence

La convergence de la résolution itérative peut être testée de différentes façons.

- On cherche à résoudre $\{R\} = \{0\}$. On arrête la résolution quand $\{R\}$ est devenu assez petit.

$$\|\{R\}\|_n < R_\varepsilon \quad (2.176)$$

où R_ε est la précision requise, avec :

$$\|\{R\}\|_n = \left(\sum_i R_i^n \right)^{1/n} \quad (2.177)$$

On utilise souvent la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\{R\}\|_\infty = \max_i |R_i| \quad (2.178)$$

- Dans de nombreux cas, l'équation $\{R\} = \{0\}$ peut s'écrire sous la forme $\{R\}_i - \{R\}_e = \{0\}$ où $\{R\}_e$ est imposé (chargement extérieur). On peut alors définir un écart relatif :

$$\frac{\|\{R\}_i - \{R\}_e\|}{\|\{R\}_e\|} < r_\varepsilon \quad (2.179)$$

où r_ε est la précision relative requise. En mécanique $\{R\}_i$ correspond aux forces internes et $\{R\}_e$ aux forces externes. Dans certains cas (par exemple refroidissement thermique) $\{R\}_e = \{0\}$; il est alors impossible de définir un écart relatif et on doit utiliser l'écart absolu $\|\{R\}_i - \{R\}_e\| < R_\varepsilon$.

- On peut arrêter la recherche quand la solution trouvée $\{U\}$ devient stable ; c'est-à-dire :

$$\|\{U\}_{k+1} - \{U\}_k\|_n < U_\varepsilon \quad (2.180)$$

Note : Dans certains cas les vecteurs $\{R\}$ et $\{U\}$, ne sont pas homogènes. Par exemple dans le cas de la thermo-mécanique couplée, $\{U\}$ contient des déplacements et des températures et $\{R\}$ des forces et des flux thermiques. Il faut alors normaliser par des quantités prédéterminées les différentes composantes de $\{R\}$ et $\{U\}$ avant de tester la convergence.

2.7. Méthodes numériques d'intégration des équations différentielles

2.7.1. Présentation générale

On traite dans cette partie de l'intégration numérique des équations différentielles (ED) d'ordre 1. Les ED d'ordre supérieur peuvent généralement être réécrites sous la forme d'ED d'ordre 1. Par exemple :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + q(t) \frac{dy}{dt} = r(t) \quad (2.181)$$

peut se formuler sous la forme suivante :

$$\frac{dy}{dt} = z(t) \quad (2.182)$$

$$\frac{dz}{dt} = r(t) - q(t)z(t) \quad (2.183)$$

où z est une nouvelle variable.

De façon plus générale, une ED d'ordre 1 peut se mettre sous la forme :

$$\dot{v}_i = f_i(t, v_1, \dots, v_n) \quad , \quad i = 1 \dots n \quad (2.184)$$

ou

$$\{\dot{v}\} = \{f\}(t, \{v\}) \quad (2.185)$$

où $\{v\}$ est un vecteur de taille n . Il convient de compléter ces équations par des conditions initiales exprimées sous la forme

$$\{v\}(t = t_0) = \{v\}_0 \quad (2.186)$$

Dans ce chapitre, nous considérons deux méthodes d'intégration : (a) les méthodes explicites de type Runge–Kutta [PRE 88, TOU 93], (b) les méthodes implicites de point milieu (ou θ –méthode). On cherche à intégrer sur un intervalle de temps Δt à partir du temps initial t . La méthode la plus simple reste, bien entendu, la méthode d'Euler qui est totalement explicite et très simple à formuler puisqu'elle repose uniquement sur la donnée du vecteur $\{v\}$ au temps initial t :

$$\{v\}(t + \Delta t) = \{v\}(t) + \Delta t \{\dot{v}\}(t, \{v\}) \quad (2.187)$$

Toutefois cette méthode n'est ni précise ni stable.

2.7.2. Méthode de Runge–Kutta

Méthode de base

En utilisant un développement de Taylor, on obtient :

$$\{v\}(t + \Delta t) = \{v\}(t) + \{\dot{v}\}(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.188)$$

L'intégration d'Euler donne donc une précision à l'ordre $O(\Delta t^2)$. On peut toutefois effectuer un essai sur le point milieu $(t + \Delta t/2)$. On pose

$$\{\delta v_1\} = \Delta t \{\dot{v}\}(t) \quad (2.189)$$

et

$$\begin{aligned}
 \{\delta v_2\} &= \Delta t \{\dot{v}\} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \{v\}(t) + \frac{1}{2} \{\delta v_1\} \right) \\
 &= \Delta t \left(\{\dot{v}\}(t) + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{v}\}(t) \right) \\
 &= \{\delta v_1\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{v}\}(t)
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 donne :

$$\{v\}(t + \Delta t) = \{v\}(t) + \{\dot{v}\}(t)\Delta t + \{\ddot{v}\}(t)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \tag{2.191}$$

on peut éliminer le terme en $\{\ddot{v}\}(t)$ qui est égal à $\{\delta v_2\} - \{\delta v_1\}$. On obtient donc :

$$\{v\}(t + \Delta t) = \{v\}(t) + \{\delta v_2\} + O(\Delta t^3) \tag{2.192}$$

Cette formule indique que l'on a éliminé le terme de premier ordre en Δt : on obtient donc une méthode du second ordre. On peut généraliser la procédure. Ainsi, une méthode de Runge–Kutta du quatrième ordre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \{\delta v_1\} &= \Delta t \{\dot{v}\}(t, \{v\}) \\
 \{\delta v_2\} &= \Delta t \{\dot{v}\} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \{v\} + \frac{1}{2} \{\delta v_1\} \right) \\
 \{\delta v_3\} &= \Delta t \{\dot{v}\} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \{v\} + \frac{1}{2} \{\delta v_2\} \right) \\
 \{\delta v_4\} &= \Delta t \{\dot{v}\}(t + \Delta t, \{v\} + \{\delta v_3\}) \\
 \{v\}(t + \Delta t) &= \{v\}(t) + \frac{1}{6} \{\delta v_1\} + \frac{1}{3} \{\delta v_2\} + \frac{1}{3} \{\delta v_3\} + \frac{1}{6} \{\delta v_4\} + O(\Delta t^5)
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

Cette méthode demande donc 4 évaluations de la fonction $\{\dot{v}\}$ alors que la méthode du second ordre n'en demande que 2. Elle sera donc plus efficace si elle permet un pas de temps deux fois plus grand pour une même précision. Toutefois ordre élevé ne signifie pas toujours précision élevée. C'est pourquoi il convient d'employer une méthode à pas de temps adaptatif.

Méthode à pas de temps adaptatifs

Le but d'une telle méthode est d'obtenir une précision prédéterminée tout en minimisant le temps calcul. Il s'agit alors de réaliser de grands pas de temps là où la fonction $\{\dot{v}\}$ varie peu et de raffiner la discrétisation lorsque $\{\dot{v}\}$ varie rapidement.

Soit Δt l'incrément de temps à réaliser. Celui-ci se divise en n incréments δt de sorte que : $\Delta t = \sum_k \delta t_k$. Dans le cas de la méthode d'ordre 4, la technique consiste à

réaliser un pas de temps δt et 2 pas de temps correspondant à $\delta t/2$. On a ainsi besoin de 11 évaluations de $\{v\}$ (les deux intégrations partagent le même point de départ) qu'il faut comparer aux 8 évaluations nécessaires à l'intégration en 2 fois $\delta t/2$ (car on obtient la même précision). Le surcoût vaut donc $11/8 = 1.375$. Soit $\{v\}(t + \delta t)$ la solution exacte, on a donc :

$$\{v\}(t + \delta t) = \{v_1\} + (\delta t)^5 \{\phi\} + O(\delta t^6) \quad (2.194)$$

$$\{v\}(t + \delta t) = \{v_2\} + 2(\delta t/2)^5 \{\phi\} + O(\delta t^6) \quad (2.195)$$

où $\{v_1\}$ est le résultat obtenu avec un pas de temps δt et $\{v_2\}$ le résultat obtenu avec deux pas de temps $\delta t/2$. A l'ordre 5, ϕ reste constant sur l'incrément. Le développement à l'ordre 5 en séries de Taylor, indique que : $\{\phi\} \simeq \frac{1}{5!} \{v^{(5)}\}$. La différence entre les deux estimations est un indicateur de l'erreur commise :

$$\{E\} = \{v_2\} - \{v_1\} \quad (2.196)$$

C'est cette différence qu'il convient de garder plus petite qu'une précision donnée en ajustant δt . En ignorant les termes en $(\delta t)^6$, on peut résoudre les équations 2.194 et 2.195. On obtient :

$$\{v\}(t + \delta t) = \{v_2\} + \frac{1}{15} \{E\} + O(\delta t^6) \quad (2.197)$$

On obtient alors une estimation à l'ordre 5. Toutefois on ne contrôle toujours pas l'erreur d'intégration. On peut utiliser $\{E\}$ pour modifier le pas de temps. Soit $\{E^0\}$ la précision désirée. La précision est ici un vecteur. Si $E_i < E_i^0, \forall i$ alors on pourra augmenter le pas de temps suivant, si $\exists i, E_i > E_i^0$, il faut diminuer le pas de temps actuel. Dans les deux cas, le facteur correctif α est donné par :

$$\alpha = \frac{\delta t_{i+1}}{\delta t_i} = \min_i \left| \frac{E_i^0}{E_i} \right|^{1/5} \quad (2.198)$$

car l'erreur est en δt^5 pour la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4. On prend, bien entendu, le facteur le plus pénalisant. Reste à choisir $\{E^0\}$. On peut choisir une fraction de la valeur de $\{v\}$

$$E_i^0 = \varepsilon |v_i| \quad (2.199)$$

pour passer les points où v_i est proche de 0 on peut utiliser l'astuce suivante :

$$E_i^0 = \varepsilon \left(|v_i| + \delta t \left| \frac{dv_i}{dt} \right| \right) \quad (2.200)$$

La précision $\{E^0\}$ doit être obtenue sur l'incrément total Δt et non sur les incréments locaux δt_k . Il convient donc d'employer une précision d'autant plus petite que δt est petit par rapport à Δt . Dans ce cas, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$E_i^0 = \varepsilon \delta t \left| \frac{dv_i}{dt} \right| \quad (2.201)$$

La précision locale dépend alors de δt , et l'exposant de la formule 2.198 n'est plus exact : au lieu de $(1/5)$ il faut utiliser $(1/4)$.

En tenant compte du fait que ces deux exposants diffèrent assez peu et que les estimations de l'erreur ne sont pas exactes, on utilise, de façon pragmatique, la formule suivante pour actualiser le pas de temps local :

$$\alpha = \begin{cases} S \min_i \left| \frac{E_i^0}{E_i} \right|^{1/5} & \text{si } \delta t \text{ augmente} \\ S \min_i \left| \frac{E_i^0}{E_i} \right|^{1/4} & \text{si } \delta t \text{ diminue} \end{cases} \quad (2.202)$$

où S est un facteur de sécurité légèrement inférieur à 1.

2.7.3. θ -méthodes

Les θ -méthodes sont des méthodes implicites. Il existe deux formulations possibles. Soit $\{\Delta v\}$ l'incrément du vecteur $\{v\}$ sur le pas de temps Δt ; on peut évaluer $\{\Delta v\}$ de deux façons différentes (avec $0 \leq \theta \leq 1$) :

$$\{\Delta v\} = \begin{cases} \Delta t \{\dot{v}\}(t + \theta \Delta t) & \text{type 1} \\ \Delta t ((1 - \theta) \{\dot{v}\}(t) + \theta \{\dot{v}\}(t + \Delta t)) & \text{type 2} \end{cases} \quad (2.203)$$

Pour $\theta = 0$ on retrouve le schéma explicite d'Euler. Si $\theta \neq 0$ les équations précédentes doivent être résolues afin de trouver Δv qui les satisfait.

Méthode type 1 (point milieu généralisé)

Pour trouver $\{\Delta v\}$ il suffit de résoudre le système non linéaire d'équations suivant :

$$\{R\} = \{\Delta v\} - \Delta t \{\dot{v}\}(t + \theta \Delta t) = \{0\} \quad (2.204)$$

On utilise alors une méthode de Newton pour laquelle il faut évaluer le jacobien $[J]$ de l'équation précédente :

$$[J] = \frac{\partial \{R\}}{\partial \{\Delta v\}} = [1] - \Delta t \left. \frac{\partial \{\dot{v}\}}{\partial \{\Delta v\}} \right|_{t+\theta \Delta t} \quad (2.205)$$

Méthode type 2 (trapèze généralisé)

Pour trouver Δv il suffit de résoudre le système non linéaire d'équations suivant :

$$\{R\} = \{\Delta v\} - \Delta t ((1 - \theta) \{\dot{v}\}(t) + \theta \{\dot{v}\}(t + \Delta t)) = \{0\} \quad (2.206)$$

Comme précédemment, on utilise une méthode de Newton pour laquelle il faut évaluer le jacobien :

$$[J] = \frac{\partial \{R\}}{\partial \{\Delta v\}} = [1] - \Delta t \theta \left. \frac{\partial \{\dot{v}\}}{\partial \Delta v} \right|_{t+\Delta t} \quad (2.207)$$

2.7.4. Remarques

Quelle méthode d'intégration ?

Les θ -méthodes nécessitent le calcul du jacobien qui n'est pas toujours réalisable. Dans ce cas, on doit alors utiliser les méthodes de type Runge-Kutta. Le calcul de $[J]$ peut être assez lourd mais on peut toutefois utiliser une approximation : la convergence vers la solution est alors moins rapide.

Calcul de la matrice tangente avec une θ -méthode

Dans le cas des comportements mécaniques en petites déformations où on suppose la séparation additive des déformations, soit,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p + \underline{\varepsilon}_{th} \quad (2.208)$$

la θ -méthode permet également, après convergence, de calculer la matrice tangente du comportement. On peut réécrire le système d'équations à résoudre sous la forme :

$$\{R\} = \{R_0\} \quad (2.209)$$

avec

$$\{R\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\varepsilon}_e + \Delta \underline{\varepsilon}_p \\ \Delta v_i - \Delta t \dot{v}_i \end{array} \right\} \quad (2.210)$$

et

$$\{R_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \underline{\varepsilon}_{th} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.211)$$

$\{R_0\}$ est imposé. On peut alors faire une variation infinitésimale sur $\{R_0\}$

$$\{\delta R_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \Delta \underline{\varepsilon} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.212)$$

et on a alors

$$\{\delta R\} = [J] \cdot \{\delta v\} = \{\delta R_0\} \quad (2.213)$$

soit

$$\{\delta v\} = [J]^{-1} \cdot \{\delta R_0\} \quad (2.214)$$

On obtient donc

$$\delta\Delta\xi_e = \underset{\sim}{J}_e^* : \delta\Delta\xi \quad (2.215)$$

où $\left[\underset{\sim}{J}_e^* \right]$ est la partie de $[J]^{-1}$ correspondant à la partie supérieure gauche :

$$[J]^{-1} = [J^*] = \begin{bmatrix} \left[\underset{\sim}{J}_e^* \right] & [J_{12}^*] \\ [J_{21}^*] & [J_{22}^*] \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

Comme $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\Lambda} : \underset{\sim}{\xi}_e$ on obtient :

$$\delta\Delta\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\Lambda} : \delta\Delta\xi_e \quad (2.217)$$

L'opérateur tangent du comportement vaut donc :

$$\underset{\sim}{L}_c = \underset{\sim}{\Lambda} : \underset{\sim}{J}_e^* \quad (2.218)$$

Il est important de noter qu'on obtiendra à partir de $\underset{\sim}{L}_c$ une «matrice tangente cohérente» [SIM 85a] (*i.e.* cohérente avec le schéma d'intégration), évaluée à partir de la forme incrémentale du système différentiel. La forme obtenue est différente de celle qui proviendrait de la formulation en vitesse, ainsi qu'on le verra plus loin.

Calcul de la matrice tangente avec une intégration de type Runge–Kutta

Dans le cadre de l'utilisation de la méthode de Runge–Kutta, il n'est pas possible d'obtenir directement la matrice tangente du comportement. On peut toutefois calculer celle-ci par perturbation de la solution. Soit $\Delta\xi$ l'incrément de déformation donnant l'incrément de contrainte $\Delta\underset{\sim}{\sigma}$. La matrice tangente est calculée en réalisant des perturbations sur $\Delta\xi$. En utilisant les notations de Voigt, on obtient

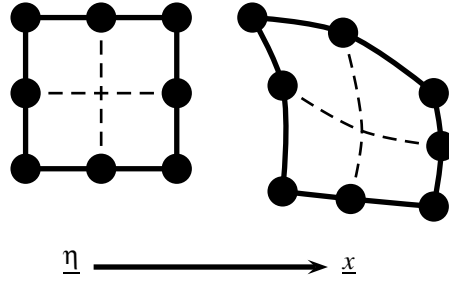
$$L_{c\ ij} = \frac{\sigma_i(\{\Delta\xi\} + \delta\varepsilon_j \{b^j\}) - \sigma_i(\{\Delta\xi\})}{\delta\varepsilon_j} \quad (2.219)$$

où $\{b^j\}$ est le vecteur tel que :

$$b_i^j = \delta_{ij} \quad (2.220)$$

2.8. Éléments finis

L'objet de cette partie est de rappeler certaines notions de la méthode des éléments finis. L'accent sera mis en particulier sur la place des comportements matériaux dans le cadre de cette méthode. Pour une présentation plus complète, on se reportera aux ouvrages de référence [BAT 82, HUG 87, BAT 91, ZIE 00].

Figure 2.16. *Discretisation spatiale* (• = nœud).

2.8.1. Discretisation spatiale

L'espace est discrétisé par des ensembles de nœuds, arêtes, faces (3D) et éléments. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées dans l'espace réel $\underline{x} = (x, y, z)$ et par ses coordonnées dans l'espace de référence de l'élément auquel il appartient $\underline{\eta} = (\eta, \zeta, \xi)$ (figure 2.16). Les coordonnées des nœuds de l'élément sont données par $\underline{x}^i, i = 1 \dots n$. Les coordonnées \underline{x} sont reliées aux coordonnées $\underline{\eta}$ par la relation suivante (somme de 1 à n sur i) :

$$\underline{x} = N^i(\underline{\eta}) \underline{x}^i \quad (2.221)$$

où N^i sont des fonctions de forme vérifiant :

$$N^i(\underline{\eta}_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_i N^i(\underline{\eta}) = 1, \forall \underline{\eta} \quad (2.222)$$

On trouvera dans les ouvrages de référence les expressions des fonctions de forme des différents éléments.

On définit en outre la matrice jacobienne de la transformation de l'espace de référence vers l'espace réel $\underline{\eta} \rightarrow \underline{x}$

$$\underline{J} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\eta}} \quad (2.223)$$

Soit :

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} = \frac{\partial (N^k x_i^k)}{\partial \eta_j} = x_i^k \frac{\partial N^k}{\partial \eta_j} \quad (2.224)$$

Le jacobien vaut :

$$J = \det(\underline{J}) \quad (2.225)$$

2.8.2. Méthodes d'intégration discrètes

Pour réaliser des intégrations spatiales (volume, surfaces, lignes), on utilise généralement la méthode de Gauss qui consiste à remplacer une intégration continue par

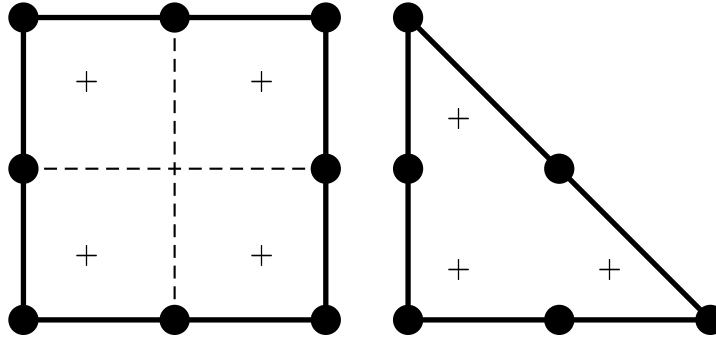


Figure 2.17. Points de Gauss dans l'élément de référence : élément carré à 8 nœuds, élément triangle à 6 nœuds. (• = nœud, + = point de Gauss).

une somme discrète sous la forme (exprimée ici en unidimensionnel) :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w^i f(x^i) \quad (2.226)$$

où les x^i sont des positions prédéfinies d'évaluation de la fonction f (points de Gauss) et les w^i des poids associés à chacun de ces points. Une intégration discrète à n points de Gauss permet d'évaluer exactement un polynôme d'ordre $2n - 1$. Dans le cas des polynômes d'ordre supérieur ou de fonctions non polynomiales, l'intégration de Gauss fournit une approximation de la véritable intégrale. La méthode est ensuite facilement étendue aux cas 2D et 3D dans le cas des éléments de référence carrés (2D) ou briques (3D) pour lesquels les positions et les poids des points de Gauss peuvent être calculés à partir du cas 1D. Dans le cas des éléments triangles (2D) et tétraèdres (3D), les positions et les poids doivent être calculés spécifiquement.

Une intégrale effectuée sur le volume d'un élément fini V_e peut se transformer de la façon suivante afin de réaliser l'intégration sur l'élément de référence V_r :

$$\int_{V_e} f(\underline{x}) dx = \int_{V_r} f(\underline{\eta}) J d\eta = f(\underline{\eta}^i) (J w^i) \quad (2.227)$$

où $\underline{\eta}^i$ représente la position des différents points de Gauss dans l'espace de référence (figure 2.17). On appellera v^i le volume du point de Gauss i , avec :

$$v^i = J w^i \quad (2.228)$$

2.8.3. Discrétisation des champs d'inconnues

Les champs d'inconnues (déplacement, température, pression, etc.) doivent également être discrétisés afin de permettre la résolution du problème. Ces champs peuvent être définis :

aux nœuds : déplacement, pression, température

par élément : pression dans le cas du traitement de l'incompressibilité, traitement des contraintes planes.

par ensemble d'éléments : éléments périodiques utilisés dans le cadre de l'homogénéisation, éléments plans incluant des effets de torsion/flexion dans la troisième direction.

En général, on utilise des champs définis aux nœuds. Ceux-ci sont interpolés en utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément. Ils sont alors continus. Dans le cas d'un champ de déplacement, on a :

$$\underline{u}(\underline{\eta}) = N^k(\underline{\eta})\underline{u}^k \quad \text{ou} \quad u_i(\underline{\eta}) = N^k(\underline{\eta})u_i^k \quad (2.229)$$

où \underline{u}^k est le déplacement du nœud k . De la même façon, en thermique on aura (T : température) :

$$T(\underline{\eta}) = N^i(\underline{\eta})T^i \quad (2.230)$$

Les gradients peuvent alors être simplement calculés :

$$(\underline{\text{grad}}\underline{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} = u_i^n \frac{\partial N^n}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \quad (2.231)$$

$$(\underline{\text{grad}}T)_i = \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = T^n \frac{\partial N^n}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \quad (2.232)$$

En écrivant les tenseurs d'ordre 2 sous forme de vecteurs (notations de type Voigt), on peut alors réécrire les formules précédentes sous la forme de produits matrice-vecteur :

$$\{\underline{\text{grad}}\underline{u}\} = [B] \cdot \{u^e\} \quad (2.233)$$

$$\underline{\text{grad}}T = [A] \cdot \{T^e\} \quad (2.234)$$

où $\{u^e\}$ et $\{T^e\}$ représentent les vecteurs des variables relatives à l'élément considéré :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix} \quad \{T^e\} = \begin{Bmatrix} T^1 \\ \vdots \\ T^n \end{Bmatrix} \quad (2.235)$$

Le traitement de l'incompressibilité (??), des contraintes planes (??) et des conditions de périodicité (??) fourniront des exemples de champs d'inconnues définis par élément ou par groupe d'éléments.

Eléments isoparamétriques : on appelle éléments isoparamétriques les éléments pour lesquels les inconnues et les coordonnées sont interpolées de la même manière : fonctions d'interpolation et fonctions de forme sont donc identiques.

2.8.4. Application à la mécanique

Écriture de l'équilibre

Le champ de déplacement discrétisé à rechercher par la méthode des éléments finis vérifie les conditions limites en déplacement : il est donc cinématiquement admissible. Toutefois le champ de contraintes associé au champ de déplacement n'est pas nécessairement statiquement admissible. Le problème revient donc à trouver le champ de déplacement permettant de satisfaire le PPV : le champ de contrainte associé sera alors statiquement admissible.

Principe de minimum de Greenberg

On suppose ici que le comportement du matériau peut se mettre sous la forme (cas de l'élasticité et de la plasticité) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\xi}} \quad (2.236)$$

Si $\underline{\underline{u}}'$ est un champ cinématiquement admissible, on lui associe un champ de déformation $\underline{\underline{\xi}}'$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\xi}}'$. En général le champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ n'est pas statiquement admissible. On montre que le champ solution $\underline{\underline{u}}$ minimise la fonctionnelle $\mathcal{B}(\underline{\underline{u}})$ définie par :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\xi}}' d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}} d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{S_f^i} \dot{T}_i^d \dot{u}_i' dS \quad (2.237)$$

En effet, il suffit de calculer la différence $\mathcal{B}(\underline{\underline{u}}') - \mathcal{B}(\underline{\underline{u}})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\underline{\underline{u}}') - \mathcal{B}(\underline{\underline{u}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\xi}}' - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot (\underline{\underline{u}}' - \underline{\underline{u}}) d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{S_f^i} \dot{T}_i^d (\dot{u}_i' - \dot{u}_i) dS \end{aligned} \quad (2.238)$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ étant solution il est CSA. Par ailleurs, $\underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{\xi}}'$ sont CCA. En appliquant le PPV, on a donc :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\xi}}' - \underline{\underline{\xi}}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot (\underline{\underline{u}}' - \underline{\underline{u}}) d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{S_f^i} \dot{T}_i^d (\dot{u}_i' - \dot{u}_i) dS \quad (2.239)$$

d'où :

$$\mathcal{B}(\underline{\underline{u}}') - \mathcal{B}(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\xi}}' + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} - 2\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}') dV \quad (2.240)$$

On remplace alors $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}'$ en utilisant la loi de comportement (eq. 2.236) : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{L}}' : \underline{\underline{\xi}}'$. Si les tenseurs $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{L}}'$ sont tous les deux élastiques, ou bien tous les deux

élastoplastiques, l'expression se met sous une forme simple, qui est bien positive, pourvu que les tenseurs en question soient définis positifs :

$$\mathcal{B}(\underline{\dot{u}}') - \mathcal{B}(\underline{\dot{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\dot{\epsilon}}' - \underline{\dot{\epsilon}}) : \underline{\underline{L}} : (\underline{\dot{\epsilon}}' - \underline{\dot{\epsilon}}) dV \quad (2.241)$$

La positivité est encore vérifiée si l'un des deux tenseurs est élastique et le second élastoplastique. Ceci démontre que le champ solution \underline{u} minimise la fonctionnelle \mathcal{B} et est unique. Dans le cas où le tenseur élastoplastique n'est pas défini positif, la proposition n'est plus exacte.

2.8.5. Discrétisation éléments finis du principe de Greenberg.

On introduit ici la matrice $[B]$ permettant de calculer la vitesse de déformation à partir des déplacement nodaux (cf. 2.8.3) :

$$\{\underline{\dot{\epsilon}}\} = [B] \cdot \{\dot{u}^e\} \quad (2.242)$$

On a alors $\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\dot{\epsilon}}$ ou $\{\underline{\dot{\sigma}}\} = [\underline{\underline{L}}] \cdot [B] \cdot \{\dot{u}^e\}$. La fonctionnelle \mathcal{B} est alors calculée élément par élément :

$$\mathcal{B} = \sum_e \mathcal{B}^e \quad (2.243)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^e(\underline{\dot{u}}) &= \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\dot{u}^e\} \cdot [B]^T \cdot [\underline{\underline{L}}] \cdot [B] \cdot \{\dot{u}^e\} dV \\ &\quad - \int_{V^e} \underline{\underline{f}} \cdot ([N] \cdot \{\dot{u}^e\}) dV - \sum_{i=1}^3 \int_{S_f^{e,i}} \underline{\underline{T}}_i^d (\{N\} \cdot \{\dot{u}_i^e\}) dS \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\} \cdot \left(\int_{V^e} [B]^T \cdot [\underline{\underline{L}}] \cdot [B] dV \right) \cdot \{\dot{u}^e\} \\ &\quad - \left(\int_{V^e} [N]^T \cdot \underline{\underline{f}} dV \right) \cdot \{\dot{u}^e\} - \sum_{i=1}^3 \left(\int_{S_f^{e,i}} \underline{\underline{T}}_i^d \{N\} dS \right) \cdot \{\dot{u}_i^e\} \end{aligned} \quad (2.244)$$

où $[N]$ est la matrice des fonctions de forme donnée par :

$$[N] = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & \dots & N^n & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & \dots & 0 & N^n & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & \dots & 0 & 0 & N^n \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

$\{N\}$ est le vecteur des fonctions de forme :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N^1 \\ \vdots \\ N^n \end{Bmatrix} \quad (2.246)$$

et $\{u_i^e\}$ le vecteur formé des composantes i des déplacements nodaux de l'élément :

$$\{u_i^e\} = \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{Bmatrix} \quad (2.247)$$

Chaque élément contribue aux forces extérieures $\{F_e^e\}$, internes $\{F_i^e\}$ et à la rigidité $[K^e]$:

$$\{\dot{F}_e^e\} = \left(\int_{V_e} [N]^T \cdot \dot{f} dV \right) + \sum_{i=1}^3 \left(\int_{S_f^{e,i}} \dot{T}_i^d \{N\} dS \right) \quad (2.248)$$

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot [\underline{L}] \cdot [B] dV \quad (2.249)$$

et

$$\{\dot{F}_i^e\} = [K^e] \cdot \{\dot{u}^e\} = \int_{V_e} [B]^T \cdot [\underline{L}] \cdot [B] \cdot \{\dot{u}^e\} dV = \int_{V_e} [B]^T \cdot \{\dot{\mathcal{G}}\} \quad (2.250)$$

Le vecteur global des forces externes, internes ainsi que la matrice de rigidité sont ensuite obtenus par assemblage [HUG 87] :

$$\{\dot{F}_i\} = \mathcal{A} \{\dot{F}_i^e\} \quad (2.251)$$

$$\{\dot{F}_e\} = \mathcal{A} \{\dot{F}_e^e\} \quad (2.252)$$

$$[K] = \mathcal{A} [K^e] \quad (2.253)$$

où \mathcal{A} représente l'opération d'assemblage. On cherche à minimiser $\mathcal{B}(\underline{\dot{u}})$, c'est-à-dire à trouver $\{\dot{u}\}$ tel que :

$$\frac{d\mathcal{B}}{d\{\dot{u}\}} = \{0\} \quad (2.254)$$

où $\{\dot{u}\}$ est le vecteur regroupant toutes les inconnues. Le système à résoudre peut se reformuler sous la forme suivante :

$$[K] \cdot \{\dot{u}\} = \{\dot{F}_e\} \quad (2.255)$$

On appellera $\{F_e\}$ les vecteurs des forces extérieures correspondant aux charges appliquées sur la structure, $\{F_i\}$ le vecteur des forces intérieures et $[K]$ la matrice de rigidité globale. Le problème a été jusqu'alors posé en vitesse mais il sera résolu de façon incrémentale :

$$\{\Delta F_i\} = [K_e] \cdot \{\Delta u\} = \{\Delta F_e\} \quad (2.256)$$

dans l'hypothèse des petites perturbations. Le cas des petites perturbations correspond au cas où les déplacements sont faibles devant les dimensions (L) des pièces $u \ll L$ (petits déplacements) et où les déformations sont faibles $\varepsilon \ll 1$. Le passage de la formulation en vitesse à la formulation incrémentale est la base du traitement par éléments finis du cas des petites perturbations. Les non-linéarités éventuelles dans la résolution du problème proviennent uniquement des non-linéarités du comportement du matériau.

On remarque que les forces intérieures peuvent également se calculer de la manière suivante :

$$\{F_i^e\} = \int_{V_e} [B]^T \cdot \{\sigma\} dV \quad (2.257)$$

Les quantités $\{F_i\}$, $\{F_e\}$ et $[K]$ sont calculées élément par élément puis assemblées. Les forces internes d'un élément sont calculées par intégration de Gauss de la façon suivante :

$$\{F_i^e\} = \int_{V_e} [B]^T \cdot \{\sigma\} dV = \sum_g [B_g]^T \cdot \{\sigma_g\} (J_g w_g) \quad (2.258)$$

La matrice de rigidité élémentaire est évaluée de la façon suivante :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T \cdot \left[\frac{L}{\tilde{z}} \right] \cdot [B] dV = \sum_g [B_g]^T \cdot \left[\frac{L}{\tilde{z}} \right] \cdot [B_g] (J_g w_g) \quad (2.259)$$

Une fois assemblés, les vecteurs $\{F_i\}$ et $\{F_e\}$ sont des vecteurs de taille n_d où n_d est le nombre de degrés de liberté du problème. $[K]$ est une matrice de taille $n_d \times n_d$. $\{F_i\}_k$ est la réaction associée au degré de liberté k .

2.8.6. Une autre présentation de la discrétisation éléments finis

On peut obtenir le principe de la discrétisation éléments finis en partant du PPV. La discrétisation de la puissance des forces extérieures aboutit naturellement à l'équation 2.248 pour chaque élément. Le champ de déplacement discrétisé vérifie les conditions limites en déplacement : il est donc cinématiquement admissible. Toutefois le champ de contraintes associé au champ de déplacement n'est pas nécessairement statiquement admissible. Le problème revient donc à trouver le champ de déplacement \underline{u} (discrétisé par $\{u\}$) permettant de satisfaire le PPV : le champ de contrainte associé sera alors statiquement admissible. Pour tout champ virtuel $\underline{\dot{u}}$, discrétisé par $\{\dot{u}\}$, la puissance des efforts intérieurs est donnée par :

$$\begin{aligned} w_i &= \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \dot{\underline{u}} dV \\ &= \sum_e \int_{V_e} \{\underline{\sigma}(\{u^e\})\} \cdot [B] \cdot \{\dot{u}^e\} dV \\ &= \sum_e \left(\int_{V_e} [B]^T \cdot \{\underline{\sigma}(\{u^e\})\} dV \right) \cdot \{\dot{u}^e\} \\ &\equiv \{F_i(\{u\})\} \cdot \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (2.260)$$

A chaque degré de liberté est associée une réaction interne. L'ensemble de celles-ci sont regroupées dans le vecteur $\{F_i(\{u\})\}$ dont l'équation précédente fournit une définition. Celle-ci doit être vérifiée pour tout champ $\{\dot{u}\}$ CCA. Il en découle que $\{F_i\}$ est égal à :

$$\{F_i\} = \mathcal{A}(\{F_i^e\}) \quad \text{avec} \quad \{F_i^e\} = \int_{V_e} [B]^T \cdot \{\underline{\sigma}(\{u^e\})\} dV \quad (2.261)$$

Le problème à résoudre par rapport à $\{u\}$ est donc :

$$\{F_i(\{u\})\} = \{F_e\} \quad (2.262)$$

Il s'agit d'un système non-linéaire que l'on peut résoudre par la méthode de Newton. Il convient alors de calculer la matrice jacobienne :

$$[K] = \frac{\partial \{F_i(\{u\})\}}{\partial \{u\}} = \mathcal{A} \frac{\partial \{F_i^e(\{u^e\})\}}{\partial \{u^e\}} \equiv \mathcal{A}[K^e] \quad (2.263)$$

Reste donc à calculer $[K^e]$:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \frac{\partial \{F_i^e(\{u^e\})\}}{\partial \{u^e\}} \\ &= \int_{V_e} [B]^T \cdot \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\epsilon\}} \cdot \frac{\partial \{\epsilon\}}{\partial \{u^e\}} = \int_{V_e} [B]^T \cdot [\underline{L}_c] \cdot [B] dV \end{aligned} \quad (2.264)$$

On retrouve, bien entendu, le même résultat qu'en 2.249. Il apparaît toutefois très clairement que la matrice de rigidité $[K]$ n'est utilisée que pour la résolution itérative de l'équation 2.262. On peut donc en utiliser une approximation, soit en donnant une approximation de \underline{L}_c , soit en employant la méthode BFGS pour résoudre 2.262.

Note : Le membre de droite de l'équation 2.262 (i.e. $\{F_e\}$) peut dans certains cas dépendre de $\{u\}$. Il convient alors d'apporter des termes correctifs à la matrice $[K]$.

2.8.7. L'assemblage par l'exemple

Afin de mieux comprendre l'opération d'assemblage, considérons un exemple simple. La figure 2.18 représente un maillage contenant 3 éléments linéaires A, B, C et 7 nœuds 1...7. Il s'agit d'un problème mécanique plan ; il y a donc 14 degrés de libertés (7×2) correspondants aux déplacements aux nœuds. Dans chaque élément, les nœuds ont une numérotation locale indiquée en *italique*. Le vecteur $\{u\}$ des inconnues est donc :

$$\{u\} = \left\{ u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, u_x^3, u_y^3, u_x^4, u_y^4, u_x^5, u_y^5, u_x^6, u_y^6, u_x^7, u_y^7 \right\} \quad (2.265)$$

Pour l'élément A, le vecteur des inconnues locales $\{u^A\}$ vaut :

$$\{u^A\} = \{u_x^{A1}, u_y^{A1}, u_x^{A2}, u_y^{A2}, u_x^{A3}, u_y^{A3}\} = \{u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, u_x^4, u_y^4\} \quad (2.266)$$

Le vecteur des forces internes associé à l'élément A vaut :

$$\{F_i^A\} = \{F_x^{A1}, F_y^{A1}, F_x^{A2}, F_y^{A2}, F_x^{A3}, F_y^{A3}\} \quad (2.267)$$

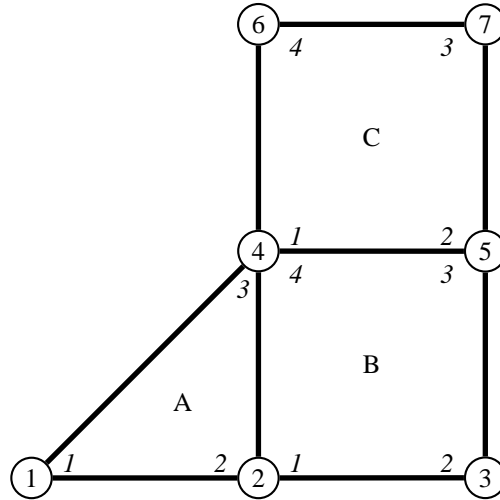


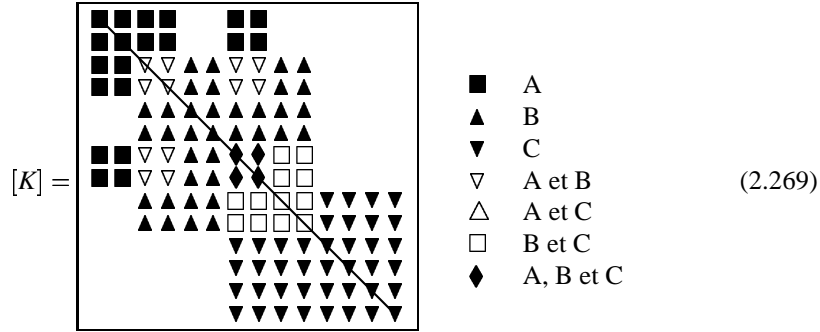
Figure 2.18. Exemple de maillage (mailles : A,B et C) montrant la numérotation globale des nœuds et la numérotation locale (en italique).

La matrice de rigidité élémentaire $[K^A]$ est une matrice pleine de taille 6×6 . L'assemblage des vecteurs $\{F_i^A\}$, $\{F_i^B\}$ et $\{F_i^C\}$ donne le vecteur $\{F_i\}$ tel que :

$$\{F_i\} = \left\{ \begin{array}{l} F_x^1 = F_x^{A1} \\ F_y^1 = F_y^{A1} \\ F_x^2 = F_x^{A2} + F_x^{B1} \\ F_y^2 = F_y^{A2} + F_y^{B1} \\ F_x^3 = F_x^{B2} \\ F_y^3 = F_y^{B2} \\ F_x^4 = F_x^{A3} + F_x^{B4} + F_x^{C1} \\ F_y^4 = F_y^{A3} + F_y^{B4} + F_y^{C1} \\ F_x^5 = F_x^{B3} + F_x^{C2} \\ F_y^5 = F_y^{B3} + F_y^{C2} \\ F_x^6 = F_x^{C4} \\ F_y^6 = F_y^{C4} \\ F_x^7 = F_x^{C3} \\ F_y^7 = F_y^{C3} \end{array} \right. \quad (2.268)$$

L'assemblage des matrices élémentaires $[K^A]$, $[K^B]$ et $[K^C]$ donne une matrice dont les termes non nuls correspondent à des couples de colonnes et de lignes dont les numéros représentent des nœuds figurant dans le même élément, ou des nœuds qui

ont été connectés par l'utilisateur :



Les différents symboles $\blacksquare, \blacktriangle, \blacktriangledown, \nabla, \triangle, \square, \blacklozenge$ indiquent que les termes correspondants de la matrice $[K]$ sont la somme de termes provenant des différentes matrices élémentaires. Par exemple :

$$K_{10,7}^T = K_{6,7}^B + K_{4,1}^C \quad (2.270)$$

2.8.8. Principe de la résolution

En pratique il n'est pas possible, même dans le cas d'un chargement monotone, de résoudre 2.262 pour un chargement quelconque. Du fait des non-linéarités, le processus itératif de recherche de la solution ne converge pas. On effectue donc un chargement progressif en un certain nombre d'incrémentes. A l'instant t , la solution $\{u\}_t$ est connue. On applique alors un incrément Δt , et on cherche de façon itérative l'incrément de solution $\Delta\{u\}$ correspondant. L'algorithme est schématisé par la figure 2.19.

Note : Pour chaque incrément, on cherche l'incrément $\Delta\{u\}$ de manière itérative. Celui-ci est généralement initialisé avec $\Delta\{u\} = \{0\}$. On peut toutefois (en particulier dans le cas d'un chargement monotone) initialiser $\Delta\{u\}$ pour l'incrément $j > 1$ à partir de la solution de l'incrément $j - 1$:

$$\Delta\{u\}_{\text{initial}}^{\text{incrément } j} = \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \Delta\{u\}_{\text{solution}}^{\text{incrément } j-1} \quad (2.271)$$

2.8.9. Le comportement dans la méthode des éléments finis

Le comportement mécanique dans la méthode des éléments finis doit donc pour un incrément de déformation $\Delta\tilde{\varepsilon}$ donner l'incrément de contrainte correspondant $\Delta\tilde{\sigma}$ ainsi que la matrice tangente cohérente du comportement

$$\tilde{\underline{L}}_c = \frac{\partial \Delta\tilde{\sigma}}{\partial \Delta\tilde{\varepsilon}} \quad (2.272)$$

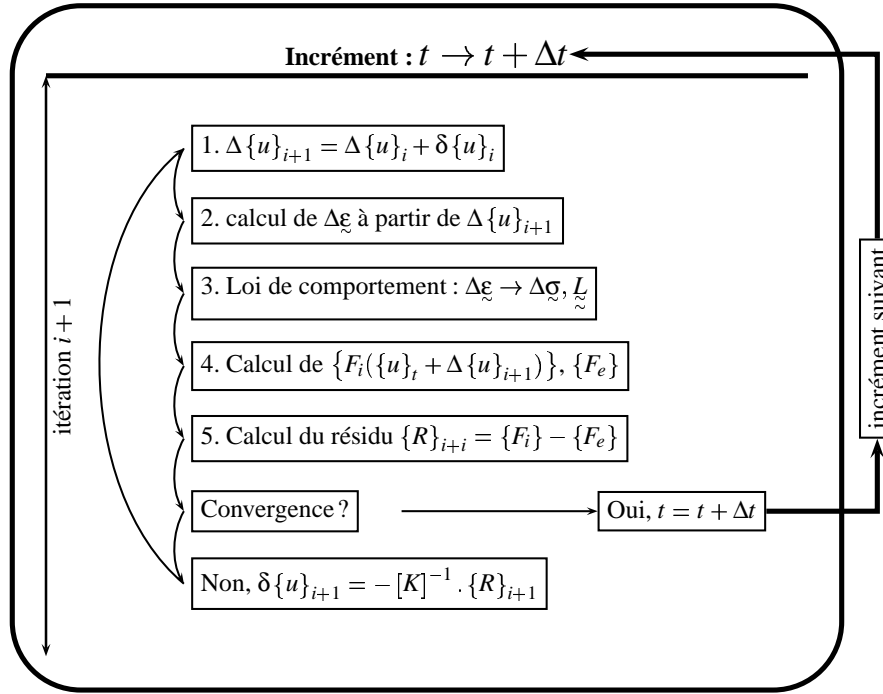


Figure 2.19. Recherche itérative de l'incrément $\Delta \{u\}$ pour un pas de temps Δt .

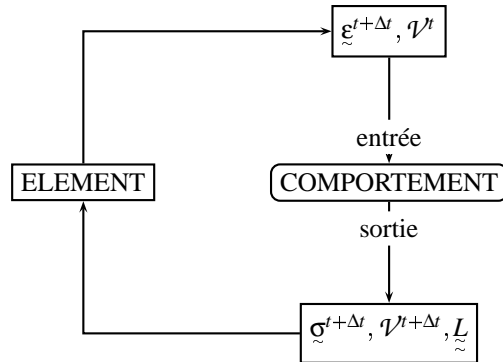
Notons que l'équation à résoudre s'écrit

$$\{F_i\} = \int_{\Omega} [B]^T \cdot \{\sigma\} dV \equiv \{F_e\} \quad (2.273)$$

Seul le tenseur des contraintes σ est nécessaire à l'écriture de l'équilibre. Le tenseur \tilde{L} n'est utilisé que pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ qui est employée dans la résolution itérative du système précédent. Il n'est donc pas nécessaire de calculer exactement \tilde{L} , une estimation peut suffire. On peut par exemple utiliser la matrice d'élasticité $\tilde{\Lambda}$ pour \tilde{L} et utiliser une méthode de type BFGS pour corriger la matrice globale.

Il convient également de ne pas oublier que le comportement du matériau est caractérisé par un ensemble de variables (\mathcal{V}) dont il faut calculer les valeurs en fin d'incrément $\mathcal{V}^{t+\Delta t}$. L'interface entre l'élément fini et le comportement peut donc se

schématiser de la façon suivante [FOE 97, BES 98b] :



La description logicielle du comportement doit être indépendante de la MEF. Réciproquement l'élément ne doit pas connaître le type de comportement (par exemple élasticité, plasticité, fluage, etc.). Il doit juste y avoir correspondance entre la formulation de l'élément et le comportement : mécanique petites déformations, mécanique grandes déformations, thermique, etc.

Chapitre 3

Plasticité et viscoplasticité 3D

3.1. Généralités

La grande diversité des matériaux réels se traduit par l'existence d'une multitude de lois de comportement et en particulier d'une grande variété de critères et de lois d'évolution aussi bien en élastoplasticité qu'en élastoviscoplasticité. Il est illusoire de vouloir établir une liste exhaustive des modèles, d'autant plus que les chercheurs continuent encore à proposer de nouvelles versions. Aussi ce chapitre sera-t-il consacré à une tâche plus modeste qui consiste à présenter le cadre général d'écriture, en illustrant l'exposé par les lois les plus classiques, et en se limitant aux transformations infinitésimales (petits déplacements et petits gradients de déplacements). Le texte cherche un équilibre entre la présentation des concepts théoriques et celle des modèles qui fonctionnent effectivement pour les matériaux réels. Le lecteur intéressé pourra consulter d'autres références, notamment pour une présentation mathématique de la plasticité [DUV 72, MOR 83, HAL 87, SIM 97], ou pour les chargements cycliques [MRÓ 95]. On résume tout d'abord les concepts généraux qui ont été introduits dans les chapitres précédents. Jusqu'au paragraphe 3.8, les développements présentés portent sur des matériaux plastiquement isotropes (critère de limite d'élasticité et écrouissage).

3.1.1. Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations ξ est décomposé en plusieurs parties :

- Une partie élastique ξ^e fonction de la variation du tenseur de contrainte σ entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence, σ_f ; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire elle s'exprime

avec le tenseur des souplesses (tenseur d'ordre 4), inverse du tenseur des rigidités élastiques $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\Lambda}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_I) \quad (3.1)$$

- Une partie de dilatation thermique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$ fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_I . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur $\boldsymbol{\alpha}$, qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes ou cubiques.

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = (T - T_I) \boldsymbol{\alpha} \quad (3.2)$$

- Une partie non élastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ne}$, elle-même décomposée en une partie plastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et une partie viscoplastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$, (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité).
- Eventuellement une partie, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cp}$, due aux changements de phase au cours de la déformation.

D'où :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\Lambda}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_I) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cp} \quad (3.3)$$

La décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu, conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$).

3.1.2. Critères

Chacun des mécanismes responsables du comportement inélastique est caractérisé par un certain nombre de variables, appelées variables d'écrouissage, caractérisant à un instant donné l'état du matériau, et l'influence du chargement thermomécanique passé. Comme indiqué au chapitre précédent, le domaine d'élasticité se définit dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage (et de la température). A température et écrouissage fixés, c'est une partie de l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques, $D_e = \{\boldsymbol{\sigma} / f(\boldsymbol{\sigma}, A_I, T) \leq 0\}$, la condition $f(\boldsymbol{\sigma}, A_I, T) = 0$ définissant quant à elle la frontière du domaine d'élasticité.

3.1.3. Lois d'écoulement

Ce sont les règles qui vont permettre de définir la vitesse de déformation plastique ou viscoplastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. L'étude des modèles rhéologiques a montré la nature des équations mises en jeu pour ce qui concerne l'intensité de la

vitesse d'écoulement. Celle-ci est liée à la vitesse de contrainte ou de déformation totale pour un modèle plastique, et à l'état actuel de contrainte et des variables internes pour un modèle viscoplastique. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la *direction* de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

3.1.4. Lois d'écrouissage

Dans toute transformation réelle, l'énergie mécanique fournie au matériau n'est restituée par celui-ci qu'en partie. L'autre partie est dissipée sous l'une des formes suivantes :

- augmentation de la température (chaleur spécifique),
- changement d'état de certains constituants (chaleur latente),
- production de chaleur cédée au milieu environnant,
- modification de la structure interne du matériau (mouvement de dislocations, glissement relatif inter-grains, création de nouvelles fissures ...).

Cette modification (ou réarrangement) de la structure intime du matériau durant une transformation conduit à un nouvel état dans lequel les propriétés mécaniques peuvent ou non évoluer. La déformation peut laisser le domaine d'élasticité D_e inchangé (phase parfaite ou à écrouissage nul), ou conduire à un domaine d'élasticité plus petit (phase adoucissante ou à écrouissage négatif) ou plus grand (phase durcissante ou à écrouissage positif). L'écriture de l'écrouissage est une tâche très complexe, qui dépend étroitement de la classe de matériau étudiée. Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes au cours d'une sollicitation cyclique par exemple. Le type d'écrouissage peut par ailleurs être modifié par des trajets de chargements complexes ou par le vieillissement du matériau.

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution des variables d'écrouissage au cours de la déformation inélastique. Ainsi qu'on l'a vu dans le cas uniaxial, les principales classes d'écrouissage sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique.

3.1.5. Matériaux standards généralisés

La construction d'une théorie de plasticité ou de viscoplasticité nécessite dans le cas général la définition d'une fonction de charge, d'une fonction d'écoulement, et d'une fonction d'écrouissage. Dans le cas d'un matériau *standard généralisé*, ces trois entités sont définies par la donnée d'un seul potentiel. Il s'agit donc d'une classe de matériaux particuliers, pour lesquelles on étend à l'écrouissage les règles que l'on admet pour l'écoulement, en introduisant des variables «déformation généralisée» α_I , associées aux flux ou «contraintes généralisées», A_I . La description de cette classe

de matériaux [HAL 75], intéressante d'un point de vue théorique, car l'existence du potentiel permet de démontrer des théorèmes d'existence et unicité des solutions, est suggérée par la thermodynamique des processus irréversibles.

La *dissipation intrinsèque* évaluée par l'approche thermodynamique s'écrit :

$$\phi_1 = \sigma : \dot{\xi}^p - A_I \dot{\alpha}_I \quad (3.4)$$

Dans ce formalisme, les variables A_I sont les variables d'écroissance (scalaires ou tensorielles) associées aux variables d'état α_I . Elles se déduisent de celles-ci dès lors que l'on a fixé la forme de l'énergie libre spécifique ψ :

$$A_I = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_I} \quad (3.5)$$

On notera que la contrainte est une variable flux particulière, à laquelle est associé l'opposé de la déformation plastique. On considère alors le vecteur Z constitué par les composantes du tenseur de contraintes et celles des variables A_I , et le vecteur z , constitué par les déformations plastiques et les variables $(-\alpha_I)$, si bien que :

$$\phi_1 = Zz \quad (3.6)$$

La positivité de cette dissipation peut être assurée *a priori* si on admet l'existence d'un potentiel Ω fonction à valeurs réelles des variables flux, définissant l'évolution des variables d'état :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \quad (3.7)$$

Il suffit en effet que les équipotentielles définies par Ω dans l'espace des variables flux soient des surfaces convexes et qu'elles contiennent l'origine. Un cas particulier important est obtenu lorsque Ω dépend des variables flux au travers de la fonction seuil f . Dans ce cas, les vitesses des variables d'état s'expriment :

$$\dot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad (3.8)$$

Dans le membre de droite de l'expression précédente, le premier terme est scalaire, et désigne l'*intensité* de l'écoulement, le second terme a la dimension de l'espace des variables flux, il donne la *direction* de l'écoulement, qui est donc définie par la normale à la surface de charge. La direction de l'écoulement (visco)plastique est donnée par $\partial f / \partial \sigma$, et la direction d'évolution des variables d'écroissance par $\partial f / \partial A_I$.

3.2. Formulation des lois de comportement

3.2.1. Définition des variables d'état

Dans la suite, on notera η le gradient de f par rapport à σ , $\eta = \partial f / \partial \sigma$. On décrit dans un premier temps la classe des modèles *standards généralisés* définis dans le paragraphe précédent, qui sont bâtis autour de la seule définition de la fonction de charge.

L'écriture ci-dessus fournit de façon naturelle la nature des variables d'érouissage à utiliser pour une forme de fonction de charge donnée. On traite ici à titre d'exemple le cas des érouissages isotrope et cinématique linéaire avec le critère de von Mises. La fonction de charge s'écrit, en introduisant le scalaire R pour modéliser l'érouissage isotrope et le tenseur \underline{X} pour l'érouissage cinématique (qui est un tenseur déviatorique) :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - \sigma_y = \left(\frac{3}{2} (\underline{\sigma} - \underline{X}) : (\underline{\sigma} - \underline{X}) \right)^{1/2} - R - \sigma_y \quad (3.9)$$

La variable tensorielle $\underline{\alpha}$ associée à la variable d'érouissage \underline{X} n'est donc pas autre chose que la déformation plastique elle-même, alors que la variable p associée à la variable d'érouissage R s'identifie à la vitesse de déformation plastique équivalente :

$$\underline{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\dot{\xi}}^p \quad \dot{p} = -\frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \quad (3.10)$$

La variable p est appelée déformation plastique cumulée, car elle mesure la longueur du trajet de déformation (voir section 3.3.1) :

$$\left(\frac{2}{3} \underline{\dot{\xi}}^p : \underline{\dot{\xi}}^p \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underline{n} : \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underline{n} \right)^{1/2} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \quad (3.11)$$

Sous chargement uniaxial, lorsque le tenseur de vitesse de déformation plastique est une diagonale $(\dot{\epsilon}^p, -(1/2)\dot{\epsilon}^p, -(1/2)\dot{\epsilon}^p)$, le calcul de \dot{p} donne : $\dot{p} = |\dot{\epsilon}^p|$.

3.2.2. Viscoplasticité

Le formalisme précédent s'applique directement, la fonction Ω constitue un *potentiel viscoplastique*, puisque sa donnée va suffire à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction. La dérivée de Ω , $\partial \Omega / \partial f$, est la fonction de viscosité. Choisir un modèle de viscoplasticité revient donc à choisir une fonction f et une forme de potentiel.

Ainsi la généralisation du modèle de Norton en adoptant le critère de von Mises, s'effectue simplement en utilisant comme critère la fonction f dépendant des contraintes uniquement, $f = J(\underline{\sigma})$, et comme potentiel la fonction Ω suivante :

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left(\frac{J(\underline{\sigma})}{K} \right)^{n+1} \quad (3.12)$$

On obtient alors :

$$\underline{\dot{\xi}}^{vp} = \left(\frac{J}{K} \right)^n \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.13)$$

Le premier terme de l'expression précédente donne l'intensité de l'écoulement, il est bien égal à $(|\underline{\sigma}|/K)^n$ pour une sollicitation de traction simple. La dérivée partielle de J par rapport à $\underline{\sigma}$ s'évalue simplement par :

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{s}} : \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J} : \left(\underline{I} - \frac{1}{3} \underline{I} \otimes \underline{I} \right) = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J} \quad (3.14)$$

Comme on l'a déjà souligné, pour un tel type de modèle, la limite d'élasticité est nulle en permanence, et le domaine d'élasticité est réduit à un point. Ce cas serait sans intérêt pour un modèle de plasticité indépendante du temps.

Pour retrouver le modèle de Bingham, il suffirait de prendre une fonction du second degré :

$$\Omega = \frac{\eta}{2} \left(\frac{J(\underline{\sigma}) - \sigma_y}{\eta} \right)^2 \quad (3.15)$$

3.2.3. De la viscoplasticité à la plasticité

La figure 3.1a montre la forme du potentiel viscoplastique Ω , fonction monotone croissante de f , telle que $\Omega(0) = 0$, qui illustre le fait que l'intensité de l'écoulement dépend de l'«altitude» du point de fonctionnement courant, et que, géométriquement, la direction du vecteur vitesse de déformation inélastique est normale aux surfaces équipotentielles. Lorsque la fonction Ω devient de plus en plus non linéaire, (par exemple en faisant le choix d'une fonction puissance dont l'exposant n tend vers l'infini), les projections des équipotentielles sur l'espace $(\underline{\sigma}, A_I)$ se resserrent autour de la surface $f = 0$. On définit ainsi une zone de l'espace dans laquelle le potentiel est nul, et une autre où il varie très rapidement. A la limite, Ω se confond avec la fonction indicatrice du domaine d'élasticité (figure 3.1b), et on ne peut plus définir l'intensité de l'écoulement par $\partial\Omega/\partial f$. Cet effet correspond naturellement au fait que la vitesse d'écoulement en viscoplasticité est définie par l'«excès de contrainte», ou distance entre le point de fonctionnement courant et la surface de charge, et que cet excès de contrainte reste nul en plasticité, puisque le point de fonctionnement reste sur la surface de charge pendant l'écoulement ($f(\underline{\sigma}, A_I) = 0$). On illustre ainsi la différence de nature entre les théories de viscoplasticité et de plasticité. Le cadre viscoplastique autorise, pour écrire un modèle, une grande liberté dans le choix de la fonction de viscosité, alors que, dans le cadre de la plasticité (dans les conditions examinées jusqu'à présent), l'expression même du domaine d'élasticité détermine l'intensité de l'écoulement.

Il faut donc introduire un élément supplémentaire pour traiter le problème en plasticité. On suppose alors que l'on *maximise la dissipation intrinsèque* Φ_1 . Comme cette maximisation doit être effectuée sous contrainte, pour exprimer le fait que f reste négatif ou nul, on forme [LUE 84] :

$$\mathbb{F}(Z) = Z\dot{z} - \dot{\lambda} f \quad (3.16)$$

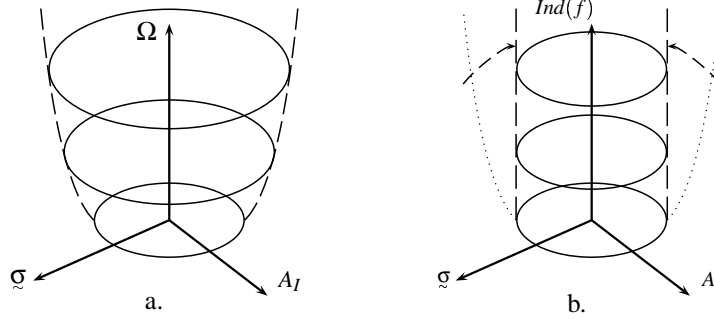


Figure 3.1. Comparaison des théories de plasticité et de viscoplasticité, (a) potentiel viscoplastique, (b) obtention d'un modèle plastique par passage à la limite

en introduisant le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ pour exprimer la contrainte. En annulant $\partial\mathbb{F}/\partial Z$, on aboutit alors à :

$$\dot{z} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad (3.17)$$

Soit :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{n} \quad ; \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I} \quad (3.18)$$

Il y a équivalence entre les propositions (i) et (ii) suivantes :

- (i) Z réel maximise la dissipation intrinsèque ;
- (ii) la direction d'écoulement \dot{z} est normale à la surface définie par f ; le domaine défini par f est convexe.

On a donc conservé la règle de normalité. C'est la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ qui fournira en plasticité l'équation qui disparaît en raison de la singularité de la fonction indicatrice de f en $f = 0$. Le formalisme plastique consiste alors à remplacer $\partial\Omega/\partial f$ par le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$.

3.2.4. Remarques sur la formulation des lois de comportement plastiques

Conditions d'écoulement

Les conditions d'écoulement s'écrivent donc en 3D :

$$\text{— domaine d'élasticité si } : f(\underline{\sigma}, A_I) < 0 \quad (\dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \dot{\underline{\sigma}}) \quad (3.19)$$

$$\text{— décharge élastique si } : f(\underline{\sigma}, A_I) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\sigma}, A_I) < 0 \quad (\dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \dot{\underline{\sigma}}) \quad (3.20)$$

$$\text{— écoulement plastique si } : f(\underline{\sigma}, A_I) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\sigma}, A_I) = 0 \quad (\dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (3.21)$$

La condition à vérifier au cours de l'écoulement est bien $\dot{f}(\underline{\sigma}, A_I) = 0$, et non simplement $\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} > 0$ comme trop souvent indiqué par erreur. La différence est sensible lorsque la fonction f dépend de paramètres extérieurs comme la température, la composition chimique, ... dont l'évolution peut être imposée indépendamment du problème de plasticité. En désignant collectivement par P_J ces paramètres, la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ s'exprime, en posant $Y_I = \partial f / \partial A_I$:

$$\dot{f} = \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} + Y_I \dot{A}_I = 0 \quad \text{avec} \quad \dot{A}_I = \left. \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_K} \right|_{P_J} \dot{\alpha}_K + \left. \frac{\partial A_I}{\partial P_J} \right|_{\alpha_I} \dot{P}_J \quad (3.22)$$

Dans l'équation 3.22, les termes hors diagonale de $\partial A_I / \partial \alpha_K$ introduisent un éventuel *couplage d'état*, comme indiqué en section 2.3.5. En remplaçant alors les vitesses des variables internes par leur expression (dans 3.18), il vient :

$$H \dot{\lambda} = \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} + \left. \frac{\partial A_I}{\partial P_J} \right|_{\alpha_I} \dot{P}_J \quad \text{avec} \quad H = Y_I \left. \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_K} \right|_{P_J} Y_K \quad (3.23)$$

où le numérateur comporte, en plus du terme traditionnel en $\underline{\dot{\sigma}}$, un second terme «moteur» pour l'écoulement plastique, qui dépend de l'évolution des paramètres extérieurs, et où on reconnaît en H le module plastique.

Comportement parfaitement plastique

Le principe «du travail plastique maximal», énoncé par von Mises, puis par Hill en 1951, stipule que : «Le travail des contraintes réelles $\underline{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\underline{\dot{\epsilon}}^p$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underline{\sigma}^*$ (*i.e.* ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\underline{\dot{\epsilon}}^p$ ».

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (3.24)$$

Ce principe peut en fait être démontré dans le cas de métaux qui se déforment par glissement et obéissent à la loi de Schmid. Il n'est pas vérifié par tous les matériaux, en particulier par les sols. Il constitue un *cas particulier* de l'hypothèse de maximisation de la dissipation intrinsèque énoncé dans le paragraphe précédent, lorsqu'il n'y a pas d'écrouissage, donc que le matériau est parfaitement plastique. Pour mémoire, on reporte ici les conséquences classiquement attachées à ce principe. Elles sont exprimées simplement en termes de contrainte et déformation plastique, mais elles peuvent également se lire (pour un matériau écrouissable) en termes de contraintes et déformations plastiques généralisées.

Si on choisit $\underline{\sigma}^*$ sur la surface de charge, on vérifie que, si $\underline{\sigma}$ est dans le domaine d'élasticité, $\underline{\dot{\epsilon}}^p = \underline{0}$. Si le domaine d'élasticité ne présente pas de coins, le principe du travail maximal peut être appliqué à partir d'un point $\underline{\sigma}$ de la surface de charge, en choisissant un point $\underline{\sigma}^*$ infiniment proche, également sur la surface de charge. $\underline{\sigma}^*$

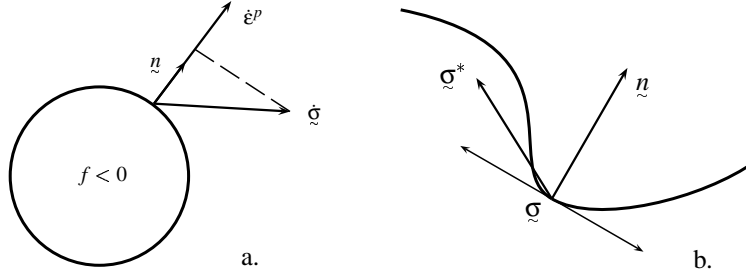


Figure 3.2. Conséquences du principe du travail maximal, (a) illustration de la règle de normalité, (b) convexité de f

se déduit de $\underline{\sigma}$ à l'aide d'un tenseur \underline{t}^* appartenant au plan tangent à la surface en $\underline{\sigma}$ ($\underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} + k\underline{t}^*$, avec $k > 0$). Le même raisonnement peut être recommencé en prenant $\underline{\sigma}^* = \underline{\sigma} - k\underline{t}^*$ comme point de départ, ce qui conduit aux deux inégalités suivantes :

$$k\underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \quad \text{et} \quad -k\underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \quad (3.25)$$

$$\text{si bien que :} \quad \underline{t}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p = 0 \quad (3.26)$$

La vitesse de déformation plastique est portée par la normale à la surface de charge. La vitesse de déformation plastique est donc colinéaire à \underline{n} . Le scalaire $\hat{\lambda}$ définit l'intensité de l'écoulement. Il est toujours positif, car, en choisissant maintenant $\underline{\sigma}^*$ sur la normale au point $\underline{\sigma}$, à l'intérieur du domaine d'élasticité, $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) = k\underline{n}$ est colinéaire à \underline{n} et de même sens ($k > 0$), si bien que l'expression $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0$ devient :

$$k\underline{n} : \hat{\lambda}\underline{n} \geq 0 \quad \text{d'où :} \quad \hat{\lambda} \geq 0 \quad (3.27)$$

Il existe donc entre $\hat{\lambda}$ et f un ensemble de conditions, dit de complémentarité de Kuhn–Tucker :

$$\hat{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad \hat{\lambda}f = 0 \quad (3.28)$$

Dans le cas des matériaux qui vérifient le principe du travail maximal, la surface de charge joue en même temps le rôle de pseudo-potentiel plastique, et détermine l'écoulement plastique à un scalaire multiplicatif près. Si la surface n'est pas régulière et présente un coin au point $\underline{\sigma}$, il y existe un cône des normales, à l'intérieur duquel se trouve la direction de l'incrément de déformation plastique.

En appliquant de nouveau le principe du travail maximal à partir d'un état de contrainte $\underline{\sigma}$ sur la surface de charge, et en considérant $\underline{\sigma}^*$ à l'intérieur du domaine d'élasticité, la règle de normalité permet maintenant d'écrire la relation suivante, qui exprime que la surface doit se trouver toute entière du même côté du plan tangent en $\underline{\sigma}$ (figure 3.2b) :

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{n} \geq 0 \quad (3.29)$$

Le domaine d'élasticité est donc convexe. Il en est de même pour la fonction f .

Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que «tourner» autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique est indéterminé ; la condition de charge plastique et la condition de cohérence deviennent respectivement (en l'absence de paramètres extérieurs) :

$$\text{pour } f(\underline{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{f}(\underline{\sigma}) = 0 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{n} \quad (3.30)$$

$$\text{au cours de l'écoulement} \quad : \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad (3.31)$$

3.3. Directions d'écoulement associées aux critères courants

Les directions d'écoulement sont calculées dans un premier temps pour un matériau parfaitement plastique. Les modifications apportées par l'écrouissage seront indiquées au paragraphe suivant.

3.3.1. Critère de von Mises

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\sigma}) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y$, si bien que la normale \underline{n} s'exprime :

$$\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underline{s}} : \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.32)$$

En utilisant :

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{J} = \underline{I} - \frac{1}{3} \underline{I} \otimes \underline{I} \quad (3.33)$$

on obtient :

$$\underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{J} : \underline{\sigma}}{J} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J} \quad (3.34)$$

Dans le cas du critère de von Mises, la direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes.

Cette expression se simplifie en traction simple selon la direction 1 :

$$\underline{s} = \frac{2\underline{\sigma}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}; J = |\underline{\sigma}|; \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{signe}(\underline{\sigma}) \quad (3.35)$$

3.3.2. Critère de Tresca

La loi d'écoulement se définit par secteur dans l'espace des contraintes principales. Par exemple pour le cas $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, la fonction de charge s'écrit : $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$, si bien que, pour l'ensemble des états de contrainte qui vérifient cette inégalité, la vitesse de déformation plastique possède les mêmes composantes, le matériau ne se déformant pas selon l'axe 2 (déformation de type cisaillement) :

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

La définition de la normale pose un problème pour les états de contrainte correspondant aux points singuliers, ainsi en traction simple, lorsque par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, le critère s'exprimant alors indifféremment $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_y$, ou $f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$. Il est alors classique de définir deux multiplicateurs plastiques, se référant chacun à une forme du critère. Si ces deux multiplicateurs sont choisis égaux, le modèle redonne la même forme que le critère de von Mises en traction simple. Par contre, dès que l'état de contrainte s'éloigne de l'égalité stricte entre les composantes σ_2 et σ_3 , c'est l'un des deux régimes de type cisaillement qui prend le dessus.

$$\text{si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad : \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dot{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

3.3.3. Critère de Drucker-Prager

La fonction de charge s'écrit $f(\underline{\sigma}) = J(\underline{\sigma}) - (\sigma_y - \alpha \text{Tr}(\underline{\sigma})) / (1 - \alpha)$, si bien que la normale \underline{n} possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué :

$$\underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{J} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \underline{I} \quad (3.38)$$

$$\text{Tr}(\underline{\dot{\epsilon}})^p = \frac{3\alpha}{1 - \alpha} \dot{\lambda} \quad (3.39)$$

3.4. Expression de quelques lois particulières en plasticité

3.4.1. Loi de Prandtl–Reuss

C'est la loi obtenue en utilisant le critère de von Mises et une règle d'écoulement isotrope. La fonction de charge est donc :

$$f(\underline{\sigma}, R) = J(\underline{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \quad (3.40)$$

L'écoulement isotrope est décrit par la fonction $R(p)$. Dans le cas d'un chargement uniaxial, en traction où seule la composante $\sigma_{11} = \sigma$ est non nulle, l'égalité $f(\underline{\sigma}, R) = 0$ se résume à :

$$\sigma = \sigma_y + R(p) \quad (3.41)$$

La courbe décrite par $(\sigma_y + R(p))$ est donc la courbe d'écoulement en chargement uniaxial monotone, la déformation de traction $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p$ étant égale dans ce cas à la déformation plastique cumulée. Le module plastique peut être évalué comme la pente de cette courbe :

$$\sigma = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \quad ; \quad H = \frac{dR}{d\varepsilon^p} = \frac{dR}{dp} \quad (3.42)$$

$R(p)$ peut être définie point par point, par une fonction puissance ou une fonction exponentielle, comme on l'a vu dans le chapitre sur la plasticité uniaxiale. Quelle que soit la forme choisie pour R , la condition de cohérence permet de trouver le multiplicateur plastique ($\dot{\lambda} = \dot{p}$) :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad \text{s'écrit :} \quad \underline{n} : \dot{\underline{\sigma}} - H \dot{p} = 0 \quad (3.43)$$

$$\text{et :} \quad \dot{\lambda} = \frac{\underline{n} : \dot{\underline{\sigma}}}{H} \quad (3.44)$$

La loi de Prandtl-Reuss permet de déterminer la direction et l'intensité de l'écoulement plastique :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underline{n} = \frac{\underline{n} : \dot{\underline{\sigma}}}{H} \underline{n} \quad \text{avec} \quad \underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}}{J} \quad (3.45)$$

Dans le cas particulier de la traction simple, cette expression générale se réduit bien à la forme uniaxiale habituelle :

$$n_{11} = \text{signe}(\sigma) \quad , \quad \underline{n} : \dot{\underline{\sigma}} = \dot{\sigma} \text{signe}(\sigma) \quad \text{et :} \quad \dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (3.46)$$

$$\text{si bien que :} \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{n_{11} \dot{\sigma}}{H} n_{11} = \frac{\dot{\sigma}}{H} \quad (3.47)$$

3.4.2. Loi de Hencky–Mises

Les équations précédentes doivent être intégrées pour obtenir le trajet de déformation plastique. Dans le cas général, la normale \underline{n} tourne au cours du chargement, si bien qu'il y a un couplage entre les composantes de la déformation plastique. On retrouve un découplage lorsqu'on peut faire l'hypothèse de *chargement simple*, c'est-à-dire lorsque le chargement extérieur en termes de contraintes croît proportionnellement à un seul paramètre scalaire k , à partir d'un état initial non écroui. Lorsque les contraintes varient entre zéro et $\underline{\sigma}_M$, on peut alors écrire respectivement, k variant de 0 à 1 :

$$\underline{\sigma} = k \underline{\sigma}_M \quad ; \quad \underline{\dot{\sigma}} = k \underline{\dot{\sigma}}_M \quad ; \quad \underline{s} = k \underline{s}_M \quad ; \quad J = k J_M \quad (3.48)$$

La normale a donc une direction constante au cours du chargement :

$$\underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}_M}{J_M} \quad (3.49)$$

Pour obtenir le tenseur de déformation plastique, il suffit donc de calculer la déformation plastique équivalente :

$$p = \int_0^t \dot{p} dt = \int_0^t \dot{\lambda} dt \quad (3.50)$$

Or :

$$\frac{\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}}}{H} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}_M}{J_M} : \frac{\underline{\sigma}_M \dot{k}}{H} = \frac{J_M \dot{k}}{H} \quad (3.51)$$

Donc, k_e étant la valeur de k pour lequel on rencontre le domaine d'élasticité initial ($k_e J_M = \sigma_y$) :

$$\underline{\varepsilon}^p = p \underline{n} \quad \text{avec} \quad p = \frac{J_M}{H} (k - k_e) = \frac{J(\underline{\sigma}) - \sigma_y}{H} \quad (3.52)$$

3.4.3. Loi de Prager

C'est la loi obtenue en utilisant le critère de von Mises et une règle d'écrouissage cinématique linéaire. Il faut pour cela introduire une variable d'écrouissage \underline{X} , associée à la déformation plastique, qui s'écrit : $\underline{X} = (2/3)H\underline{\varepsilon}^p$. Cette variable est déviatorique, la fonction de charge s'écrit donc simplement :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}) = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - \sigma_y \quad (3.53)$$

La condition de cohérence s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : \underline{\dot{X}} = 0, \quad \text{soit} \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} - \underline{n} : \underline{\dot{X}} = 0 \quad (3.54)$$

Dans les équations précédentes, J et \underline{n} sont définis par :

$$J(\underline{\sigma} - \underline{X}) = \left(\frac{3}{2} (\underline{s} - \underline{X}) : (\underline{s} - \underline{X}) \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s} - \underline{X}}{J(\underline{\sigma} - \underline{X})} \quad (3.55)$$

On obtient donc :

$$\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = \underline{n} : \underline{\dot{X}} = \underline{n} : \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \underline{n} = H \dot{\lambda}, \quad \text{d'où} : \quad \dot{\lambda} = (\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}}) / H \quad (3.56)$$

Le multiplicateur plastique a la même expression formelle que dans le cas de l'écroutissage isotrope ; il faut néanmoins noter que la définition de \underline{n} est modifiée, et que H est constant. Sous chargement uniaxial, $\underline{\sigma} = \sigma_{11}$ étant la seule composante non nulle du tenseur des contraintes, et en posant $X = (3/2)X_{11}$, la fonction de charge et la condition de cohérence s'écrivent :

$$|\underline{\sigma} - X| = \sigma_y \quad \underline{\dot{\sigma}} = \dot{X} = H \dot{\lambda} \underline{n} \quad (3.57)$$

3.5. Écoulement à vitesse de déformation totale imposée

3.5.1. Cas d'un matériau élastique-parfaitement plastique

Le multiplicateur plastique est indéterminé pour un matériau élastique-parfaitement plastique chargé en vitesse de contrainte imposée. Cela est lié au fait que, le module plastique étant nul, il existe une infinité de positions équivalentes en déformation plastique pour un état de contrainte admissible donné, tel que $J(\underline{\sigma}) = \sigma_y$: ainsi, en traction simple $\sigma_{11} = \sigma_0$, tous les tenseurs diagonaux $(\varepsilon^p, (-1/2)\varepsilon^p, (-1/2)\varepsilon^p)$ sont des solutions possibles. Le fait d'imposer la vitesse de déformation totale modifie bien entendu ce résultat. Le multiplicateur plastique va pouvoir être déterminé, en combinant la loi de comportement élastique écrite en termes de vitesse et la condition de cohérence, soit :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\Lambda}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \quad \text{et} \quad \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = 0 \quad (3.58)$$

La multiplication des deux membres de la première relation par \underline{n} permet d'«inverser» l'équation :

$$\underline{n} : \underline{\dot{\sigma}} = \underline{n} : \underline{\dot{\Lambda}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) = \underline{n} : \underline{\dot{\Lambda}} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{n} : \underline{\dot{\Lambda}} : \underline{\dot{\lambda}} \underline{n} \quad (3.59)$$

$$\text{si bien que} : \quad \dot{\lambda} = \frac{\underline{n} : \underline{\dot{\Lambda}} : \underline{\dot{\varepsilon}}}{\underline{n} : \underline{\dot{\Lambda}} : \underline{n}} \quad (3.60)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité isotrope, et du critère de von Mises, on obtient successivement les simplifications suivantes :

$$\Lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \underline{n} = \frac{3}{2} \frac{s}{J} \quad (3.61)$$

$$n_{ij} \Lambda_{ijkl} = 2\mu n_{kl}, \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} n_{kl} = 3\mu, \quad n_{ij} \Lambda_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = 2\mu n_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.62)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{2}{3} \underline{n} : \dot{\underline{\epsilon}} \quad (3.63)$$

Pour un chargement uniaxial, avec $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{11}$, cette dernière expression se réduit à :

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon} \text{signe}(\sigma), \quad \text{qui redonne : } \dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} \quad (3.64)$$

3.5.2. Cas d'un matériau écrouissable

Comme l'indiquent les deux exemples du paragraphe précédent, la condition de cohérence se met toujours sous la même forme, pour les lois de comportement courantes des matériaux isotropes. Par comparaison avec le cas du matériau parfaitement plastique, seule va changer cette condition de cohérence ; il faut donc maintenant partir de :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \quad \text{et :} \quad \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} = H \dot{p} \quad (3.65)$$

Après multiplication des deux membres de la première relation par $\underline{\underline{n}}$, il vient cette fois-ci :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \quad (3.66)$$

Ceci permet donc de définir le comportement tangent en élastoplasticité :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) = \left(\underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{n}}} \right) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.67)$$

On remarque que l'opérateur élastoplastique tangent est parfaitement symétrique. Dans le cas de l'élasticité isotrope et d'un matériau de von Mises, l'expression du multiplicateur devient :

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{H + 3\mu} \quad (3.68)$$

3.6. Plasticité non associée

Les modèles qui ont été décrits jusqu'à présent utilisent la même fonction comme limite du domaine d'élasticité, pour la détermination de la direction de l'écoulement,

et pour l'évaluation de l'évolution des variables d'écroutissage. On peut distinguer en fait trois types de modèles, selon ce que l'on utilise pour chacun de ces points.

$$\text{fonction-seuil} \quad \text{écoulement} \quad \text{écrouissage} \quad (3.69)$$

$$(1) \quad f \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I} \quad (3.70)$$

$$(2) \quad f \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} M_I \quad (3.71)$$

$$(3) \quad f \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{P}} \quad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} M_I \quad (3.72)$$

Le modèle (1) est standard généralisé, le modèle (2) est simplement associé (la fonction f ne sert plus pour l'écroutissage, mais sert toujours pour l'écoulement), la forme (3), la plus générale, caractérise un modèle non associé.

Dans ce dernier cas, le multiplicateur plastique se calcule comme précédemment, à l'aide de la condition de cohérence, qui devient, en conservant la notation $\underline{\underline{n}} = \partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$, et en l'absence de paramètres extérieurs :

$$\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial A_I} \dot{A}_I = 0 \quad (3.73)$$

Soit successivement :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\sigma}}}{H}, \quad \text{avec } H = \sum_I \frac{\partial f}{\partial A_I} \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_I} M_I \quad (3.74)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{P}}} \quad (3.75)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\underline{\underline{\Lambda}} - \frac{(\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{P}}) \otimes (\underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}})}{H + \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{P}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (3.76)$$

Maintenant, on constate que l'opérateur élastoplastique tangent ne respecte plus la symétrie principale.

3.7. Écroutissage non linéaire

Les modèles traités sont ici uniquement des modèles phénoménologiques classiques. On traite le cas de matériaux obéissant aux critères courants (von Mises, Hill), et on évoque les modèles cristallographiques notamment. Ceux-ci, dans le cas de matériaux se déformant de façon prépondérante par glissement, contiennent en effet des particularités intéressantes, notamment celle de ne pas présupposer de forme pour le critère de plasticité macroscopique. Ils sont maintenant assez couramment utilisés au niveau de la recherche, mais ne sont pas encore arrivés dans les grands codes commerciaux. Pour tenter d'être plus exhaustif, il faudrait reprendre une abondante littérature

sur le problème des lois de comportement. Certains articles seront mentionnés par la suite. Le lecteur pourra également se reporter aux cycles de conférences sur le sujet, comme «Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials», «Int. Conf. of Plasticity» ou les colloques Euromech-Mecamat.

3.7.1. Écrouissage cinématique et isotrope

Après deux ou trois décades de développements de nouveaux modèles de comportement, la forme qui s'impose maintenant fait intervenir un domaine d'élasticité dont l'évolution est gouvernée par l'évolution d'une variable tensorielle \underline{X} qui définit le centre (écrouissage cinématique), et une variable scalaire qui définit le rayon (écrouissage isotrope).

Dans ce cadre là, il faut bien sûr sortir de l'évolution linéaire pour les deux types d'écrouissage. On écrira la fonction seuil sous la forme indiquée en (3.77) si on souhaite suivre l'hypothèse de normalité généralisée, ou plus simplement sous la forme classique (3.78), avec dans ce cas un formalisme de (visco-)plasticité non associée, si ce premier cadre est jugé trop restrictif.

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - \sigma_y - R + \frac{D}{2C} J^2(\underline{X}) + \frac{R^2}{2Q} \quad (3.77)$$

$$\text{avec } J(\underline{X}) = \left(\frac{3}{2} \underline{X} : \underline{X} \right)^{1/2}$$

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - \sigma_y - R \quad (3.78)$$

En suivant alors le formalisme indiqué au chapitre précédent, il vient :

$$\dot{\underline{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} = \left(n - \frac{3D}{2C} \underline{X} \right) \dot{\lambda} \quad (3.79)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \left(1 - \frac{R}{Q} \right) \dot{\lambda} \quad (3.80)$$

Les variables qui représentent l'écrouissage sont $\underline{\alpha}$ et r . Leur donnée permet ensuite d'obtenir les variables d'écrouissage \underline{X} et R , si on a choisi une forme quadratique pour l'énergie libre :

$$\psi = \dots + \frac{1}{2} b Q r^2 + \frac{1}{3} C \underline{\alpha} : \underline{\alpha} \quad (3.81)$$

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha} \quad ; \quad R = b Q r \quad (3.82)$$

Comme dans les cas précédemment étudiés, le multiplicateur plastique est égal à la vitesse de déformation plastique cumulée. L'évolution des variables d'écrouissage,

dans le cas où les coefficients sont constants, s'écrit donc simplement en fonction de \dot{p} :

$$\dot{X} = \frac{2}{3} C \dot{\xi}^p - D X \dot{p} \quad (3.83)$$

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p} \quad \text{soit } R = Q(1 - \exp(-b p)) \quad (3.84)$$

Par contre, la déformation cumulée n'est plus la variable d'état qui caractérise l'érouissage isotrope. La variable adéquate se sature en fonction de la déformation plastique cumulée. Dans un tel modèle, les coefficients dépendant du matériau sont la limite d'élasticité initiale, σ_y , deux coefficients pour représenter l'évolution de l'érouissage isotrope, b et Q , et deux coefficients pour représenter l'évolution de l'érouissage cinématique, C et D . Cette règle d'érouissage cinématique *non linéaire* a été proposée par Chaboche [CHA 77] et Armstrong et Frederick [ARM 66].

3.7.2. Énergie dissipée, énergie bloquée

La dissipation intrinsèque évaluée avec le type de modèle décrit au paragraphe précédent s'écrit, dans le cas où on adopte le formalisme du modèle standard généralisé :

$$\phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\xi}^p - R \dot{r} - \underline{X} : \dot{\alpha} \quad (3.85)$$

$$= \left(\underline{\sigma} : \underline{n} - R + \frac{R^2}{Q} - \underline{X} : \underline{n} + \frac{D}{C} J^2(\underline{X}) \right) \dot{\lambda} \quad (3.86)$$

On note que :

$$\underline{\sigma} : \underline{n} - \underline{X} : \underline{n} = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) \quad (3.87)$$

Si bien que :

$$\phi_1 = \left(J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R + \frac{R^2}{Q} + \frac{D}{C} J^2(\underline{X}) \right) \dot{\lambda} \quad (3.88)$$

$$= \left(f + \sigma_Y + \frac{R^2}{2Q} + \frac{D}{2C} J^2(\underline{X}) \right) \dot{\lambda} \quad (3.89)$$

Dans cette expression :

- le terme $f \dot{\lambda}$ correspond à la dissipation visqueuse ; il est positif si le modèle est viscoplastique, et nul pour un modèle plastique ;
- le terme $\sigma_Y \dot{\lambda}$ est la dissipation («de friction») liée au seuil initial ;
- les deux termes quadratiques correspondent aux dissipations liées à la non-linéarité de l'érouissage ; ces deux derniers termes disparaissent si on revient à des formulations linéaires, et la dissipation calculée est alors celle du modèle parfaitement plastique correspondant.

Dans le bilan d'énergie, la part d'énergie qui est bloquée, et qui contribue à la variation d'énergie libre, est :

$$\dot{\psi} = R \dot{\gamma} + \underline{X} : \dot{\underline{\alpha}} \quad (3.90)$$

$$= Q(1 - e^{-bp}) e^{-bp} \dot{p} + \underline{X} : \left(\underline{n} - \frac{3D}{2C} \underline{X} \right) \dot{p} \quad (3.91)$$

Ces formules mettent clairement en évidence le fait que l'écrouissage correspond à la capacité du matériau à stocker de l'énergie. Lorsque les variables d'écrouissage se saturent, la dérivée de l'énergie libre devient nulle, et le matériau ne présente plus de durcissement. On note par ailleurs que, comme p augmente quel que soit le chargement, l'énergie stockée par le mécanisme d'écrouissage isotrope n'est pas récupérable. Au contraire, l'énergie mise en jeu par l'écrouissage cinématique non linéaire n'est pas entièrement récupérable (la transformation n'est pas réversible, mais renversible); elle serait totalement récupérable dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire (il suffit de penser au modèle de patin et ressort en parallèle pour donner un sens physique à cette constatation). Le lecteur concerné par ces problèmes pourra se reporter aux publications qui ont tenté de quantifier ces différents termes, en s'appuyant sur des mesures expérimentales [CHR 92, CHR 98, CHA 93c].

Le cas où on considère une fonction de charge classique, sans les termes quadratiques, apporte peu de modifications aux résultats précédents. On se trouve en effet dans le cas (2) de la section 3.6, avec un modèle associé mais pas standard généralisé. Le seul changement concerne la quantité d'énergie dissipée, la dissipation due à la non-linéarité étant maintenant double de la précédente.

3.7.3. Résultats typiques obtenus

Traction simple

En traction simple selon l'axe 1, la déformation plastique cumulée p est égale à la déformation plastique ε_{11}^p , notée dans la suite ε^p . Le deuxième invariant du tenseur de contrainte est égal à la composante σ_{11} du tenseur de contrainte, notée dans la suite σ . Pour un modèle comportant à la fois un écrouissage isotrope et cinématique, la courbe de traction est donc modélisée par :

$$\sigma = \sigma_y + Q(1 - \exp(-b\varepsilon^p)) + \frac{C}{D}(1 - \exp(-D\varepsilon^p)) \quad (3.92)$$

La valeur maximale de la contrainte atteinte est donc $\sigma_y + Q + (C/D)$, qui s'identifie à la contrainte ultime. L'expression 3.92 montre qu'il n'est pas possible de distinguer entre écrouissage isotrope et cinématique lors d'un chargement de traction simple. Ceci est illustré sur la figure 3.3. Si le coefficient D est nul, le modèle obtenu est simplement celui de Prager, la contribution de l'écrouissage cinématique étant alors

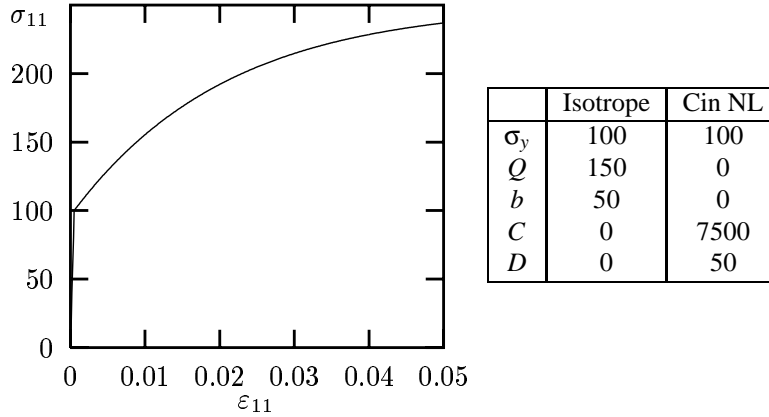


Figure 3.3. Réponse typique en traction simple ($E = 200000$)

simplement $C\varepsilon^p$. La différence est importante, puisqu'il n'y a plus de contrainte limite en traction. La suite montrera que cette différence a aussi des implications en chargement cyclique.

Chargement à déformation imposée symétrique

Les chargements à déformation imposée, avec des bornes symétriques en traction et en compression constituent l'essai de base en chargement cyclique. La courbe déformation plastique–contrainte présente un hystérésis. En relevant les coordonnées des extrémités des boucles, on peut ensuite construire la courbe d'écrouissage cyclique, dans le plan $\Delta\varepsilon^p - \Delta\sigma$. Après une forme transitoire arrondie, la règle d'écrouissage isotrope conduit à un cycle en forme de parallélogramme, avec deux côtés horizontaux (figure 3.4a). Dans le cas où le coefficient Q est positif, il y a *durcissement cyclique*, (comme sur la figure), dans le cas contraire, il y a *adoucissement cyclique*. La règle d'écrouissage cinématique linéaire conduit également à un parallélogramme, dès le second cycle (figure 3.4b). La règle d'écrouissage cinématique non linéaire conduit à une forme plus réaliste (figure 3.4c), et d'autant plus si elle est couplée avec une évolution de l'écrouissage isotrope (figure 3.5).

Le long d'une branche de la courbe d'hystérésis, on peut intégrer la variable cinématique non linéaire, pour trouver (avec $\eta = 1$ pour une branche en traction et $\eta = -1$ pour une branche en compression), à partir d'un point de départ ($\varepsilon_0^p - X_0$) :

$$X = \eta \frac{C}{D} + (X_0 - \eta \frac{C}{D}) \exp(-\eta D(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p)) \quad (3.93)$$

L'utilisation de cette même formule conduit alors pour la courbe cyclique à une

description analytique :

$$\Delta\sigma = 2(\sigma_y + Q) + 2\frac{C}{D} \tanh(D\Delta\varepsilon^p / 2) \quad (3.94)$$

Chargement à déformation imposée non symétrique

Les différents modèles se distinguent par leur réponse à un chargement à déformation imposée non symétrique. Le modèle à écrouissage isotrope se stabilise sur le même cycle que dans le cas du chargement symétrique, qui reste symétrique en contraintes. Le modèle à écrouissage cinématique linéaire développe au contraire une contrainte moyenne (figure 3.6a), puisque le parallélogramme qui constitue le cycle à l'équilibre s'appuie sur des droites invariables dont la pente est le module élastoplastique dans le plan ε - σ . Il y a enfin relaxation de la contrainte moyenne pour le modèle à écrouissage cinématique non linéaire (figure 3.6b). Il faut noter enfin que, dans le cas de la superposition d'un modèle cinématique linéaire et d'un modèle cinématique non linéaire, c'est le premier qui l'emporte, et il subsiste une contrainte moyenne (figure 3.6c). Le comportement réel des matériaux est souvent intermédiaire (relaxation partielle de la contrainte moyenne), si bien que sa modélisation nécessite la mise en place de modèles plus complexes.

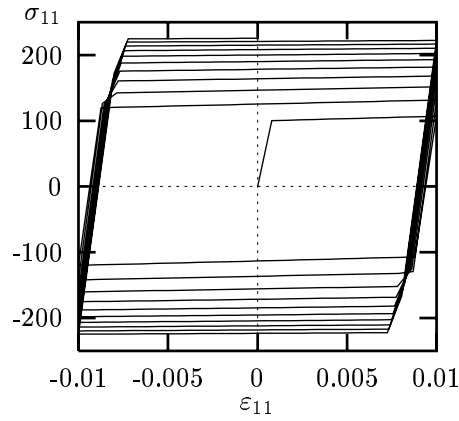
Contrainte imposée non symétrique (rochet 1D)

Lorsqu'on applique un chargement de traction-compression dissymétrique σ_{min} - σ_{max} à une éprouvette, la réponse mécanique peut (i) devenir élastique après une phase de comportement élasto-plastique (*adaptation*), (ii) présenter une déformation progressive qui se stoppe sur un cycle ouvert (*accommodation*), (iii) présenter une déformation progressive non bornée qui va conduire à la ruine (*rochet*).

Pour le cas de l'écrouissage cinématique linéaire, la déformation plastique qui s'établit lors de la première traction est telle que $\sigma_{max} = \sigma_y + C\varepsilon^p$. Il y aura ensuite adaptation si $\sigma_{max} - \sigma_{min} < 2\sigma_y$, et accommodation (figure 3.7a), dans le cas contraire.

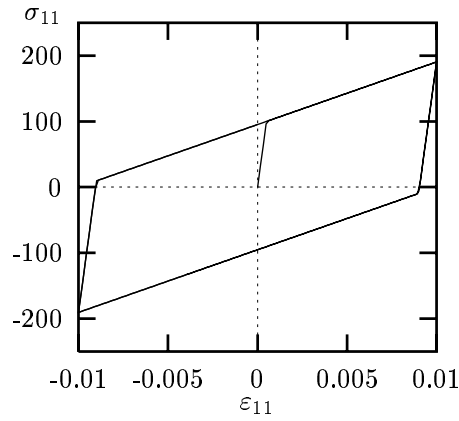
Pour le cas de l'écrouissage cinématique non linéaire, on doit nécessairement avoir $\sigma_{max} < \sigma_y + C/D$ et $\sigma_{min} > -\sigma_y - C/D$, afin de ne pas dépasser la charge limite prévue par le modèle. La déformation plastique qui s'établit lors de la première traction est telle que $\sigma_{max} = \sigma_y + (C/D)(1 - \exp(D\varepsilon^p))$. Il y aura ensuite adaptation si $\sigma_{max} - \sigma_{min} < 2\sigma_y$, et rochet (figure 3.7b) dans le cas contraire, avec un pas de rochet régulier à chaque cycle, conduisant à une accumulation de déformation plastique $\delta\varepsilon^p$:

$$\delta\varepsilon^p = \frac{1}{D} \ln \left(\frac{(C/D)^2 - (\sigma_{min} + \sigma_y)^2}{(C/D)^2 - (\sigma_{max} - \sigma_y)^2} \right) \quad (3.95)$$



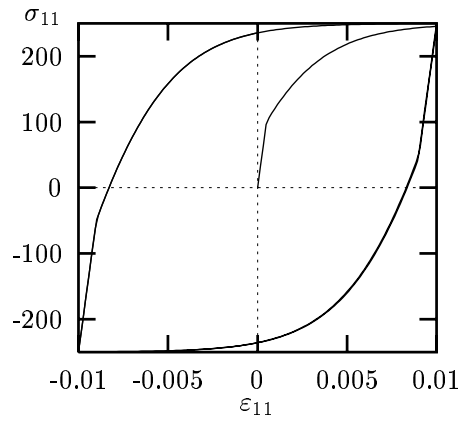
σ_y	100
Q	150
b	5
C	0
D	0

a. Isotrope



σ_y	100
Q	0
b	0
C	10000
D	0

b. Cinématique linéaire



σ_y	100
Q	0
b	0
C	60000
D	400

c. Cinématique non linéaire

Figure 3.4. Réponse élémentaire à un chargement à déformation imposée symétrique ($E=200000$)

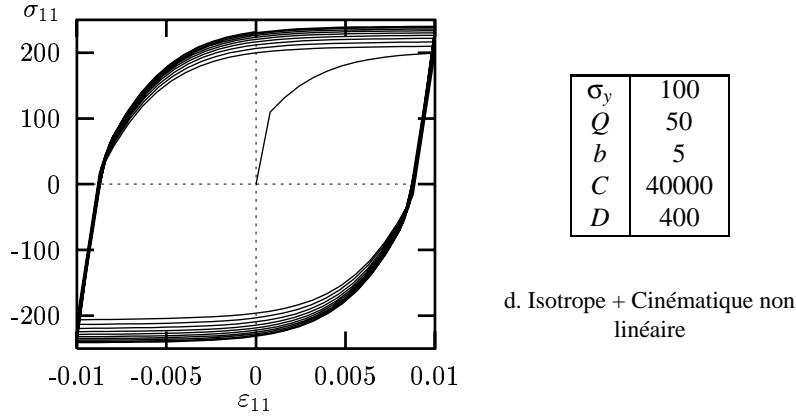


Figure 3.5. Chargement à déformation imposée symétrique avec écrouissage isotrope et cinématique non linéaire ($E=200000$)

Traction imposée et cisaillement alterné (rochet de traction-cisaillement)

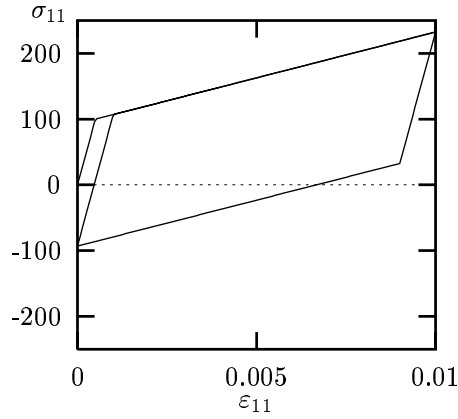
Un autre cas très utile dans la pratique est celui du rochet en traction–cisaillement, ainsi lorsque l'élément de volume subit une traction constante σ_0 et un chargement alterné symétrique entre τ_m et $-\tau_m$. Le modèle d'écrouissage cinématique linéaire donne lieu à une adaptation dès lors que $(\sigma_0)^2 + 3(\tau_m)^2 < (\sigma_y)^2$, et à une accommodation dans le cas contraire (figure 3.8a). Le modèle d'écrouissage cinématique non linéaire donne lieu à une adaptation seulement si :

$$\left(\frac{\sigma_y \sigma_0}{\sigma_y + (C/D)} \right)^2 + 3(\tau_m)^2 < (\sigma_y)^2 \quad (3.96)$$

et à un phénomène de rochet dans le cas contraire, (figure 3.8b), la déformation axiale progressive pouvant être reliée à l'amplitude de déformation plastique de cisaillement :

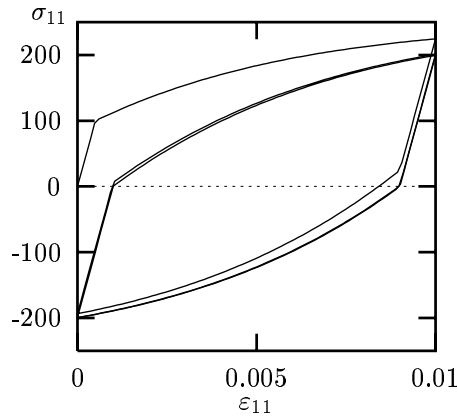
$$\delta \varepsilon^p = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{(\sigma_0)^2}{(\sigma_y + (C/D))^2 - (\sigma_0)^2} \right)^{1/2} \Delta \varepsilon_{12}^p \quad (3.97)$$

Aucune des deux hypothèses d'évolution d'écrouissage n'est vraiment satisfaisante, dans la mesure où l'écrouissage cinématique linéaire nie la présence de rochet, qui existe bel et bien dans la réalité, et où l'écrouissage cinématique non linéaire le surestime.



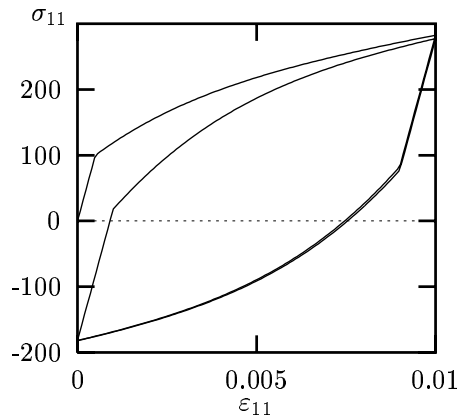
σ_y	100
Q	0
b	0
C	15000
D	0

a. Cinématique linéaire



σ_y	100
Q	0
b	0
C	30000
D	200

b. Cinématique non linéaire



σ_y	100
Q	0
b	0
C_1	40000
D_1	400
C_2	10000

c. Cinématique linéaire + cinématique non linéaire

Figure 3.6. Réponse obtenue en déformation imposée non symétrique ($E=200000$)

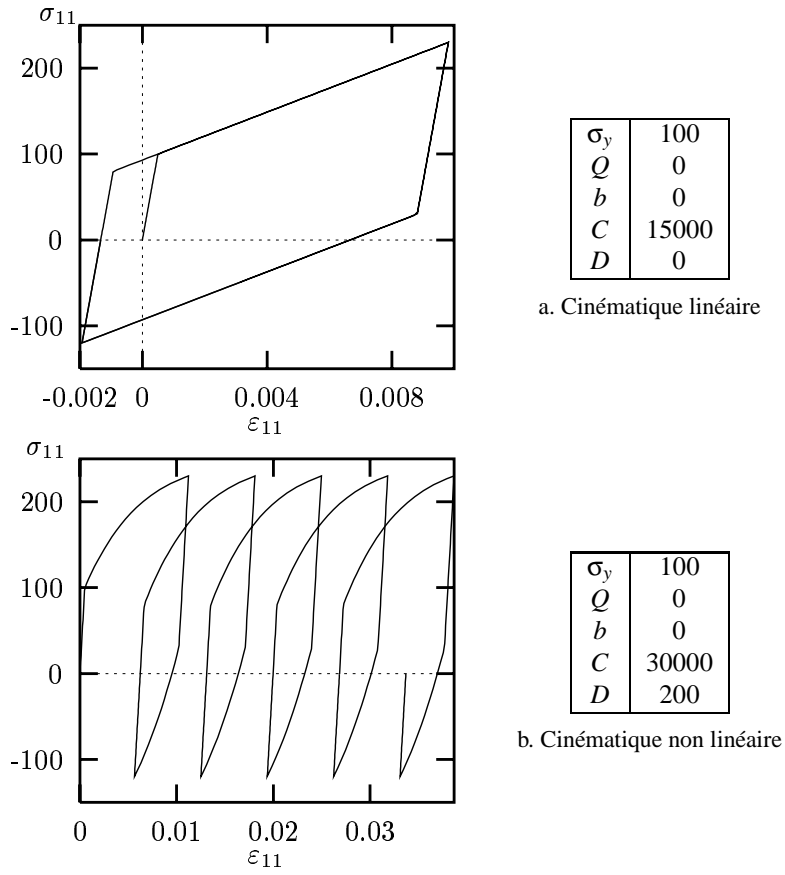
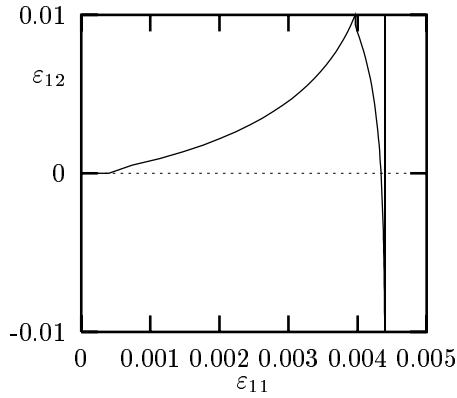
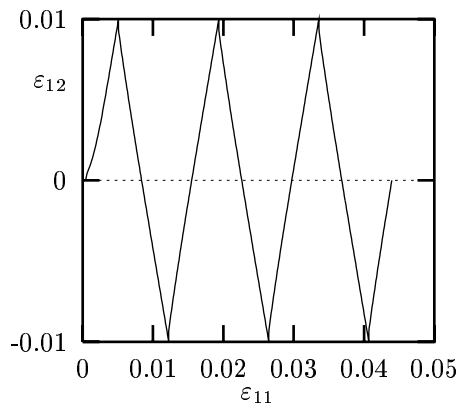


Figure 3.7. Réponse obtenue en contrainte imposée non symétrique (rochet 1D) ($E=200000$)



σ_y	100
Q	0
b	0
C	20000
D	0

a. Cinématique linéaire



σ_y	100
Q	0
b	0
C	30000
D	200

b. Cinématique non linéaire

Figure 3.8. Traction imposée et cisaillement alterné (rochet de traction-cisaillement) ($E=200000$)

3.8. Quelques variantes classiques

3.8.1. Multicinématique

Une description plus fine de la courbure de la courbe de traction expérimentale, et une meilleure description des effets de redistribution de contrainte, en particulier aux faibles déformations plastiques, est obtenue dans le cadre du modèle d'écrouissage cinématique en superposant plusieurs variables X_i . Chacune de ces variables est indépendante, et le nouveau modèle ainsi défini ne fait qu'introduire une souplesse dans l'identification, à l'aide d'un développement faisant intervenir des exponentielles dont

les coefficients D_i sont d'ordres de grandeur différents :

$$\underline{X} = \sum_i \underline{X}_i = \frac{2}{3} C_i \underline{\alpha}_i \quad \text{avec} \quad \underline{\alpha}_i = \underline{\xi}^p - \frac{3D_i}{2C_i} \underline{X}_i \dot{p} \quad (3.98)$$

3.8.2. Modification du terme de rappel

La proposition de la forme du terme de rappel, dont la construction géométrique a initialement été proposée par Mróz [MRÓ 67], a été largement commentée depuis lors. On compte de nombreuses modifications, qui laissent toutes le modèle sous la forme :

$$\underline{\alpha} = \underline{m} \dot{p} \quad \text{avec} \quad \underline{m} = \underline{n} - \frac{3D}{2C} \underline{\Phi} : \underline{X} \quad (3.99)$$

Modification d'intensité

Dans ce cas, le tenseur $\underline{\Phi}$ de l'équation 3.99 est simplement proportionnel à l'identité. La modification la plus simple consiste à choisir

$$\underline{\Phi} = (\phi_\infty + (1 - \phi_\infty) \exp(-\omega p)) \underline{I} \quad (3.100)$$

ce qui permet de faire évoluer la forme de l'écoulement cinématique entre le cycle initial (vitesse de saturation D , asymptote C/D) et le cycle stabilisé (vitesse de saturation $\phi_\infty D$, asymptote $C/(\phi_\infty D)$) [MAR 89].

En présence de chargements à déformation imposée non symétrique, l'expérience montre qu'une redistribution de contrainte s'opère pour les amplitudes importantes, mais pas ou peu pour les amplitudes plus faibles. Cet effet peut être représenté en superposant un grand nombre de cinématiques, comme indiqué au paragraphe précédent, mais il peut aussi être judicieux de faire appel à une forme d'évolution qui supprime le terme de rappel pour les faibles amplitudes, donc qui revient à utiliser un écoulement cinématique linéaire dans ce cas [CHA 91]. Une approche de ce type a aussi été utilisée par d'autres auteurs [OHN 93a, OHN 93b].

$$\underline{\Phi} = \left\langle \frac{DJ(\underline{X}) - \omega C}{1 - \omega} \right\rangle^{m_1} \frac{1}{(DJ(\underline{X}))^{m_2}} \underline{I} \quad (3.101)$$

On retrouve un modèle classique lorsque $m_1 = m_2$ et que $\omega = 0$. Sinon, le terme de rappel n'est présent que lorsque le second invariant de \underline{X} dépasse la valeur $\omega C/D$, la valeur de ω étant comprise entre 0 et 1.

Évanescence radiale

Les propriétés de rochet multiaxial sont liées à la direction d'écoulement, qui, dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire, a une composante nulle selon la composante 11, pour un cycle de charge en cisaillement à contrainte axiale imposée, parce que la composante 11 de la variable cinématique augmente jusqu'à rencontrer le niveau de contrainte imposé. Cela n'est pas le cas avec l'écrouissage cinématique non linéaire, à cause du terme de rappel, qui n'est pas colinéaire à la direction de l'écoulement plastique. Le modèle d'évanescence radiale [BUR 87] projette le terme de rappel sur la normale \underline{n} , et permet donc en rochet 2D de régler la déformation progressive, en considérant des couples d'écrouissage cinématique, l'un avec terme de rappel ordinaire, l'autre avec évanescence radiale. Il est rigoureusement identique au modèle cinématique non linéaire en chargement proportionnel.

$$\underline{\Phi} = \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (3.102)$$

La figure 3.9 illustre sur un exemple simple le comportement de ce type de modèle. En figure 3.9a, le chargement est à contrainte imposée, avec une valeur axiale constante de 100 MPa, et une valeur en cisaillement qui oscille entre +150 MPa et -150 MPa. L'écrouissage cinématique est découpé en deux parties, l'une possédant un terme de rappel classique, l'autre un terme à évanescence radiale, avec le même coefficient $D = 300$, la somme des deux coefficients C étant constante (60000 MPa), ce qui conduit exactement au même modèle sous chargement uniaxial. On repère par η la fraction de chaque type d'écrouissage, $\eta = 1$ correspondant à l'écrouissage classique, et, par exemple, $\eta = 0.75$ à une valeur de C de 45000 pour l'écrouissage classique et de 15000 pour l'évanescence radiale. On retrouve classiquement la déformation progressive habituelle pour $\eta = 1$, tandis que la déformation progressive s'arrête (plus ou moins loin) dans tous les autres cas. Par ailleurs, la figure 3.9b montre l'évolution de la déformation axiale lorsque, après avoir effectué 20 cycles de rochet, on ramène la contrainte axiale à 0. Il y a pour chaque cas un léger rochet en arrière, la déformation axiale finale restant positive.

Il est à noter que dans la littérature, plusieurs auteurs, au lieu de «dédoubler» les variables comme indiqué ici, se contentent d'utiliser un terme de rappel «mixte», comportant une partie classique et une partie radiale, dans une variable d'écrouissage unique. Cette règle n'est évidemment pas identique, et paraît plus difficile à identifier.

3.8.3. Autres modèles pour la déformation progressive

Sur les problèmes de déformation progressive, il existe une très importante bibliographie, sur élément de volume, sous chargement uniaxial et multiaxial, et sur structure. En se restreignant à l'élément de volume, on retiendra parmi d'autres

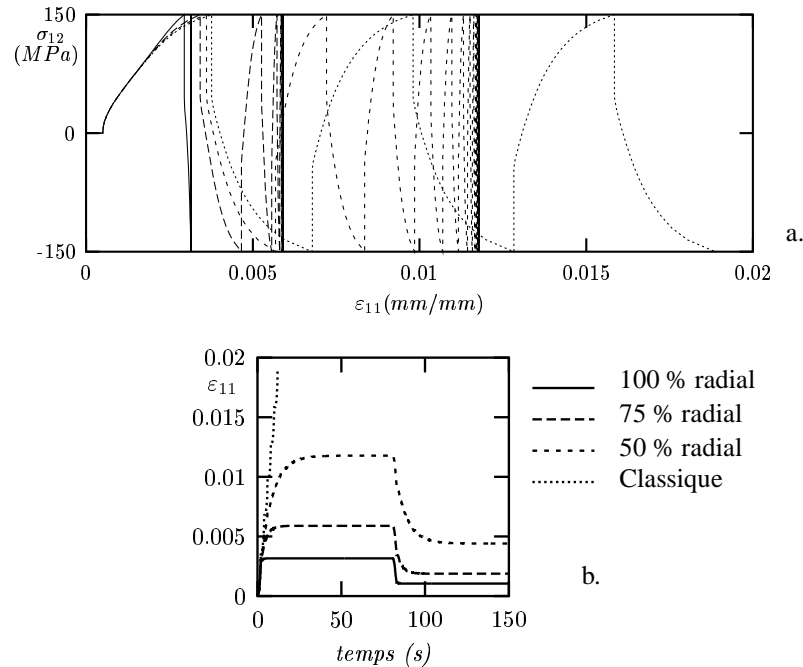


Figure 3.9. Illustration de l'effet de l'«évanescence radiale» sur le rochet de traction–cisaillement : a. Variation de la distance d'arrêt, b. Retour en arrière en cas de décharge

[OHN 93a, OHN 93b, CHA 94, HAS 94a, MAC 95], pour le cas uniaxial, et [GUI 92, HAS 94b, DEL 95, JIA 94, TAH 99], pour le rochet de traction–cisaillement ou le rochet biaxial.

3.8.4. Effet de mémoire

Certains matériaux comme les aciers inoxydables austénitiques présentent de forts «effets de mémoire» de la déformation plastique maximale, c'est-à-dire que, à la suite d'un chargement à grande déformation, le comportement qui suit (par exemple en chargement cyclique à faible amplitude) présente un durcissement important par rapport au comportement de référence à ce même niveau de chargement. Cet effet peut se modéliser à l'aide d'une surface de charge dans l'espace des déformations plastiques, qui conserve donc en mémoire au cours de l'histoire du chargement la valeur la plus grande atteinte, par exemple pour la déformation équivalente de von Mises. Le processus de mémorisation peut être total ou progressif. La variable ainsi obtenue peut ensuite être utilisée dans le modèle décrit au paragraphe précédent, par exemple en agissant sur l'asymptote de la variable d'écrouissage isotrope [CHA 79b].

3.8.5. Durcissement puis adoucissement

Certains alliages présentent sous chargement cyclique un durcissement suivi d'un adoucissement. Ce genre de comportement peut simplement être représenté en modifiant la forme de la règle d'érouissage isotrope. Il suffit d'employer deux exponentielles fonction de la déformation plastique cumulée, l'une croissante, avec un coefficient b élevé (variation rapide), l'autre, décroissante, avec un coefficient b faible (variation lente).

3.8.6. Chargement non proportionnel

En chargement non proportionnel, certains matériaux présentent des érouissages exceptionnels, qui dépassent largement les niveaux obtenus dans les chargements proportionnels de niveaux équivalents. Le durcissement supplémentaire est d'autant plus élevé que le trajet de chargement est complexe. Cet effet s'explique au niveau microstructural notamment par le fait que les trajets complexes mettent en œuvre un nombre plus élevé de mécanismes (systèmes de glissement, maclage), qui se gênent mutuellement. Une modélisation possible consiste à augmenter ici encore l'asymptote de l'érouissage isotrope, au moyen d'un paramètre de non-proportionnalité [BEN 87]. Un grand nombre d'«angles» peuvent être envisagés pour mesurer le degré de non-proportionnalité, depuis la simple valeur $\varrho : \dot{\varrho}/J(\varrho)J(\varrho)$ jusqu'à des valeurs plus complexes évaluées à partir des contraintes internes cinématiques [CAL 97]. On montrera également que ce type d'effet est naturellement présent dans les modèles cristallographiques (voir en section ??), dans lesquels les chargements multiaxiaux non-proportionnels provoquent l'activation d'un nombre plus grand de systèmes de glissement, donc plus de durcissement que les chargements proportionnels.

3.8.7. Comportement plastique anisotrope

La forme initiale de la limite du domaine d'élasticité étant caractérisée, il reste encore à déterminer l'évolution de la surface de charge au cours de l'érouissage. L'anisotropie peut s'écrire de façon assez naturelle sur l'érouissage cinématique, il suffit de remplacer les coefficients C et D par des tenseurs d'ordre 4, et de choisir un critère de la forme suivante [CHA 96a] :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J_B(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - \sigma - y \quad (3.103)$$

$$\text{avec : } J_B(\underline{\sigma} - \underline{X}) = ((\underline{\sigma} - \underline{X}) : \underline{\underline{B}} : (\underline{\sigma} - \underline{X}))^{1/2} \quad (3.104)$$

$$\text{et : } \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\alpha}} \quad \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p - \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{X}} \dot{p} \quad (3.105)$$

D'autres modèles, plus complexes [DEL 96], font intervenir plusieurs variables cinématiques imbriquées. On se trouve alors à devoir utiliser quatre tenseurs d'ordre

quatre, \tilde{M} , \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{R} qui doivent tous respecter la condition énoncée en section 2.5.4 pour respecter l'incompressibilité. L'évolution de la contrainte interne fait intervenir trois variables imbriquées

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\alpha}}' &= \frac{2}{3} Y^* \tilde{N} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^p - \tilde{Q} : (\tilde{X}' - \tilde{X}'^{(1)}) \dot{p} \\ &\quad - \lambda_r \sinh \left(\frac{J_R(\tilde{\alpha})}{\alpha_0} \right)^{m_0} \tilde{N} : \tilde{R} : \frac{\tilde{\alpha}}{J_R(\tilde{\alpha})} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}'^{(1)} = \frac{2}{3} Y^* \tilde{N} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^p - \tilde{Q} : (\tilde{X}'^{(1)} - \tilde{X}'^{(2)}) \dot{p} \quad (3.107)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}'^{(2)} = \frac{2}{3} Y^* \tilde{N} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^p - \tilde{Q} : \tilde{X}'^{(2)} \dot{p} \quad (3.108)$$

$$\text{avec : } \tilde{X} = p \tilde{\alpha} \quad ; \quad \tilde{X}^{(1)} = p_1 \tilde{\alpha}^{(1)} \quad ; \quad \tilde{X}^{(2)} = p_2 \tilde{\alpha}^{(2)} \quad (3.109)$$

Dans sa version d'origine, ce modèle comporte un terme de restauration dans l'équation 3.106, qui sera discuté dans le prochain paragraphe, et une formulation viscoplastique. La déformation viscoplastique respecte la règle de normalité avec une loi d'écoulement en \sinh pour rendre compte de la forte non-linéarité de la vitesse de fluage en fonction de la contrainte :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \dot{v} \frac{\tilde{M} : (\tilde{\sigma} - \tilde{X})}{J_M(\tilde{\sigma} - \tilde{X})} \quad \text{avec} \quad \dot{v} = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \sinh \left(\frac{J_M(\tilde{\sigma} - \tilde{X})}{N_0} \right) \right\}^n \quad (3.110)$$

Il existe aussi des propositions pour modéliser l'anisotropie induite par la déformation ; il s'agit par exemple du modèle de Baltov–Sawczuck [BAL 65], qui est obtenu en posant respectivement pour f et \tilde{B} :

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{X}, R) = J_B(\tilde{\sigma} - \tilde{X}) - R - \sigma_y \quad \text{avec} \quad \tilde{B} = \tilde{I} - (1/3)\tilde{I} \otimes \tilde{I} + A \tilde{\varepsilon}^p \otimes \tilde{\varepsilon}^p \quad (3.111)$$

Les deux critères cités ci-dessus se contentent d'utiliser des expressions du second degré en contrainte. En fait, les invariants utilisables sont bien plus variés [BOE 78]. Dans le cas des monocristaux à symétrie cubique, des propositions de critères utilisant des invariants d'ordre élevé ont été faites, ainsi [NOU 92, NOU 95] :

$$f = \left\{ \left(\left[\frac{3}{2} (I'_1 + 2a_4 I'_4)^2 + 3a_8 I'_8 \right]^3 - (a_6 I'_6)^4 \right)^{1/12} - R \right. \quad (3.112)$$

avec :

$$I'_1 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 \quad (3.113)$$

$$I'_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} \quad (3.114)$$

$$I'_4 = S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 \quad (3.115)$$

$$I'_8 = S_{12}^4 + S_{23}^4 + S_{31}^4 \quad (3.116)$$

où les S_{ij} désignent les composantes du déviateur de $\underline{\sigma} - \underline{X}$ dans le repère cristallographique.

3.9. Écrouissage et restauration en viscoplasticité

3.9.1. Écrouissage cinématique et isotrope

L'ensemble des modèles qui ont été décrits plus haut peuvent bien entendu se reformuler dans le cadre de la viscoplasticité. On obtient alors un modèle à *écrouissage additif* ([LEM 85b]). Comme indiqué par la formule 2.76, cela revient à introduire une fonction $\Omega(f)$ qui jouera le rôle de potentiel viscoplastique. Choisir pour Ω une fonction puissance revient à introduire deux nouveaux coefficients K et n :

$$\Omega(f) = \frac{K}{n+1} \left(\frac{\langle f \rangle}{K} \right)^{n+1} \quad (3.117)$$

La valeur de l'intensité d'écoulement viscoplastique attachée à cette expression est :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle f \rangle}{K} \right)^n \quad (3.118)$$

Ce dernier modèle a été largement développé par Chaboche ([CHA 89]), il permet d'exprimer le déviateur des contraintes en fonction des variables internes, et d'identifier ainsi les contraintes internes et visqueuses définies précédemment.

$$\underline{s} = \underline{X} + (\sigma_y + R + K(\dot{p})^{1/n}) \underline{n} \quad \text{avec} \quad \underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.119)$$

L'expression précédente contient en particulier le modèle de Norton, qui est obtenu en annulant les variables internes et le seuil initial. Celui-ci est uniquement capable de prévoir le fluage secondaire, et ne devrait donc être utilisé qu'avec précautions. Il est néanmoins en général vérifié à très haute température. A contrainte visqueuse constante, le fait de conserver une valeur non nulle pour σ_y conduit à un modèle viscoplastique à seuil constant. La forme comportant à la fois des écrouissages isotrope et cinématique est bien entendu préférable aux températures intermédiaires.

A haute température, il y a réarrangement de la microstructure liée à l'activation thermique, qui produit un adoucissement au cours de la déformation. Il s'ensuit une diminution des contraintes internes, dont il peut être rendu compte formellement en ajoutant un potentiel de restauration au potentiel viscoplastique ordinaire. L'application de ce type de terme s'effectue d'habitude sur le terme d'écrouissage cinématique. Les expressions (3.121) montrent par exemple comment combiner restauration

et écrouissage cinématique linéaire :

$$\Omega(\sigma, A_i) = \frac{K}{n+1} \left(\frac{\langle J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - \sigma_y \rangle}{K} \right)^{n+1} + \frac{3M}{2C(m+1)} \left(\frac{J(\underline{X})}{M} \right)^{m+1} \quad (3.120)$$

$$\dot{\underline{\alpha}} = \dot{\underline{\xi}}^p - \frac{3D}{2C} \underline{X} \dot{p} - \frac{3}{2C} \left(\frac{J(\underline{X})}{M} \right)^m \frac{\underline{X}}{J(\underline{X})} \quad (3.121)$$

En prenant une valeur de m égale à 1, cette expression correspond exactement à l'approche proposée par les métallurgistes dans le cas du «fluage–dislocation» (Orwan). D'autres formes de restauration sont bien sûr envisageables, en particulier sur la variable isotrope.

La restauration conduit à une diminution de la valeur asymptotique de la variable considérée. Ainsi, sous chargement uniaxial, la variable cinématique X ne tend-elle plus vers C/D pour les faibles niveaux de contrainte. Cet effet est important dans les identifications à haute température, car, en son absence, les modèles à écrouissage cinématique conduisent à un fluage limité pour tous les niveaux de contrainte en dessous de $\sigma_y + R + C/D$. La présence de restauration conduit à une valeur asymptotique de X qui tend vers 0 pour les valeurs de contraintes situées juste au-dessus de la limite d'élasticité initiale, ce qui est en général bien mieux en accord avec les données expérimentales. La figure 3.10 montre ainsi les vitesses obtenues en fluage pour une contrainte donnée :

- $\dot{\epsilon}_{init}$ désigne la vitesse initiale, en supposant le chargement suffisamment rapide pour ne pas produire de déformation viscoplastique ;
- $\dot{\epsilon}_s^o$ est la vitesse de déformation viscoplastique stabilisée lorsqu'on ne considère pas de restauration : dans ce cas, le fluage s'arrête pour les contraintes situées entre 100 et 300 MPa ;
- $\dot{\epsilon}_s^r$ est la vitesse de déformation viscoplastique stabilisée en considérant la restauration : il existe alors un régime intermédiaire entre 100 et 300 MPa, pour lequel la valeur asymptotique X_s de X n'est plus $C/D = 200$ MPa, mais est telle que :

$$(C - DX_s)\dot{\epsilon}_s^r - \left(\frac{X_s}{M} \right)^m = 0 \quad (3.122)$$

Cette équation, combinée avec

$$\dot{\epsilon}_s^r = \left(\frac{\sigma_o - X_s - \sigma_y}{K} \right)^n \quad (3.123)$$

donne la solution complète du problème.

De nombreux autres auteurs ont exploité la structure «hiérarchique» des équations de ce paragraphe. Il faut citer ainsi les approches utilisant des écrouissages cinématiques imbriqués [DEL 87, ROU 85a], ou encore le modèle SUVIC. Ce dernier, développé au départ pour représenter le comportement du sel [AUB 99], présente une structure classique avec variables isotrope et cinématique, mais avec des évolutions

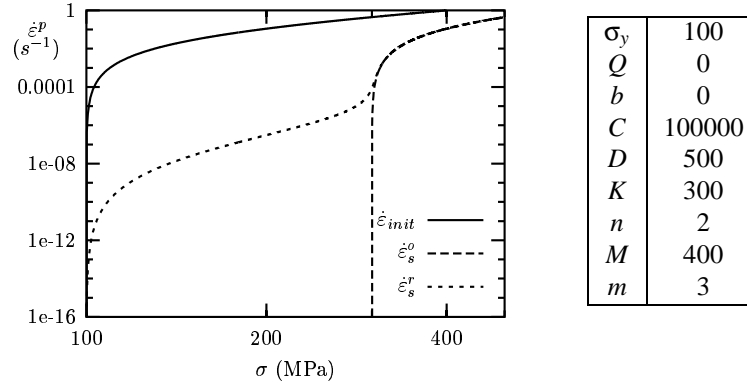


Figure 3.10. Vitesses de déformation plastique obtenues au début du fluage ($\dot{\epsilon}_{init}$), ou en conditions stabilisées, sans ($\dot{\epsilon}_s^o$) et avec ($\dot{\epsilon}_s^r$) restauration

particulièrement sophistiquées :

$$\dot{\nu} = A \left\langle \frac{f(\underline{\sigma} - \underline{B}) - R - R_0}{K + K_0} \right\rangle^n \quad (3.124)$$

avec par exemple :

$$\dot{R} = A_3 \left(1 - \frac{R}{R'} \right) \dot{\nu} - A_4 \left\langle \frac{R - xR'}{C} \right\rangle^p \quad \text{et} \quad R' = R_0 \left(\sinh \left(\frac{\dot{\nu}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n} \right)^m \quad (3.125)$$

Les autres variables d'érouissage (\underline{B} et K) obéissent à des équations du même type.

3.9.2. Vieillessement

L'évolution des propriétés des matériaux considérée d'une manière générale dépasse le cadre de cet exposé. Il faudrait par exemple se référer aux changements de phase, «displacifs» ou par diffusion, pour la modélisation desquels il faut considérer soit une approche micro-macro, soit des composantes supplémentaires de déformation (voir par exemple la récente revue [BER 97]).

Il est par contre aisé de représenter les modifications des propriétés mécaniques liées à l'évolution des précipités. On consultera par exemple [CAI 79], [CHA 95] pour des phénomènes de dissolution-précipitation, ou encore [MAR 89] [CAI 00] pour la coalescence. Dans ce dernier cas, on peut se contenter de considérer une variable de vieillissement scalaire, a , qui évolue vers une valeur asymptotique en fonction du

temps, selon un processus thermiquement activé (avec deux coefficients a_∞ et τ dépendant de la température), et qui intervient dans la définition des variables d'écrouissage :

$$\dot{a} = \frac{a_\infty - a}{\tau} \quad (3.126)$$

$$\sigma_y = R_0(T) + R_0^*(T)(1 - a) \quad (3.127)$$

Ainsi, dans 3.127, la limite d'élasticité initiale contient-elle un terme $R_0^*(T)$ qui disparaîtra avec le vieillissement, conduisant à un adoucissement du matériau. Avec un choix approprié de a_∞ et τ en fonction de la température on peut aussi décrire un effet de durcissement par le temps à faible température, réactivé par les incursions à haute température [CHA 95]

3.9.3. Écrouissage par la déformation («Strain hardening»)

Comme pour le cas du modèle de Norton, le strain hardening est un modèle viscoplastique sans seuil. Il est donc comme celui-ci inutilisable en chargement cyclique. Il est capable de représenter correctement le début du fluage primaire ou la relaxation (mais sans doute pas les deux en même temps). Le modèle est dit à *écrouissage multiplicatif* ([LEM 85b]) ; il sera obtenu en faisant évoluer la contrainte visqueuse en fonction de la déformation cumulée, pour obtenir par exemple en utilisant le critère de von Mises :

$$\dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{J(\underline{\sigma})}{K} \right)^n p^{-n/m} \dot{p} \quad (3.128)$$

Dans le cas des sollicitations uniaxiales, cette équation s'intègre explicitement dans le cas du fluage (3.129), ou dans le cas de la relaxation, en négligeant dans ce dernier cas l'évolution de déformation plastique au cours de la relaxation.

$$\varepsilon^p = \left(\frac{m+n}{m} \left(\frac{J(\underline{\sigma})}{K} \right)^n t \right)^{m/(m+n)} \quad (3.129)$$

3.10. Modèles multimécanismes

3.10.1. Formulation générale

Il convient d'écrire ce type de modèle à chaque fois que la déformation inélastique a sa source dans plusieurs mécanismes distincts. La présente section se limite au cas où il est possible de continuer à traiter l'élasticité de façon classique, et où seule la déformation inélastique se décompose en plusieurs contributions. Il est alors en général possible de distinguer plusieurs sous-ensembles dans les groupes de variables Z

(voir 2.3.5), soit :

$$\{Z\} = \bigcup_s \{Z^s\} \quad (3.130)$$

Dans chaque sous-ensemble $\{Z^s\}$, on distingue une contrainte élémentaire σ^s sur le mécanisme et un ensemble de variables d'écroutissage $Y_{J_s}^s$. Ces sous-ensembles se retrouvent au niveau de l'énergie libre, pour laquelle :

$$\psi = \sum_s \psi_s(Z_{J_s}^s) \quad (3.131)$$

Il reste ensuite le choix de faire intervenir chacun de ces mécanismes dans plusieurs potentiels élémentaires Ω^s , chacun étant rattaché à un mécanisme particulier au travers de son propre critère f^s (équation 3.132), ou à un potentiel unique Ω , chaque mécanisme apportant sa contribution à un même critère global f (3.134) :

$$\dot{\xi}^p = \sum_s \frac{\partial \Omega^s}{\partial \sigma} = \sum_s \frac{\partial \Omega^s}{\partial f^s} \frac{\partial f^s}{\partial \sigma} = \sum_s \frac{\partial \Omega^s}{\partial f^s} \tilde{n}^s : \tilde{B}^s \quad (3.132)$$

$$\text{avec } \tilde{n}^s = \frac{\partial f^s}{\partial \sigma^s} \text{ et } \tilde{B}^s = \frac{\partial \sigma^s}{\partial \sigma} \quad (3.133)$$

$$\dot{\xi}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \sum_s \tilde{n}^s : \tilde{B}^s \quad (3.134)$$

$$\text{avec } \tilde{n}^s = \frac{\partial f}{\partial \sigma^s} \text{ et } \tilde{B}^s = \frac{\partial \sigma^s}{\partial \sigma} \quad (3.135)$$

Le tenseur \tilde{B}^s représente dans certains cas une partie de la loi de concentration qui fournit la contrainte locale en fonction de la contrainte globale pour le cas de matériaux hétérogènes. On se contentera ici de décrire des approches dans lesquelles les tenseurs \tilde{B}^s sont des tenseurs identité.

La première méthode peut s'appliquer, au choix, en considérant des mécanismes de même nature (tous plastiques, ou tous viscoplastiques) ou en panachant les contributions. On doit à Koiter [KOI 60] et Mandel [MAN 65] les travaux originaux concernant ce type d'approche en plasticité. Dans la suite, on commence par exprimer au paragraphe 3.10.2 la première hypothèse, dans laquelle tous les mécanismes sont de nature identique.

Cette voie est celle qui est naturellement suivie pour construire des modèles de monocristaux (paragraphe 3.10.3 : il suffit pour cela d'observer que chaque système de glissement représente un mécanisme, et que la contrainte élémentaire vue par chaque mécanisme est la contrainte macroscopique (pas de transition d'échelle).

On montre ensuite d'autres applications de multimécanismes/multicritères à deux mécanismes, en considérant chacune des trois possibilités, plastique-plastique, viscoplastique-viscoplastique, et plastique-viscoplastique (section 3.10.5).

Au contraire, si l'on se tourne vers un modèle à un seul potentiel, la réponse sera uniquement plastique ou viscoplastique, comme indiqué au paragraphe 3.10.6.

3.10.2. Modèles multimécanismes–multicritères

Leur construction suit la même voie que les modèles ordinaires, avec une formulation plastique ou viscoplastique. En se limitant pour des raisons de simplicité à une forme associée, le point de départ est une collection de potentiels $\Omega^s, s = 1..S$, dépendant de $\underline{\sigma}$ et des variables flux A_I , au travers de la fonction de charge f^s . En viscoplasticité, le problème se résout de façon immédiate, dans le cas d'un matériau standard généralisé :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \sum_s \frac{\partial \Omega^s}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{v}^s \frac{\partial f^s}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.136)$$

$$\dot{\alpha}_I = \sum_s \frac{\partial \Omega^s}{\partial A_I} = \dot{v}^s \frac{\partial f^s}{\partial A_I} \quad (3.137)$$

$$\text{en posant } \dot{v}^s = \frac{\partial \Omega^r}{\partial f^s} \quad (3.138)$$

On conserverait un modèle standard en choisissant pour α_I une évolution de la forme $\dot{\alpha}_I = \dot{v}^s M_I^s$ à la place de 3.137. La dissipation s'écrit :

$$\phi_I = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I \quad (3.139)$$

En plasticité, les équations précédentes ne suffisent pas, on remplace les \dot{v}^s par un vecteur de multiplicateurs plastiques, qu'il faut déterminer en résolvant le système linéaire formé par les S conditions de cohérence $\dot{f}^r = 0$:

$$\dot{f}^r = \underline{n}^r : \underline{\dot{\sigma}} + Y_I^r \dot{A}_I \quad \text{avec} \quad \underline{n}^r = \frac{\partial f^r}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{et} \quad Y_I^r = \frac{\partial f^r}{\partial A_I} \quad (3.140)$$

On peut exprimer la vitesse d'évolution des variables d'écroutissage :

$$\dot{A}_I = \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_K} \dot{\alpha}_K = - \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_K} Y_K^s \dot{\lambda}^s \quad (3.141)$$

La combinaison de 3.140 et 3.141 conduit alors au système annoncé :

$$\underline{n}^r : \underline{\dot{\sigma}} - H_{rs} \dot{\lambda}^s = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad H_{rs} = Y_I^r \frac{\partial A_I}{\partial \alpha_K} Y_K^s \quad (3.142)$$

Dans ce cas, l'écroutissage se manifeste au travers d'une *matrice d'interaction* symétrique ¹, dont les composantes H_{rs} expriment le durcissement apporté par le mécanisme s sur le mécanisme r .

Sachant que :

$$\underline{n}^r : \underline{\dot{\sigma}} = \underline{n}^r : \underline{\dot{\Lambda}} : (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^p) \quad (3.143)$$

¹ car $\partial A_I / \partial \alpha_K = \partial A_K / \partial \alpha_I = \partial^2 \Psi / \partial \alpha_I \partial \alpha_K$

il est également possible d'établir la relation en termes de vitesse de déformation totale, qui donne accès à la matrice tangente, en projetant sur \underline{n}^s chaque membre de l'équation 3.143, et en utilisant 3.142 :

$$(\underline{n}^r : \underline{\Lambda} : \underline{n}^s + H_{rs}) \dot{\lambda}^s = \underline{n}^r : \underline{\Lambda} : \dot{\underline{\epsilon}} \quad (3.144)$$

Chacun de ces systèmes ne porte bien entendu que sur ceux des mécanismes qui sont actifs. Ils sont déterminés de façon unique si on continue d'admettre l'hypothèse de maximisation de la dissipation intrinsèque, en effet, la combinaison de systèmes actifs doit maximiser la dissipation, soit minimiser la somme $A_I \dot{\alpha}_I$ dans l'équation 3.139.

Pour le cas où on ne considère plus de modèle associé, la matrice précédente ne reste pas symétrique, car on obtient un terme de type $\underline{n}^r : \underline{\Lambda} : \underline{n}^s$.

3.10.3. Un modèle de monocristal

Exposé du modèle

Le modèle de cette section est associé, non standard généralisé. Il constitue une application au monocristal du modèle d'écrouissage non linéaire développé en partie 3.7. Il comporte donc à la fois des variables d'écrouissage isotrope r^r et cinématique x^r , respectivement associées aux variables d'état ρ^r et cinématique α^r , pour chaque système de glissement r . En choisissant une forme quadratique de chacune des variables d'état pour la partie inélastique de l'énergie libre, on obtient successivement, en introduisant un couplage sur les variables isotropes :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} c \sum_s (\alpha^s)^2 + \frac{1}{2} Q \sum_r \sum_s h_{rs} \rho^r \rho^s \quad (3.145)$$

et :

$$x^r = c\alpha^r \quad ; \quad r^r = bQ \sum_s h_{rs} \rho^s \quad (3.146)$$

La matrice de composante h_{rs} est une matrice d'interaction, qui représente à la fois l'*auto-écrouissage* sur chaque système, et l'*écrouissage latent* [KOC 66, FRA 80] entre les systèmes. La forme générale du modèle correspond à un monocristal se déformant par glissement sur S systèmes r , dans des plans de normale \underline{n}^r selon une direction \underline{l}^r . On note \underline{m}^r le tenseur d'orientation, qui permet de calculer la cission sur le système r à partir du tenseur de contrainte, τ_0 la valeur de la cission critique initiale, et on pose :

$$f^r = |\tau^r - x^r| - r^r - \tau_0 \quad (3.147)$$

$$\text{avec } \tau^r = \underline{\sigma} : \underline{m}^r = \underline{\sigma} : \frac{1}{2} (\underline{l}^r \otimes \underline{n}^r + \underline{n}^r \otimes \underline{l}^r) \quad (3.148)$$

On obtient une formulation viscoplastique à partir du potentiel viscoplastique Ω [RIC 70, MAN 72] :

$$\Omega = \sum_r \Omega_r(f^r) = \frac{K}{n+1} \sum_r \left\langle \frac{f^r}{K} \right\rangle^{n+1} \quad (3.149)$$

On en déduit :

$$\dot{\xi}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \sum_r \dot{\gamma}^r : \underline{m}^r \quad (3.150)$$

$$\text{avec } \dot{v}^r = \frac{\partial \Omega}{\partial f^r} = \left\langle \frac{f^r}{K} \right\rangle^n \quad (3.151)$$

$$\text{et } \dot{\gamma}^r = \dot{v}^r \text{signe}(\tau^r - x^r) \quad (3.152)$$

On complète le modèle par la donnée des vitesses des variables d'état :

$$\dot{\alpha}^r = (\text{signe}(\tau^r - x^r) - d\alpha^r)\dot{v}^r \quad (3.153)$$

$$\dot{\rho}^r = (1 - b\rho^r)\dot{v}^r \quad (3.154)$$

La combinaison des équations 3.146 et 3.154 conduit à :

$$r^r = Q \sum_s h_{rs} (1 - \exp(-bv^s)) \quad (3.155)$$

Outre τ_0 , le modèle compte deux coefficients, K et n , caractérisant la viscosité, deux autres, c et d pour l'écroissage cinématique, tandis que b et la matrice h_{rs} définissent l'écroissage isotrope. La dissipation s'écrit :

$$\phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\xi}^p - \sum_s x^s \dot{\alpha}^s - \sum_s r^s \dot{\rho}^s \quad (3.156)$$

$$= \sum_s (\tau^s \dot{\gamma}^s - x^s (\text{signe}(\tau^s - x^s) - d\alpha^s) \dot{v}^s - r^s (1 - b\rho^s) \dot{v}^s) \quad (3.157)$$

$$= \sum_s (f^s + \tau_0 + \frac{d}{c} (x^s)^2 + br^s \rho^s) \dot{v}^s \quad (3.158)$$

Les quatre termes du membre de droite dans l'équation 3.158 correspondent respectivement à la dissipation visqueuse (qui serait nulle pour un modèle de plasticité), au frottement, et aux non-linéarités de l'écroissage cinématique et isotrope. La dissipation est automatiquement positive pour des matériaux durcissants. Dans le cas d'un matériau plastique, on retrouverait la formule 3.142, avec :

$$H_{rs} = (c \text{signe}(\tau^s - x^s) - dx^s) \delta_{rs} + Qbh_{rs} \exp(-bv^s) \quad (3.159)$$

Le problème du choix des systèmes actifs se pose encore dans ce cas-là. La question a été traitée à l'origine par Taylor [TAY 38a], sans variable cinématique, pour le cas d'une matrice d'interaction «isotrope» (tous les termes égaux à 1), ce qui conduit à

une valeur unique pour toutes les variables r^s , et avec une évolution linéaire de celles-ci en fonction des vitesses de glissement. Parmi toutes les configurations possibles, l'auteur propose de choisir celle qui minimise la somme des vitesses sur tous les systèmes actifs. Cette hypothèse se retrouve simplement ici, en évaluant la dissipation (équation 3.156) avec les mêmes hypothèses (pas de x^s , $b = 0$). En effet, en désignant par r la valeur commune de toutes les cissions critiques, il vient simplement :

$$\phi_1 = \underline{\sigma} : \underline{\xi}^p - r \sum_s \dot{\gamma}^s \quad (3.160)$$

Cette «minimisation du travail interne» est équivalente à une «maximisation du travail plastique» [BIS 51], comme le montre le traitement du problème par les techniques de programmation non linéaire [CHI 69]. Le fait de maximiser la dissipation évaluée en 3.156 constitue une généralisation des méthodes précédentes. Pour un modèle général, la sélection des systèmes actifs ne conduit plus nécessairement à une somme $\sum_s \dot{\gamma}^s$ minimale. Il faut enfin noter qu'une autre méthode de sélection, basée sur une méthode de décomposition de la matrice singulière [GOL 83] a récemment été proposée [ANA 96]. Elle conduit à minimiser la norme de la vitesse de glissement sous la forme $\sum_s (\dot{\gamma}^s)^{1/2}$.

Exemples d'application

Le fait de travailler avec une approche cristallographique et le critère de Schmid conduit à un domaine d'élasticité global linéaire par morceaux, construit à partir du résultat sur chaque système. Ainsi la figure 3.11 illustre-t-elle le fait que, selon la famille de système de glissement qui est active, la forme du critère varie : on a représenté le résultat obtenu pour le cas d'un matériau de structure cubique faces centrées, en supposant d'abord que seuls les systèmes octaédriques sont actifs, puis en supposant que les systèmes cubiques le sont également, avec la même valeur de cission critique initiale r_0 . On note aussi que le résultat obtenu est différent selon le repère considéré pour appliquer le chargement traction-cisaillement. On suppose que le tenseur de contraintes est de la forme suivante, où \underline{N} et \underline{M} sont deux vecteurs unitaires orthogonaux :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{N} \otimes \underline{N} + \tau (\underline{N} \otimes \underline{M} + \underline{M} \otimes \underline{N}) \quad (3.161)$$

La cission résolue τ^s sur le système s de plan \underline{n}^s et de direction \underline{l}^s vaut dans ce cas :

$$\tau^s = \sigma (\underline{N} \cdot \underline{n}^s) (\underline{N} \cdot \underline{l}^s) + \tau [(\underline{N} \cdot \underline{n}^s) (\underline{M} \cdot \underline{l}^s) + (\underline{N} \cdot \underline{l}^s) (\underline{M} \cdot \underline{n}^s)] \quad (3.162)$$

ce qui donne par exemple un résultat différent si, ayant choisi pour \underline{N} la direction (001), on considère que le cisaillement s'effectue selon une direction (010) (figure 3.11a) ou $(\bar{1}10)$ (figure 3.11b) [NOU 94]. Le fait de négliger ce résultat a conduit à de nombreuses erreurs dans l'analyse de résultats de traction-torsion sur tubes monocristallins dans la littérature récente.

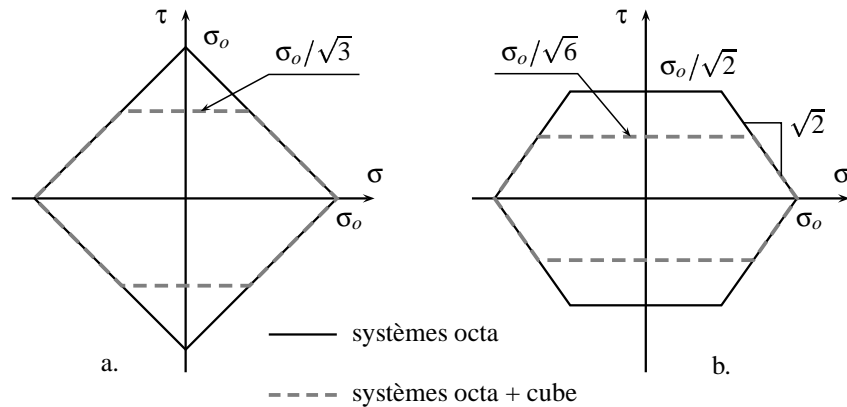


Figure 3.11. *Domaine d'élasticité initial d'un monocristal en traction cisaillement, en fonction des systèmes de glissement actifs, et de la direction de sollicitation, (a) $\underline{N} : 001$; $\underline{M} : 010$, (b) $\underline{N} : 001$; $\underline{M} : \bar{1}10$*

Cette influence de la cristallographie se fait sentir de plusieurs manières, qui sont illustrées en figure 3.12. La planche 3.12a montre la réponse en contrainte dans le plan σ_{11} – σ_{12} à deux chargements à déformation imposée, qui présentent la même déformation maximale en ε_{11} , et une faible variation en ε_{12} : cela suffit pour changer considérablement la direction d'écoulement, dans la mesure où le point représentatif est «attiré» par les points multiples de la surface de charge. Le trajet obtenu est uniquement le résultat de la règle de normalité. Seuls les systèmes octaédriques sont introduits dans le modèle. Les mêmes coefficients sont utilisés pour la simulation de la figure 3.12b, tandis que la famille de systèmes cubiques est introduite pour la simulation de la figure 3.12c. La réponse du matériau est bien sûr très différente dans le second cas, à la fois par le niveau de contrainte, qui est plus faible, et par la direction d'écoulement.

La figure 3.13 quant à elle montre les résultats typiques obtenus en traction selon différentes directions cristallographiques pour un matériau CFC.

Remarque

Le but de l'exposé précédent est de faire ressortir la similitude entre les équations nécessaires pour la bonne description du comportement du monocristal et celles des modèles macroscopiques, indépendamment de la formulation en grandes transformations. Il diffère sensiblement de la littérature classique sur le sujet. Dans celle-ci, après les travaux de Taylor [TAY 38b], les principales étapes sont la formulation des modèles à plusieurs mécanismes conduisant à la description du glissement multiple [MAN 65, HIL 66], l'approche par variables internes et le potentiel visco-

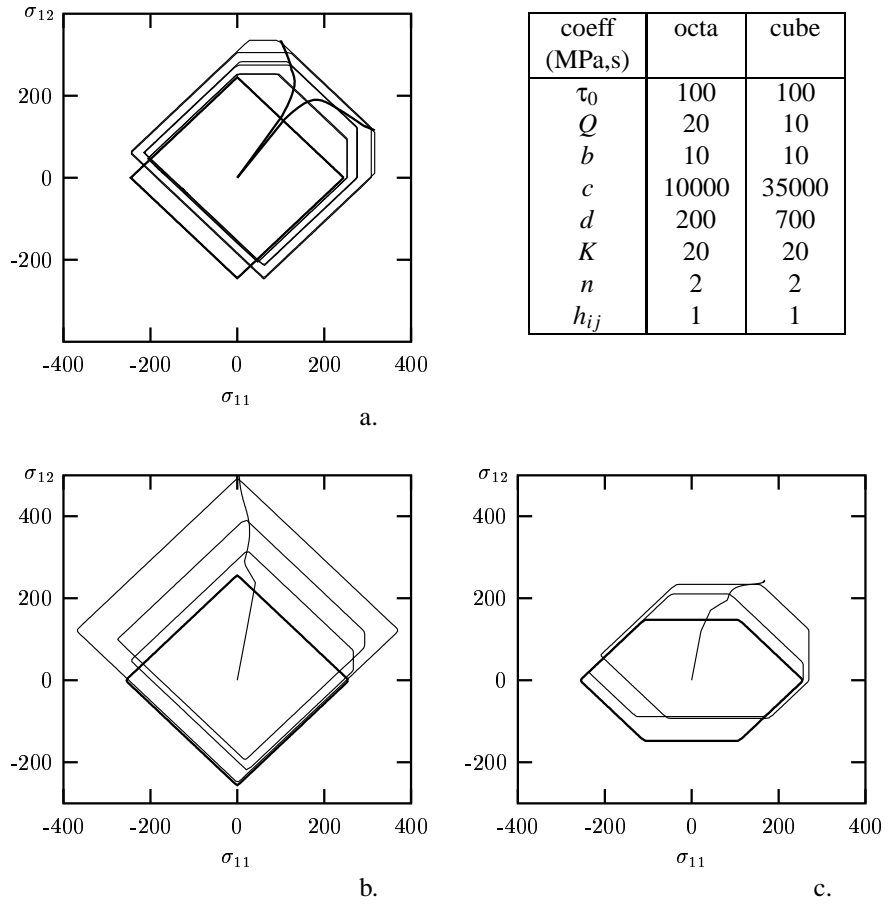


Figure 3.12. Chargements biaxiaux à déformation imposée, (a) influence d'une faible modification sur le chemin de chargement (trajet supérieur : $\epsilon_{12}^{max}/\epsilon_{11}^{max} = 0,525$; trajet inférieur : $\epsilon_{12}^{max}/\epsilon_{11}^{max} = 0,475$) (b) et (c) influence de la cristallographie pour un chargement donné ((b) avec systèmes octaédriques, (c) avec systèmes octaédriques et cubiques (trajets : $\epsilon_{12}^{max}/\epsilon_{11}^{max} = 2$))

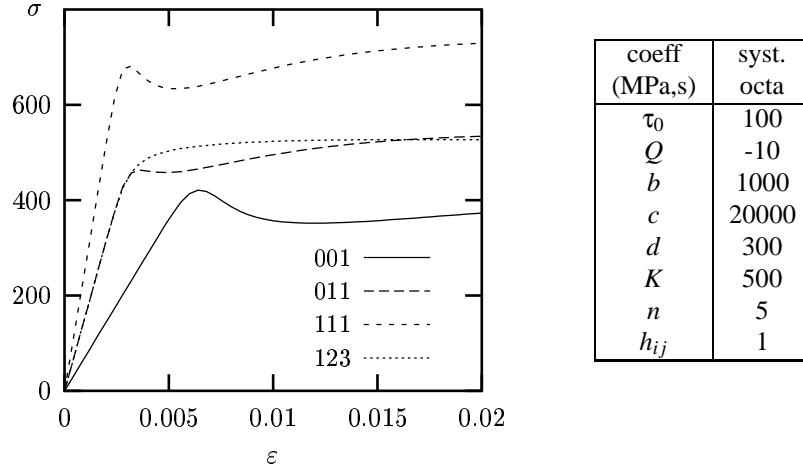


Figure 3.13. Courbes de traction simple selon différentes directions cristallographiques, avec les systèmes octaédriques seuls actifs. Les caractéristiques élastiques sont $C_{11} = 250$ GPa; $C_{12} = 200$ GPa; $C_{44} = 100$ GPa.

plastique [RIC 70, MAN 72], l'écriture en transformations finies [RIC 71, HIL 72, TEO 76, ASA 77, ASA 83b, ASA 83a], et l'utilisation dans des simulations numériques [PIE 85, ASA 85]. Il y a deux «lignées» de modèles, les uns étant exprimés sous forme phénoménologique, les autres faisant explicitement appel aux densités de dislocations.

Les modèles phénoménologiques habituels ne comportent en général pas d'écrouissage cinématique, et considèrent soit un comportement plastique indépendant du temps, avec pour seule possibilité de description de l'écrouissage les cissions critiques, soit un comportement viscoplastique, mais sans seuil avec un écrouissage de type multiplicatif, ainsi [PIE 85] :

$$\dot{\gamma}^r = \left| \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right|^{1/m} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}^s \text{signe}(\tau^s) \quad (3.163)$$

$$\tau_c^r = \sum_s h_{rs} \dot{\gamma}^s \quad \text{avec} \quad h_{rs} = (q + (1 - q)\delta_{rs}) H \quad (3.164)$$

Ce type de modèle est en général suffisant pour représenter correctement le comportement en chargement monotone et l'évolution des textures. Il est possible de tendre vers un comportement pratiquement indépendant de la vitesse de sollicitation en choisissant des valeurs élevées pour le coefficient m . Des modèles plus élaborés sont proposés dans le cadre viscoplastique [KAL 92], ou pour représenter le maillage [STA 98].

Certains auteurs penchent plutôt pour une description qui fait intervenir explicitement les densités de dislocations [FRA 85, TEO 93, CUI 92, BUS 96, TAB 97, EST 98, NEM 98]. Il existe une abondante littérature sur le sujet, qui ne peut être

abordée dans le cadre de ce paragraphe. Le lecteur trouvera des informations complémentaires concernant les grandes transformations au chapitre ??, et se reportera à des revues récentes sur le sujet [HAV 92, TEO 97].

3.10.4. Modèles à deux mécanismes et deux critères (2M2C)

Un cas particulier intéressant parmi les modèles envisagés jusqu'ici est celui de deux mécanismes, chacun obéissant à un critère de von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique. On écrit alors le potentiel comme une somme :

$$\Omega = \Omega^1(f^1) + \Omega^2(f^2) \quad (3.165)$$

avec, pour $I = 1, 2$:

$$f^I = J(\underline{\sigma} - \underline{X}^I) - R^I - R_0^I \quad (3.166)$$

La déformation inélastique est donc obtenue comme :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega^1}{\partial f^1} \underline{\dot{n}}^1 + \frac{\partial \Omega^2}{\partial f^2} \underline{\dot{n}}^2 \quad (3.167)$$

$$\text{avec } \underline{\dot{n}}^I = \frac{\partial f^I}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.168)$$

Les expressions du paragraphe 3.7.1 peuvent être reprises ici. L'expérience montre néanmoins ([SAI 95]) qu'il faut introduire des couplages au niveau de l'énergie libre, ainsi, $\underline{\alpha}_I$ étant les variables associées aux X_I , on choisit (pas de somme implicite sur I et J) :

$$\rho \psi = \frac{1}{3} \sum_I \sum_J C_{IJ} \underline{\alpha}^I : \underline{\alpha}^J + \frac{1}{2} \sum_I b_I Q_I (r^I)^2 \quad (3.169)$$

On peut également envisager un couplage au niveau des variables isotropes, ou encore un couplage «mixte» isotrope–cinématique. Cela ne sera pas considéré ici. On obtient donc :

$$\underline{X}^I = \frac{2}{3} \sum_J C_{IJ} \underline{\alpha}^J \quad ; \quad R^I = b_I Q_I r^I \quad (3.170)$$

et, avec des notations évidentes, les équations d'évolution du type :

$$\underline{\dot{\alpha}}^I = \left(\underline{\dot{n}}^I - \frac{3D_I}{2C_{II}} \underline{X}^I \right) \frac{\partial \Omega^I}{\partial f^I} \quad (3.171)$$

$$\dot{r} = \left(1 - \frac{R^I}{Q_I} \right) \frac{\partial \Omega^I}{\partial f^I} \quad (3.172)$$

La formulation du modèle où les deux mécanismes sont viscoplastiques est immédiate, dans la mesure où $\partial \Omega^I / \partial f^I$ est alors parfaitement déterminé. Il suffit de choisir une fonction de viscosité parmi celles du paragraphe 2.4.5. Si au contraire les deux

mécanismes sont plastiques, on est ramené à la résolution d'un système tel que celui présenté au paragraphe 3.10.2, avec possibilité d'avoir zéro, un ou deux mécanismes actifs. Dans ce dernier cas, il vient :

$$\dot{\lambda}^1 = \left\langle \frac{M_{22}\underline{n}^1 : \dot{\underline{\epsilon}} - M_{12}\underline{n}^2 : \dot{\underline{\epsilon}}}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}} \right\rangle \quad \dot{\lambda}^2 = \left\langle \frac{M_{11}\underline{n}^2 : \dot{\underline{\epsilon}} - M_{21}\underline{n}^1 : \dot{\underline{\epsilon}}}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}} \right\rangle \quad (3.173)$$

Les propriétés du modèle vont bien sûr dépendre du dénominateur (indétermination en cas de nullité). On a (sans somme sur I et J) :

$$M_{II} = C_{II} - D_I \underline{X}^I : \underline{n}^I + b_I (Q_I - R^I) \quad (3.174)$$

$$M_{IJ} = \frac{2}{3} C_{IJ} \underline{n}^I : \underline{n}^J - D_J \frac{C_{IJ}}{C_{JJ}} \underline{n}^I : \underline{X}^J \quad (3.175)$$

Le cas du mélange plasticité–viscoplasticité est exposé en section suivante.

3.10.5. Traitement simultané de la plasticité et de la viscoplasticité

La formulation plastique produit des réponses instantanées, la formulation viscoplastique des réponses retardées. Le traitement de l'ensemble des réponses d'un matériau à l'aide d'un modèle de viscoplasticité a été consacré sous le terme de «modélisation unifiée». Néanmoins, il est parfois utile pour certains matériaux de conserver les deux régimes de déformation, l'un rapide, l'autre lent, par exemple (i) pour les matériaux qui possèdent à la fois de fortes capacités d'érouissage et de fluage, comme les aciers inoxydables austénitiques, et qui sont le siège de l'effet Portevin–Le Chatelier (contrainte visqueuse décroissante en fonction de la vitesse de déformation), (ii) pour les matériaux dans lesquels la déformation instantanée (plasticité) et de fluage (viscoplasticité) s'effectuent dans des domaines de contrainte disjoints, comme par exemple les alliages base Nickel du type Inco718. L'utilisation simultanée des deux types de déformation permet de rendre compte de l'effet de la vitesse sur la courbe de traction dans le premier cas, mais aussi de réaliser une identification modulaire dans le second cas, chaque modèle étant actif dans une zone différente de contrainte et de temps. Les modèles utilisés font alors cohabiter une fonction seuil plastique et un potentiel viscoplastique. La déformation totale est obtenue comme la somme de trois déformations, élastique, plastique et viscoplastique :

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\lambda} \underline{n}^p + \dot{\nu} \underline{n}^v \quad (3.176)$$

Les modèles les plus courants se contentent alors d'une loi de Norton en viscoplasticité, et d'un érouissage isotrope ou cinématique linéaire en plasticité. L'expérience montre néanmoins qu'il faut souvent faire intervenir un couplage entre les lois d'évolution plastique et viscoplastique ([CON 89]). On peut à titre d'exemple considérer le

modèle suivant (noter dans ce paragraphe le changement de notation $C_{vp} = (2/3)C_{12}$) :

$$f^v = J(\underline{\sigma} - \underline{X}^v) - R^v - R_{ov} \quad f^p = J(\underline{\sigma} - \underline{X}^p) - R^p - R_{op} \quad (3.177)$$

$$\underline{X}^v = (2/3)C_v \underline{\alpha}^v + C_{vp} \underline{\alpha}^p \quad \underline{X}^p = (2/3)C_p \underline{\alpha}^p + C_{vp} \underline{\alpha}^v \quad (3.178)$$

$$R^v = b_v Q_v r^v \quad R^p = b_p Q_p r^p \quad (3.179)$$

$$\underline{\alpha}^v = \underline{\dot{\epsilon}}^v - \left(\frac{3D_v}{2C_v} \right) \underline{X}^v \dot{v} \quad \underline{\alpha}^p = \underline{\dot{\epsilon}}^p - \left(\frac{3D_p}{2C_p} \right) \underline{X}^p \dot{\lambda} \quad (3.180)$$

$$\dot{r}^v = \left(1 - \frac{R^v}{Q_v} \right) \dot{v} \quad \dot{r}^p = \left(1 - \frac{R^p}{Q_p} \right) \dot{p} \quad (3.181)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \underline{\dot{\sigma}} - C_{vp} \underline{\dot{\alpha}}^v \rangle : \underline{n}^p}{H_p} \quad \text{avec } H_p = C_p - D_p \underline{X}^p : \underline{n}^p + b_p (Q_p - R^p) \quad (3.182)$$

$$\dot{v} = \left\langle \frac{f^v}{K} \right\rangle^n \quad (3.183)$$

Ce modèle comporte 5 coefficients pour la loi plastique (R_{op} , Q_p , b_p , C_p , D_p), et 7 pour la loi viscoplastique (R_{ov} , Q_v , b_v , C_v , D_v , K , n), et un coefficient caractérisant le couplage entre les deux (C_{vp}). Les modèles obtenus sont alors identifiés à l'aide d'essais de plasticité cyclique, de fluage, et d'essais «mixtes» mettant en évidence le couplage entre plasticité et fluage. La figure 3.14 illustre l'effet du paramètre de couplage C_{vp} lors d'un chargement de fluage suivi d'un écrouissage. En l'absence de couplage ($C_{vp} = 0$), la période de fluage ne provoque pas d'écrouissage dans le modèle plastique, et conduit donc à une courbe de rechargement qui reste très loin de la courbe de référence. L'expérience montre habituellement que pour un tel chemin de chargement, la courbe du chargement mixte fluage–plasticité rejoint la courbe de référence, ce qui justifie la notion de couplage proposée [GOO 84, OHA 83].

Il est à noter que la partition entre écoulement plastique et écoulement viscoplastique s'effectue naturellement, en fonction de la vitesse de déformation, puisque la vitesse de déformation viscoplastique intervient indirectement dans le calcul du multiplicateur plastique. Lorsque la vitesse de déformation est grande, la déformation viscoplastique n'a pas le temps de s'établir, le terme moteur en vitesse de contrainte dans l'expression du multiplicateur plastique est grand, et on se trouve dans un régime dominé par la plasticité. Au contraire, pour des faibles vitesses de déformation, accompagnées de faibles vitesses de contrainte, le multiplicateur plastique peut se désactiver, comme le montre son expression de la formule 3.182, dans laquelle la présence d'écoulement viscoplastique diminue le terme moteur situé au numérateur. Le régime peut même devenir purement viscoplastique. En traction simple, l'effet de la vitesse de sollicitation, simulé avec un modèle élémentaire conduit à un effet visqueux ordinaire aux faibles vitesses, et à une saturation vers un modèle de plasticité instantanée aux vitesses élevées, ce qui est conforme à l'expérience (figure 3.15a). Dans chacun de ces essais, la vitesse de déformation inélastique est à dominante viscoplastique aux faibles vitesses, et purement plastique à forte vitesse (figure 3.15b).

Avec les coefficients utilisés pour simuler la traction, les essais de fluage montrent,

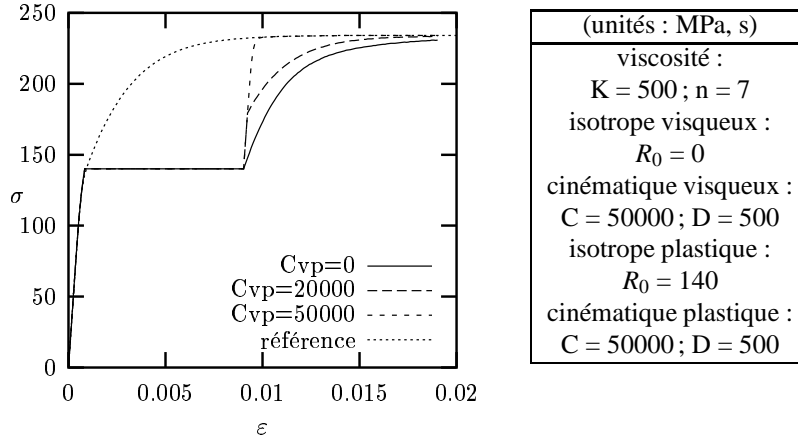


Figure 3.14. Influence du terme de couplage en fluage puis traction (fluage 555 h à 140 MPa, puis traction à $\dot{\varepsilon} = 10^{-4} s^{-1}$, référence obtenue en traction à $\dot{\varepsilon} = 10^{-4} s^{-1}$)

en fonction du niveau de chargement, du fluage primaire ou du fluage secondaire, mais surtout la présence d'un écoulement viscoplastique significatif au-dessous de la limite d'élasticité apparente (figure 3.15c,d). Cet effet est en bon accord avec le fait que la limite du domaine d'élasticité au sens de la plasticité (déformation rapide) est plus élevée que celle qui concerne les déformations viscoplastiques (fluage).

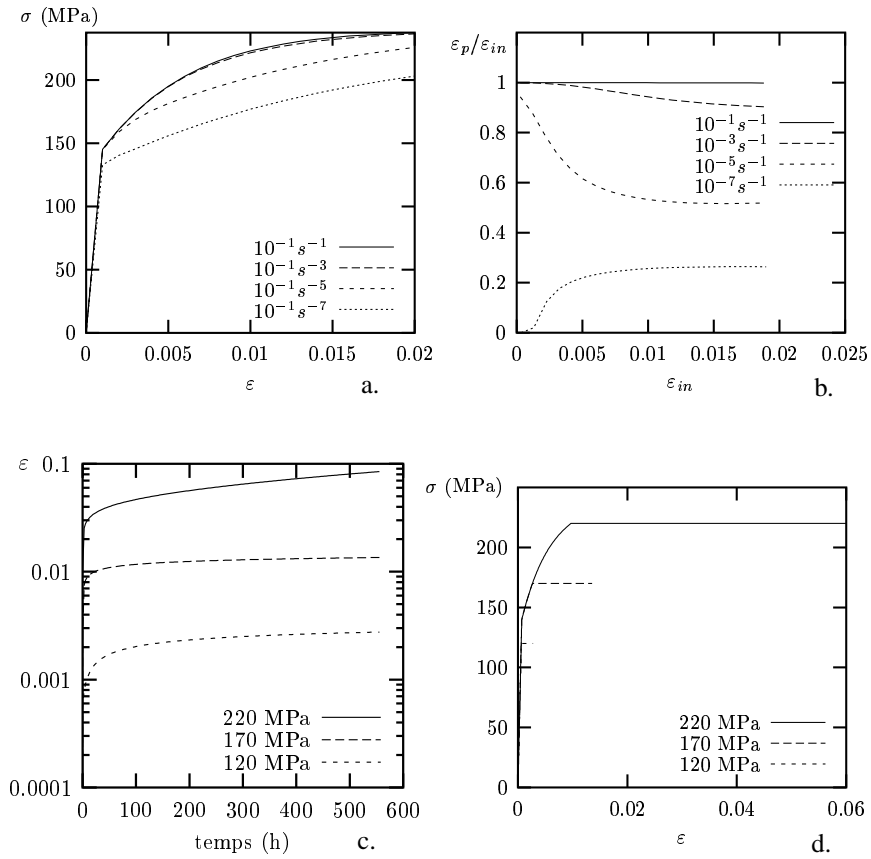
Il est possible, en fonction des valeurs relatives des coefficients correspondant à l'auto-écrouissage plastique, l'auto-écrouissage viscoplastique, et l'écrouissage croisé, de rendre compte d'effets inverses de la vitesse dans certaines gammes de sollicitation, comme le montre la figure 3.16. En traction simple, le jeu choisi prévoit un effet ordinaire de la vitesse aux faibles vitesses de sollicitation, un maximum de contrainte pour une vitesse intermédiaire, et une chute de contrainte pour des vitesses élevées. Un tel comportement est réaliste pour des matériaux dans lesquels existe un effet d'interaction dislocation-impuretés [BLA 87].

Il est bien entendu possible d'écrire des versions de ce type de modèle qui somment deux déformations de même nature, plastique ou viscoplastique.

3.10.6. Modèles à deux mécanismes et un critère (2MIC)

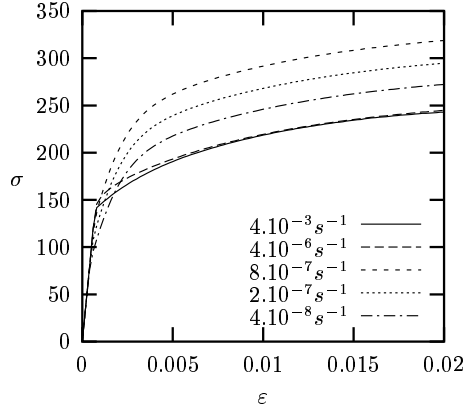
Après avoir exprimé plusieurs mécanismes, il est possible de combiner leur influence pour ne plus retrouver qu'un seul critère. Le modèle obtenu se retrouve alors dans un cadre plastique indépendant du temps ou viscoplastique. Les deux critères de l'équation 3.177 sont donc remplacés par un seul, par exemple [ZAR 87] :

$$f = (J(\underline{\sigma} - \underline{X}^1)^2 + J(\underline{\sigma} - \underline{X}^2)^2)^{1/2} - R \quad (3.184)$$



Coefficients...	(unités : MPa, s)
viscosité	$K = 500 ; n = 7$
isotrope du modèle visqueux	$R_0 = 80$
cinématique du modèle visqueux	$C = 10000 ; D = 100$
isotrope du modèle plastique	$R_0 = 140$
cinématique du modèle plastique	$C = 20000 ; D = 200$

Figure 3.15. Illustration du fonctionnement du modèle en traction et fluage. (a) Influence de la vitesse de déformation sur la courbe de traction, (b) Fraction de déformation plastique dans la déformation inélastique en fonction de la vitesse de sollicitation, (c) Fluage à différentes charges, (d) Mise en évidence du fluage en-dessous de la limite d'élasticité apparente en traction (après 600h de fluage)



Coefficients	(unités : MPa, s)
viscosité	$K=1000 ; n = 7$
isotrope du modèle visqueux	$R_0 = 0$
cinématique I du modèle visqueux	$C = 10000 ; D = 100$
cinématique II du modèle visqueux	$C = 100000 ; D = 1000$
isotrope du modèle plastique	$R_0 = 140$
cinématique I du modèle plastique	$C = 10000 ; D = 100$
cinématique II du modèle plastique	$C = 10000 ; D = 500$
couplage plastique I - viscoplastique I	$C_{vp} = 20000$
couplage plastique II - viscoplastique II	$C_{vp} = 100000$

Figure 3.16. Illustration de la possibilité de description d'un effet inverse de la vitesse en viscoplasticité

en conservant toujours un couplage au niveau des variables cinématiques :

$$\underline{X}^1 = (2/3) (C_{11}\alpha^1 + C_{12}\alpha^2) \quad ; \quad \underline{X}^2 = (2/3) (C_{22}\alpha^2 + C_{12}\alpha^1) \quad (3.185)$$

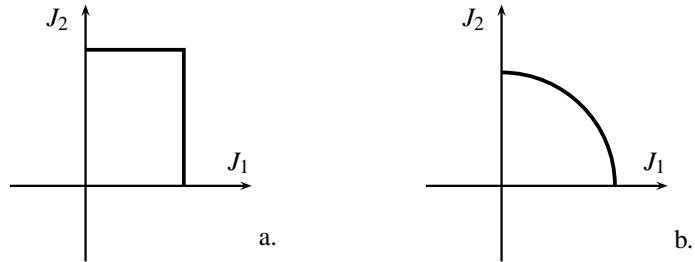


Figure 3.17. Comparaison entre : (a) modèle à deux mécanismes et deux critères, (b) modèle à deux mécanismes et un critère

La formulation plastique de ce modèle a été étudiée en détail [ZAR 87], on peut également écrire une formulation viscoplastique [CAI 95].

Dans l'un et l'autre cas, il n'y a plus qu'une variable isotrope, si bien que les deux relations de la formule 3.181 sont remplacées par une seule, le terme moteur \dot{P} étant, selon le cas, le multiplicateur plastique (unique) ou la dérivée du potentiel viscoplastique par rapport à f , $\dot{\nu}$:

$$\dot{r} = \left(1 - \frac{R}{Q}\right) \dot{P} \quad (3.186)$$

La variable isotrope R s'écrit donc :

$$R = bQr = Q(1 - \exp(-bP)) \quad (3.187)$$

En viscoplasticité :

$$\dot{P} = \dot{\nu} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n \quad (3.188)$$

En plasticité :

$$\dot{P} = \dot{\lambda} = \left\langle \frac{(J_1 \underline{n}^1 + J_2 \underline{n}^2) : \underline{\dot{\sigma}}}{h_R + h_{X1} + h_{X2}} \right\rangle \quad (3.189)$$

avec :

$$h_R = b(Q - R)R \quad (3.190)$$

$$h_{X1} = \frac{2}{3} \left(\underline{n}^1 - \frac{3D_1}{2C_{11}} \underline{X}^1 \right) : (C_{11}J_1 \underline{n}^1 + C_{12}J_2 \underline{n}^2) \quad (3.191)$$

$$h_{X2} = \frac{2}{3} \left(\underline{n}^2 - \frac{3D_2}{2C_{22}} \underline{X}^2 \right) : (C_{12}J_1 \underline{n}^1 + C_{22}J_2 \underline{n}^2) \quad (3.192)$$

La notation \underline{n}^i , ($i = 1, 2$) des équations 3.189 et 3.192 correspond à la forme classique $\underline{n}^i = (3/2)(\underline{s} - \underline{X}^i)/J(\underline{\sigma} - \underline{X}^i)$, l'expression de la normale devenant alors ici, en posant $J_i = J(\underline{\sigma} - \underline{X}^i)$:

$$\underline{n} = \frac{J_1 \underline{n}^1 + J_2 \underline{n}^2}{(J_1^2 + J_2^2)^{1/2}} \quad (3.193)$$

Pour ce type de modèle, le multiplicateur plastique (ou encore $\dot{\nu}$ en viscoplasticité) ne correspond plus à la vitesse de déformation équivalente. L'étude détaillée du modèle montre qu'il permet de régler dans une certaine mesure la quantité de rochet, par exemple sous un chargement non symétrique. Lorsque le déterminant ($C_{11}C_{22} - C_{12}^2$) est non nul, le rochet s'arrête après une période de déformation progressive. Il est intéressant de noter que le cycle mécanique stabilisé peut être ouvert (figure 3.18).

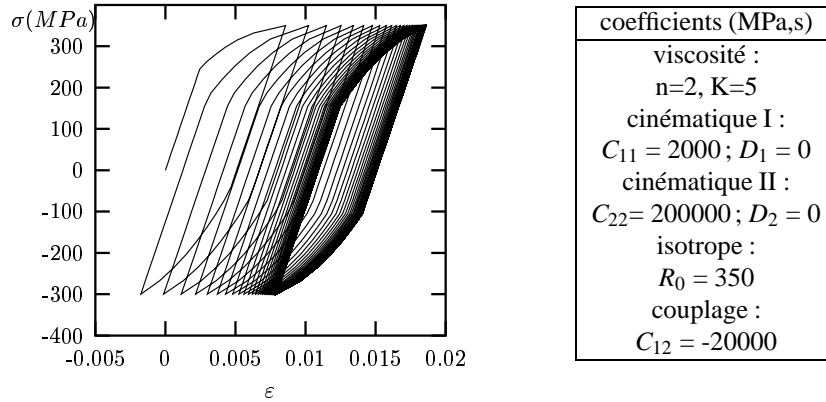


Figure 3.18. Illustration de l'arrêt de la déformation progressive sur une boucle ouverte avec un modèle 2MIC, sous chargement de traction-compression dissymétrique

3.10.7. Matériaux compressibles

Les modèles qui sont sensibles à la pression hydrostatique constituent une catégorie bien particulière qui est traitée en détail dans le prochain paragraphe. Il s'agit ici simplement de montrer comment il est possible de rattacher cette nouvelle catégorie de modèles à ceux qui ont été utilisés jusqu'à présent. Le modèle elliptique va être considéré à titre d'exemple. On donne une version du modèle avec écrouissage isotrope et cinématique. Le critère retenu sera donc :

$$f = (J(\underline{\sigma} - \underline{X})^2 + I(\underline{\sigma} - \underline{X})^2)^{1/2} - R \quad (3.194)$$

Cette forme peut être considérée comme un modèle de type 2MIC, étudié précédemment, dans lequel le premier critère porterait sur la partie déviatorique et le second sur la partie sphérique. La variable cinématique du premier critère est \underline{x} , partie déviatorique de \underline{X} , et celle du second critère X_{II} , trace de \underline{X} .

3.11. Comportement des matériaux poreux

Dans cette partie, le comportement des matériaux poreux plastiques et viscoplastiques est présenté. Ceux-ci sont caractérisés par la présence de cavités qui en fonction du chargement appliqué peuvent croître ou se fermer. Les modèles de comportement présentés dans cette partie peuvent à la fois servir à modéliser les opérations de mise en forme et la rupture ductile.

On définit la porosité η par le rapport :

$$\eta = \frac{\text{volume des cavités}}{\text{volume total}} \Bigg|_{\substack{\text{contraintes nulles} \\ \text{température de référence}}} \quad (3.195)$$

Il s'agit donc du taux relatif de vide dans l'état relâché des contraintes à la température de référence. En particulier, une déformation volumique purement élastique n'induit pas de modification de la porosité. On appellera matrice, la matière saine entourant les cavités.

3.11.1. Présentation de quelques modèles

Cette classe de matériaux est caractérisée par une surface de charge dépendant de la porosité. On distinguera les matériaux ayant une direction d'écoulement plastique associée à cette surface des matériaux non-associés. On se limitera ici au cas des matériaux associés (on pourra se reporter à [DES 89, KAN 82, NEM 80, VER 83] dans le cas non-associé.).

La formulation des différents modèles repose sur la définition d'une contrainte effective σ_* scalaire tenant compte de la pression hydrostatique. La contrainte effective est définie de façon explicite ou implicite par l'équation suivante :

$$\Psi_*(\boldsymbol{\sigma}, \eta, \sigma_*) = 0 \quad (3.196)$$

On définit également les quantités suivantes :

$$\sigma_M = k_1 \sigma_{11} + k_2 \sigma_{22} + k_3 \sigma_{33} \quad (3.197)$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{s}}} \quad (3.198)$$

de sorte à pouvoir prendre en compte l'anisotropie du matériau en utilisant le tenseur de Hill $\underline{\underline{H}}$ [DOE 95, PRA 98]. Dans le cas isotrope, $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}$, de sorte que σ_E est égal à la contrainte de von Mises et $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ de sorte que $\sigma_M = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$. Dans le cas où les coefficients k_1, k_2, k_3 sont différents, l'équation 3.197 n'est valable que dans un repère matériau particulier ; c'est par exemple le cas des matériaux contenant des cavités ellipsoïdales [GOL 94, GOL 97].

Le choix de la fonction Ψ_* détermine le modèle utilisé. Parmi ceux-ci, on utilise

couramment :

$$\text{Green} \quad \psi_* = 3C\sigma_E^2 + F\sigma_M^2 - \sigma_*^2 \quad (3.199)$$

$$\text{Gurson} \quad \psi_* = \frac{\sigma_E^2}{\sigma_*^2} + 2\eta_* q_1 \cosh\left(\frac{q_2 \sigma_M}{2\sigma_*}\right) - (1 + q_1^2 \eta_*^2) \quad (3.200)$$

$$\text{Rousselier} \quad \psi_* = \frac{\sigma_E}{1-\eta} + \sigma_1 \eta D \exp\left(\frac{\sigma_M}{(1-\eta)\sigma_1}\right) - \sigma_* \quad (3.201)$$

$$\text{Cam-clay modifié} \quad \psi_* = \frac{\sigma_E^2}{m^2} + \left(\frac{\sigma_M}{3} + p_c\right)^2 - p_c^2 - \sigma_*^2 \quad (3.202)$$

Les modèles de Gurson et Rousselier sont utilisés pour la modélisation de la rupture ductile. Les modèles de Green et Cam-clay servent pour la mise en forme. La forme des surfaces $\psi_* = 0$ dans le plan σ_M - σ_E , pour σ_* fixée, est représentée sur la figure 3.19. Les remarques suivantes peuvent être faites sur les différents modèles

Green [GRE 72, SHI 76, ABO 88, BES 92] Ce modèle a été initialement présenté comme une extension phénoménologique du critère de von Mises incorporant la pression hydrostatique. L'extension la plus simple consiste à définir une surface quadratique dans le plan σ_M - σ_E . Il est généralement utilisé pour la mise en forme à chaud. C et F sont des fonctions de la porosité ; on a $C(0) = 1$ et $F(0) = 0$ de sorte à retrouver un modèle de matériau plastiquement incompressible quand la porosité devient nulle. On peut également noter que certains modèles d'homogénéisation récents [PON 98] permettent de retrouver une forme elliptique pour le critère de plasticité.

Gurson [GUR 77, TVE 84, BEC 88, TVE 90b] Ce modèle a été initialement établi dans un cadre micromécanique. La surface de plasticité est obtenue par l'analyse d'une sphère creuse par une méthode de borne supérieure [GUR 77]. La matrice est supposée isotrope rigide parfaitement plastique. L'analyse de Gurson conduit à une surface de plasticité définie par :

$$\psi_* = \frac{\sigma_E^2}{\sigma_*^2} + 2\eta \cosh\left(\frac{\sigma_M}{2\sigma_*}\right) - (1 + \eta^2) \quad (3.203)$$

La comparaison avec des calculs éléments finis sur des cellules élémentaires cavité/matrice [KOP 88] ainsi que la confrontation avec des données expérimentales ont amené à modifier le modèle de façon phénoménologique pour aboutir à l'équation 3.200. Dans cette équation, η_* est une fonction de la porosité η qui s'exprime en général de la façon suivante :

$$\eta_* = \begin{cases} \eta & \text{si } \eta < \eta_c \\ \eta_c + \delta(\eta - \eta_c) & \text{si } \eta > \eta_c \end{cases} \quad (3.204)$$

où η_c représente la porosité à partir de laquelle la coalescence des cavités débute. Pour $\eta < \eta_c$ l'endommagement est entièrement régi par la croissance des cavités. $\delta > 1$ est un paramètre permettant de reproduire l'effet néfaste de la

coalescence sur la tenue mécanique. La forme phénoménologique de l'équation 3.204 est la plus couramment employée, car elle est la plus simple. Toutefois, rien n'interdit d'employer une autre fonction, soit pour des raisons physiques, soit pour des raisons numériques [MAT 94]. q_1 et q_2 sont des paramètres qui valent en général

$$q_1 = 1.5 \quad q_2 = 1 \quad (3.205)$$

La rupture (i.e. $\psi_* = 0$ pour $\underline{\sigma} = \underline{0}$) a lieu pour

$$\eta_*(\eta) = \frac{1}{q_1}$$

Certains auteurs proposent de faire dépendre η_c , δ , voire q_1 de la triaxialité des contraintes et de la porosité initiale η_0 [ZHA 95].

Rousselier [ROU 87] Ce modèle a également été proposé dans le cadre de la rupture ductile. Il comprend deux coefficients σ_1 et D . En prenant comme base le modèle de rupture ductile proposé par Rice & Tracey [RIC 69], on prend souvent

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}R_m \quad (3.206)$$

D est proche de 2. Dans ce modèle la rupture se produit pour $\eta = 1$; afin d'avoir une modélisation plus réaliste on considère qu'au delà d'une porosité critique η_c le matériau est rompu. Il y a donc une chute brusque des contraintes. Ce modèle possède la particularité, de ne pas avoir, dans le plan σ_M - σ_E une tangente verticale pour $\sigma_E = 0$. L'équation 3.201 indique en outre que le critère n'est pas symétrique en σ_M (i.e. $\psi_*(\sigma_E, \sigma_M, \sigma_*) \neq \psi_*(\sigma_E, -\sigma_M, \sigma_*)$). On peut toutefois le symétriser en remplaçant 3.201 par :

$$\psi_* = \frac{\sigma_E}{1-\eta} + \sigma_1 \eta D \exp\left(\frac{|\sigma_M|}{3(1-\eta)\sigma_1}\right) - \sigma_* \quad (3.207)$$

La surface $\psi_* = 0$ présente alors un point anguleux en $\sigma_M = 0$. En règle générale, ce modèle est utilisé pour décrire la rupture ductile avec $\sigma_M > 0$.

Cam-clay modifié [SCH 65, FAV 99] Ce modèle est généralement utilisé pour la mise en forme à froid des matériaux pulvérulents. p_c est une fonction décroissante de la porosité. On considère généralement que m est constant. Ce modèle ne s'applique qu'aux états de compression ($\text{Tr}\underline{\sigma} < 0$). En général il n'est pas utilisé aux faibles valeurs de la porosité.

3.11.2. Critère de plasticité

Le critère de plasticité s'écrit à partir de la définition de σ_* comme :

$$f(\underline{\sigma}, \eta, R) = \sigma_* - R = 0 \quad (3.208)$$

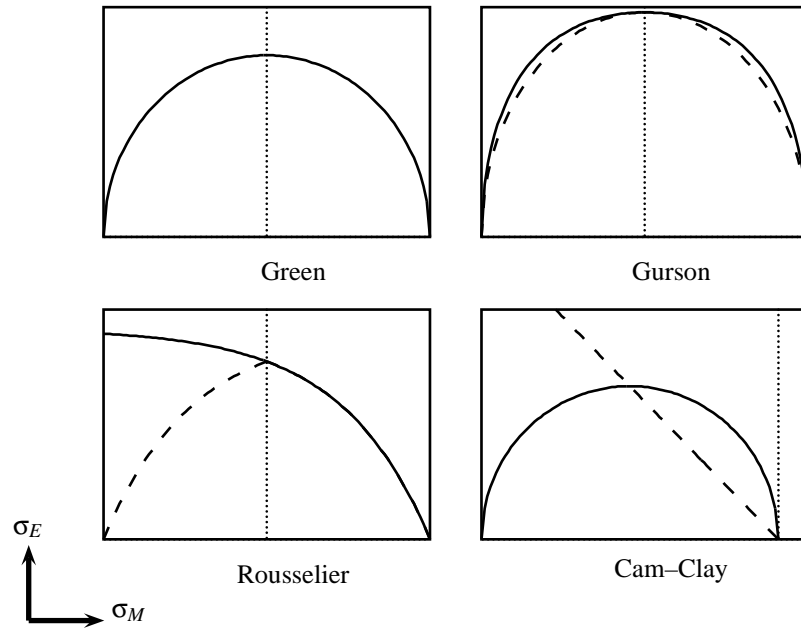


Figure 3.19. Comparaison des surfaces de plasticité des modèles : Green, Gurson (en pointillé le modèle de Green coïncidant avec le modèle de Gurson pour $\sigma_M = 0$ et $\sigma_E = 0$), Rousselier (en pointillé le modèle symétrisé (equation 3.207)), Cam-clay pour $\sigma_* = 0$ (en pointillé la droite d'état critique $\sigma_E = -m\sigma_M/3$).

où R est la limite d'écoulement du matériau non-endommagé. Une présentation plus classique considère l'équation $\psi(\underline{\sigma}, \eta, R) = 0$ comme le critère de plasticité. La présentation adoptée ici permet un traitement identique de tous les modèles ainsi qu'une extension immédiate à la viscoplasticité.

3.11.3. Viscoplasticité

Dans le cas d'un matériau viscoplastique, la condition d'écoulement s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}, \eta, R) = \sigma_* - R \geq 0 \quad (3.209)$$

La différence $\sigma_* - R$ définit une contrainte effective de fluage qui permet de définir la vitesse de déformation à partir de la loi de fluage du matériau non-endommagé [PRA 98, STE 97].

3.11.4. *Écoulement (visco)plastique*

En appliquant la règle de normalité, le tenseur des vitesses de déformation (visco)plastique est donné par ² :

$$\dot{\xi}^p = (1 - \eta)\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = (1 - \eta)\dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_*}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.210)$$

$\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique qui est obtenu soit par la condition de cohérence dans le cas de la plasticité :

$$\dot{\psi}_* = \frac{\partial \sigma_*}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \sigma_*}{\partial \eta} \dot{\eta} - \dot{R} = 0 \quad (3.211)$$

soit en appliquant la loi de fluage du matériau non-endommagé :

$$\dot{\lambda} = \phi(\sigma_* - R, \dots) \quad (3.212)$$

Dans le cas où σ_* ne dépend que de σ_M et σ_E on a :

$$\frac{\partial \sigma_*}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_*}{\partial \sigma_M} \frac{\partial \sigma_M}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial \sigma_*}{\partial \sigma_E} \frac{\partial \sigma_E}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.213)$$

soit dans le cas isotrope :

$$\underline{n} = \frac{\partial \sigma_*}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_*}{\partial \sigma_E} \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{\sigma_E} + \frac{\partial \sigma_*}{\partial \sigma_M} \underline{1} \quad (3.214)$$

En particulier, la trace du tenseur \underline{n} vaut $3\partial\sigma_*/\partial\sigma_M$ et est non nulle ce qui correspond à un changement de volume. Le vecteur $(\partial\sigma_*/\partial\sigma_M, \partial\sigma_*/\partial\sigma_E)$ correspond à la normale aux surfaces $\sigma_* = \text{constante}$ dans le plan σ_M - σ_E . La composante $\partial\sigma_*/\partial\sigma_M$ correspond donc au changement de volume et $\partial\sigma_*/\partial\sigma_E$ à la déformation de cisaillement (figure 3.20).

Remarque : σ_* peut être définie de façon implicite comme dans le cas du modèle de Gurson. Pour calculer \underline{n} , on remarque que le calcul de $\partial\sigma_*/\partial\underline{\sigma}$ se fait à porosité constante pour $\dot{\psi}_* = 0$ et $\dot{\psi}_* = 0$, on a donc

$$\delta\psi_* = 0 = \frac{\partial\psi_*}{\partial\sigma_*} \delta\sigma_* + \frac{\partial\psi_*}{\partial\underline{\sigma}} : \delta\underline{\sigma} \quad (3.215)$$

d'où :

$$\frac{\partial\sigma_*}{\partial\underline{\sigma}} = - \left(\frac{\partial\psi_*}{\partial\sigma_*} \right)^{-1} \frac{\partial\psi_*}{\partial\underline{\sigma}} \quad (3.216)$$

Remarques : Dans le cas des modèles de Green et de Gurson, il n'y a pas de changement de volume pour $\sigma_M = 0$ (cisaillement pur). Dans le cas de Rousselier

²Ecrire le coefficient de proportionnalité sous la forme $(1 - \eta)\dot{\lambda}$ est une convention souvent utilisée. On aurait pu écrire $\dot{\xi}_p = \dot{\lambda}\eta$

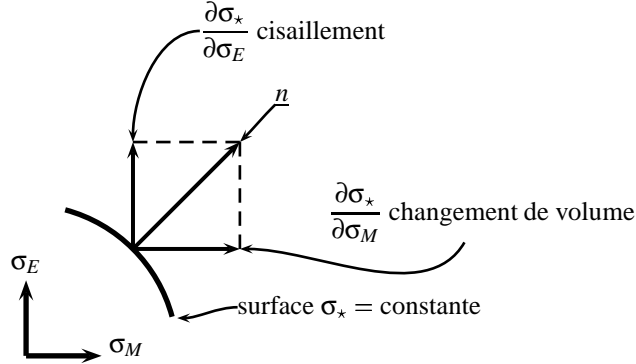


Figure 3.20. Normale à la surface $\sigma_* = \text{constante}$ dans le plan σ_M - σ_E indiquant les composantes de changement de volume et de cisaillement

(équation 3.201) on a toujours $\partial \sigma_* / \partial \sigma_M > 0$ ce qui implique en particulier de l'endommagement en cisaillement pur. Dans le cas de Cam-clay, les points correspondant à une déformation de cisaillement pur sont placés sur la droite $\sigma_E = -\frac{m}{3}\sigma_M$ (droite d'état critique [SCH 65], figure 3.19). Dans le cas du modèle de Rousselier, la composante en cisaillement de la déformation plastique n'est jamais nulle même pour un état de chargement purement hydrostatique. Ce n'est pas le cas pour les autres modèles.

3.11.5. Evolution de la porosité

L'évolution de la porosité est obtenue à partir de la conservation de la masse. Soit V_m le volume occupé par la matrice à $\tilde{\sigma} = \underline{0}$ et V_t le volume total. Comme la quantité de matrice est constante, $\dot{V}_m = 0$. Par ailleurs :

$$V_m = (1 - \eta)V_t \quad (3.217)$$

soit après dérivation :

$$-\dot{\eta}V_t + (1 - \eta)\dot{V}_t = 0 \quad (3.218)$$

d'où :

$$\dot{\eta} = (1 - \eta)\frac{\dot{V}_t}{V_t} = (1 - \eta)\text{Tr}(\dot{\underline{\epsilon}}^p) \quad (3.219)$$

Cette équation s'intègre facilement, et on obtient :

$$\eta = 1 - (1 - \eta_0)\exp(-\text{Tr}(\underline{\epsilon}^p)) \quad (3.220)$$

où η_0 est la porosité initiale. L'évolution de la porosité est donc, dans ce cas, entièrement contrôlée par la déformation plastique.

3.11.6. Comportement élastique

Le comportement élastique des matériaux poreux est donné de façon classique par la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}}(\eta, \dots) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (3.221)$$

Le tenseur $\underline{\underline{\Lambda}}$ peut dépendre de la porosité. Toutefois, il n'y a pas de couplage entre la cinétique d'endommagement et le comportement élastique comme dans le cas des comportements endommageables présentés en ???. Dans le cas de la rupture ductile, la porosité reste en général très faible de sorte que la dépendance de $\underline{\underline{\Lambda}}$ vis-à-vis de la porosité est souvent négligée.

3.11.7. Déformation plastique effective, écrouissage

On définit une déformation plastique effective, p telle que $\dot{p} = \dot{\lambda}$. On considère alors que cette quantité est représentative de l'écrouissage de la matrice saine. On montre dans le cas des modèles de Green et Gurson que l'on a égalité de la puissance plastique macroscopique et de la puissance plastique microscopique :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = (1 - \eta) \sigma_* \dot{p} \quad (3.222)$$

Dans le cas du modèle de Green isotrope, il est possible d'exprimer \dot{p} en fonction du tenseur des vitesses de déformation plastique comme :

$$\dot{p} = \frac{1}{1 - \eta} \left(\frac{2}{3C} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p'} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p'} + \frac{1}{9F} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p2}_{kk} \right)^{1/2} \quad (3.223)$$

Dans le cas du modèle de Rousselier isotrope \dot{p} est égal à l'invariant de von Mises : $\dot{p} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p'} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p'}}$. Il est à noter que cela n'est pas le cas pour les autres modèles. Cette particularité est liée à la forme du critère de plasticité.

Le modèle de Cam-clay est un cas à part dans le sens où l'on considère souvent que $R = 0$ de sorte que le matériau rompt dès qu'il atteint un état de contraintes en tension. Pour modéliser une certaine tenue en cisaillement et en traction on peut utiliser une valeur de R telle que : $R = \text{constante} \ll p_c$.

La variation de p correspond à un écrouissage isotrope par le biais de R qui est généralement une fonction de p . Le critère de plasticité s'écrit alors :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \eta, R) = \sigma_*(\underline{\underline{\sigma}}, \eta) - R(p, T, \dots) \quad (3.224)$$

R peut dépendre d'autres paramètres comme la température mais pas de la porosité. En effet, c'est une quantité relative à la matrice seule.

Écrouissage cinématique : On notera quelques extensions des modèles pour matériaux poreux (principalement dans le cadre du modèle de Gurson) au cas de

l'écroutissage cinématique [MEA 85, BEC 86, LEB 95, ARN 97]. Ces extensions restent pour l'instant peu employées.

3.11.8. Germination

Les matériaux contiennent en général des inclusions. Lors de la déformation, l'interface inclusion/matrice, voire l'inclusion elle-même peuvent se rompre. Il apparaît donc de nouvelles cavités : c'est le processus de germination. Pour rendre compte de ce phénomène, on considère que la variation de la porosité est la somme d'un terme de croissance et d'un terme de production lié à la germination. L'équation 3.219 est alors remplacée par :

$$\dot{\eta} = (1 - \eta) \text{Tr}(\dot{\underline{\epsilon}}^p) + \dot{\eta}_g \quad (3.225)$$

où le terme $\dot{\eta}_g$ représente l'accroissement de la porosité lié à la germination. Ce terme est purement phénoménologique, mais peut être ajusté à partir d'observations des cinétiques d'endommagement des inclusions [DEV 97b, GUI 98]. On distingue trois types de germination :

Germination contrôlée par la déformation plastique : Dans ce cas, $\dot{\eta}_g$ est donnée par :

$$\dot{\eta}_g = A(p, \dots) \dot{p} \quad (3.226)$$

où A est un coefficient pouvant dépendre des variables du modèle.

Germination contrôlée par la contrainte : Dans ce cas, $\dot{\eta}_g$ est donnée par

$$\dot{\eta}_g = \mathcal{A} \dot{\sigma}_* + \mathcal{B} \dot{\sigma}_{kk} \quad (3.227)$$

\mathcal{A} et \mathcal{B} sont encore des coefficients pouvant dépendre des variables du modèle.

Germination mixte : On peut enfin avoir à la fois une contribution des contraintes et de la déformation sur la cinétique de germination. On définit alors une contrainte efficace σ_c :

$$\sigma_c = \alpha \sigma_* + \beta \sigma_{kk} + H p \quad (3.228)$$

$\dot{\eta}_g$ est alors donnée par :

$$\dot{\eta}_g = C(\sigma_c, \dots) \dot{\sigma}_c \quad (3.229)$$

où α , β , H et C sont des coefficients.

On utilise le plus souvent des lois de germination en déformation. Le cas où seule la contrainte effective σ_* intervient dans la loi de germination est équivalent, dans le cas plastique, à de la germination par la déformation car $\sigma_* = R(p)$ est une fonction de la déformation plastique. Le terme σ_{kk} dans les lois de germination en contrainte peut poser problème car il peut diminuer (lors de la rupture les contraintes deviennent nulles). Une solution consiste à ne pas prendre en compte σ_{kk} quand $\dot{\sigma}_{kk} < 0$.

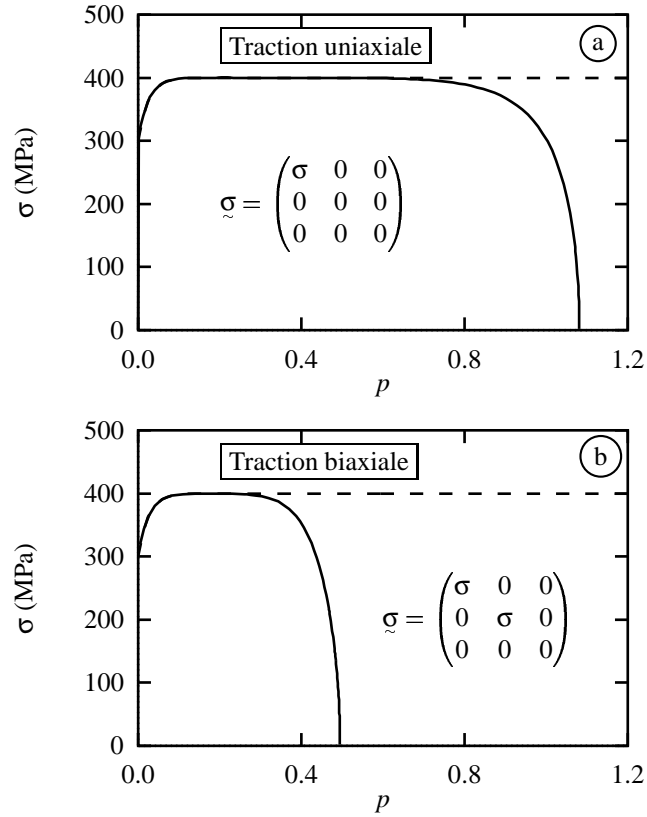


Figure 3.21. Courbes contrainte–déformation pour un matériau de Gurson : (a) traction uniaxiale, (b) traction biaxiale. Les courbes en pointillé représentent la réponse du matériau non-endommageable de von Mises.

3.11.9. Exemple

A titre d’illustration, considérons le modèle de Gurson. Les paramètres du modèle valent :

$$q_1 = 1.5 \quad q_2 = 1.0 \tag{3.230}$$

$$\eta_* = \begin{cases} \eta & \text{si } \eta < \eta_c \\ \eta_c + \delta(\eta - \eta_c) & \text{si } \eta > \eta_c \end{cases} \quad \text{avec } \eta_c = 0.002, \delta = 8.0 \tag{3.231}$$

La porosité initiale vaut $\eta_0 = 0.001$. Ces valeurs sont représentatives d’un acier au carbone contenant des inclusions de MnS que l’on considère comme ayant une faible cohésion avec la matrice et qui par conséquent agissent comme des cavités. La loi

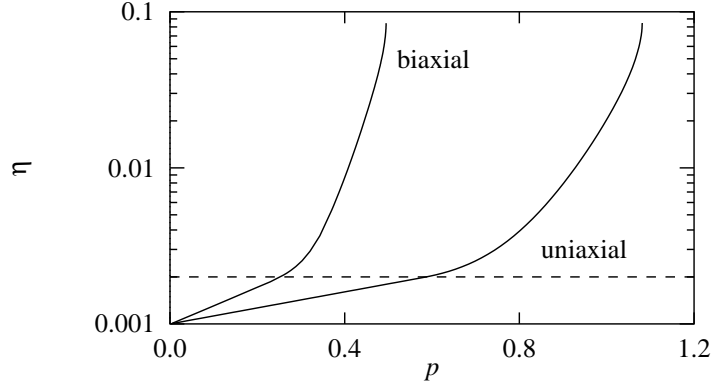


Figure 3.22. Courbes porosité–déformation pour un matériau de Gurson dans le cas de la traction uniaxiale et de la traction biaxiale. La courbe en pointillé indique la valeur du coefficient $\eta_c = 0.002$.

d'écroutissement est donnée par :

$$R(p) = R_0 + Q \left(1 - e^{-bp}\right) \quad (3.232)$$

avec $R_0 = 300 \text{ MPa}$, $Q = 100 \text{ MPa}$, $b = 40$

La figure 3.21 représente les courbes contrainte–déformation pour un essai de traction (figure 3.21a) et un essai de traction biaxiale (figure 3.21b). On constate dans les deux cas que la contrainte chute du fait de l'endommagement. Le taux de variation de la porosité vaut dans le cas du modèle de Gurson

$$\dot{\eta} = \frac{3(1-\eta)^2 q_1 q_2 \eta_* \sigma_*^2 \sinh\left(\frac{q_2 \sigma_M}{2\sigma_*}\right)}{2\sigma_E^2 + q_1 q_2 \eta_* \sigma_M \sigma_* \sinh\left(\frac{q_2 \sigma_M}{2\sigma_*}\right)} \dot{p} \quad (3.233)$$

Pour les faibles porosités ($\eta \ll 1$), la contrainte effective σ_* est proche de σ_E et on a :

$$\dot{\eta} \simeq \frac{3}{2} q_1 q_2 \eta_* \sinh\left(\frac{q_2 \sigma_M}{2\sigma_E}\right) \dot{p} \quad (3.234)$$

Dans ce cas, \dot{p} est proche de la déformation équivalente de von Mises : $\dot{p} \simeq \sqrt{(2/3)\dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}}$. On reconnaît dans l'équation précédente, le taux de triaxialité des contraintes $\tau = \sigma_M / (3\sigma_E)$. L'endommagement lié à la croissance des cavités est d'autant plus rapide que celui-ci est élevé. La figure 3.22 représente l'évolution de la porosité en fonction de la déformation plastique p dans le cas de la traction uniaxiale ($\tau = 1/3$) et de la traction biaxiale ($\tau = 2/3$).

Annexe

Notations employées

A.1. Tenseurs

scalaire (ordre 0)	a
vecteur (ordre 1)	\underline{a}
tenseur d'ordre 2	$\underline{\underline{a}}$
tenseur d'ordre 3	$\underline{\underline{\underline{a}}}$ ou $\underline{\underline{\underline{a}}}$
tenseur d'ordre 4	$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$
tenseur d'ordre n ($n > 4$)	$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}}$ ($\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}^{(n)}$)

Produits contractés : \cdot , \cdot , $::$, etc.

$x = \underline{a} \cdot \underline{b}$	$x = a_i b_i$
$\underline{x} = \underline{a} \cdot \underline{b}$	$x_i = a_{ij} b_j$
$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}$	$x_{ij} = a_{ik} b_{kj}$
$x = \underline{a} : \underline{b}$	$x = a_{ij} b_{ij}$
$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{b}}$	$x_{ij} = A_{ijkl} b_{kl}$
$x = \underline{\underline{\underline{A}}} :: \underline{\underline{\underline{B}}}$	$x = A_{ijkl} B_{ijkl}$

Produits en croix : \otimes , $\underline{\otimes}$, etc.

$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}}$	$x_{ij} = a_j b_j$
$\underline{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}}$	$X_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$
$\underline{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{b}}$	$X_{ijkl} = a_{ik} b_{jl}$
$\underline{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{b}}$	$X_{ijkl} = a_{il} b_{kj}$

Tenseurs particuliers

- $\underline{1}$ tenseur unité : $\underline{1}, \underline{1}$ ou parfois $\underline{I}, \underline{I}$
 \underline{J} tenseur tel que : $\underline{J} : \underline{a} = \text{déviateur}(\underline{a})$
 \underline{K} tenseur tel que : $\underline{K} : \underline{a} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{a}) \underline{1}$

A.2. Vecteurs, Matrices

- $\{v\}$ vecteur (taille n quelconque)
 $[M]$ matrice (taille $n \times m$ quelconque)

Produits contractés

$$\begin{array}{ll}
 x = \{v\} \cdot \{w\} & x = v_i w_j \\
 \{x\} = [M] \cdot \{v\} & x_j = M_{ij} v_j \\
 x = [M] : [N] & x = M_{ij} N_{ij}
 \end{array}$$

Produits en croix

$$[X] = \{v\} \otimes \{w\} \quad X_{ij} = v_i w_j$$

A.3. Notations de Voigt

Pour noter les tenseurs d'ordre 2 et 4, ainsi que pour les représenter numériquement, on utilise les notations de Voigt qui consistent à noter les tenseurs d'ordre 2 sous forme de vecteurs et les tenseurs d'ordre 4 sous forme de matrice. Pour noter explicitement l'emploi d'une telle notation, on utilisera les conventions suivantes :

tenseur d'ordre 2 $\{a\}$

tenseur d'ordre 4 $[A]$

Les notations de Voigt usuelles distinguent les tenseurs de déformation et de contraintes (cas symétrique) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On peut également utiliser une autre notation permettant de travailler sur l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques :

$$\underline{\underline{a}} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ \sqrt{2}a_{12} \\ \sqrt{2}a_{23} \\ \sqrt{2}a_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Cette solution permet d'avoir une notation uniforme. On vérifie en outre que :

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = \{a\} \cdot \{b\} \quad (\text{A.3})$$

Remarques

L'utilisation d'un langage de programmation–objet autorisant la surcharge des opérateurs permet de manipuler directement des tenseurs [BES 98a]. La seconde notation est beaucoup plus adaptée à cette méthodologie.

Les tenseurs d'ordres 4 doivent être écrits de manière différente selon le type de notation employée pour les tenseurs d'ordre 2.

Bibliographie

- [ABO 88] M. ABOUAF, J.L. CHENOT, G. RAISSON ET P. BAUDUIN. Finite element simulation of hot isostatic pressing of metal powders. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 25(1) : p.191–212, 1988.
- [ACH 93] P. ACHON. *Comportement et tenacité d'alliages d'Aluminium*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993.
- [ALL 90] O. ALLIX, P. LADEVÈZE, E. LE DANTEC ET E. VITTECOQ. Damage Mechanics for composite laminates under complex loading. In J.P. BOEHLER, ed, *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, pages 551–569, London, 1990. EGF5, Mechanical Engineering Publications.
- [ANA 96] L. ANAND ET M. KOTHARI. A computational procedure for rate-independent crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Sol.*, 44 : p.525–558, 1996.
- [AND 86] S. ANDRIEUX, Y. BAMBERGER ET J.-J. MARIGO. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *J. de mécanique théorique et appliquée*, 5(3) : p.471–513, 1986.
- [ARG 75] A.S. ARGON. *Constitutive Equations in Plasticity*. MIT Press, 1975.
- [ARM 66] P.J. ARMSTRONG ET C.O. FREDERICK. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. Technical Report RD/B/N731, CEGB, 1966.
- [ARN 97] S. ARNDT, B. SVENDSEN ET D. KLINGBEIL. Modellierung der Eigenspannungen und der Reißspitze mit einem Schägigungsmodell. *Technische Mechanik*, 17(4) : p.323–332, 1997.
- [ASA 77] R.J. ASARO ET J.R. RICE. Strain localization in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Sol.*, 25 : p.309–338, 1977.
- [ASA 83a] R.J. ASARO. Crystal plasticity. *J. of Applied Mechanics*, 50 : p.921–934, 1983.
- [ASA 83b] R.J. ASARO. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Appl. Mech.*, 23 : p.1–115, 1983.
- [ASA 85] R.J. ASARO ET A. NEEDLEMAN. Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals. *Acta Metall.*, 33 : p.923–953, 1985.
- [ASH 80] M.F. ASHBY ET D.R.H. JONES. “*Engineering materials*”, vol.1 : *An Introduction to their Properties and Applications*. Pergamon Press, 1980.
- [AUB 99] M. AUBERTIN, O.M.L. YAHYA ET M. JULIEN. Modeling mixed hardening of alkali halides with a modified version of an internal state variables model. *Int. J. of Plasticity*, 15 : p.1067–1088, 1999.
- [AUR 94] F. AURICCHIO ET R.L. TAYLOR. A generalized elastoplastic plate theory and its algorithmic implementation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37 : p.2583–2608, 1994.
- [BAL 65] A. BALTOV ET A. SAWCZUK. A rule of anisotropic hardening. *Acta Mech.*, 1 : p.81–92, 1965.

- [BAR 01a] F. BARBE, L. DECKER, D. JEULIN ET G. CAILLETAUD. Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part I : FE model. *Int. J. of Plasticity*, 17(4) : p.513–536, 2001.
- [BAR 01b] F. BARBE, S. FOREST ET G. CAILLETAUD. Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part II : Results. *Int. J. of Plasticity*, 17(4) : p.537–566, 2001.
- [BAS 89] S. BASTE, R. EL GUERJOUA ET A. GÉRARD. Mesure de l'endommagement anisotrope d'un composite céramique-céramique par une méthode ultrasonore. *Revue de Physique Appliquée*, 24 : p.721–731, 1989.
- [BAT 82] K.J. BATHE. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, Inc., 1982.
- [BAT 91] J.L. BATOZ ET G. DHATT. *Modélisation des structures par éléments finis, I–III*. Hermès, 1991.
- [BAX 94] C. BAXEVANAKIS. *Comportement statistique à rupture des composites stratifiés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [BAZ 88] Z.P. BAZANT ET G. PIJAUDIER-CABOT. Non local continuum damage. localization, instability and convergence. *J. of Applied Mechanics*, 55 : p.287–294, 1988.
- [BEC 86] R. BECKER ET A. NEEDLEMAN. Effect of yield surface curvature on necking and failure in porous plastic solids. *J. of Applied Mechanics*, 53 : p.491–499, 1986.
- [BEC 88] R. BECKER, A. NEEDLEMAN, O. RICHMOND ET V. TVERGAARD. Void growth and failure in notched bars. *J. Mech. Phys. Sol.*, 36 : p.317–351, 1988.
- [BEN 87] A. BENALLAL ET D. MARQUIS. Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-visco-plasticity. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 109 : p.326, 1987.
- [BEN 89a] A. BENALLAL. *Thermoviscoplasticité et endommagement des structures*. Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1989.
- [BEN 89b] A. BENALLAL, R. BILLARDON ET G. GEYMONAT. Conditions de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non-standards. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 308 : p.893–898, 1989.
- [BEN 91] A. BENALLAL. Quelques remarques sur le rôle du couplage thermomécanique dans les phénomènes de localisation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 312 : p.117–122, 1991.
- [BER 79] M. BERVEILLER ET A. ZAOUÏ. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystal. *J. Mech. Phys. Sol.*, 26 : p.325–344, 1979.
- [BER 81a] F.M. BEREMIN. Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transaction*, 12A : p.723–731, 1981.
- [BER 81b] F.M. BEREMIN. Study of fracture criteria for ductile rupture of a 508 steel. In D. FRANÇOIS ET AL., ed, *Int. Conf. of Fracture, Advances in Fracture Researches*. ICF5, Cannes, Pergamon Press, 1981.
- [BER 97] M. BERVEILLER ET F.D. FISCHER, eds. *Mechanics of Solids with Phase Change*, volume 368 of *CISM Courses and lectures*. Springer Verlag, 1997.
- [BES 88] J.-M. BESSON, M. JAEGER ET O. DÉBORDES. Homogénéisation de composites à base de tissus de fibres. In D. GAY ET C. BORD, eds, *Composite Structures*, pages 77–90, 1988.
- [BES 92] J. BESSON ET M. ABOUAF. Rheology of porous alumina and simulation of hot isostatic pressing. *J. Am. Ceram. Soc.*, 75 : p.2165–2172, 1992.
- [BES 97] J. BESSON ET R. FOERCH. Large Scale Object-Oriented Finite Element Code Design. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 142 : p.165–187, 1997.

- [BES 98a] J. BESSON ET R. FOERCH. Object-oriented programming applied to the finite element method. Part I : General concepts. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(5) : p.535–566, 1998.
- [BES 98b] J. BESSON, R. LE RICHE, R. FOERCH ET G. CAILLETAUD. Object-oriented programming applied to the finite element method. Part II : Application to material behaviors. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(5) : p.567–588, 1998.
- [BIG 91] D. BIGONI ET T. HUECKEL. Uniqueness and localization : I Associative and non-associative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 312 : p.117–122, 1991.
- [BIS 51] J.F.W. BISHOP ET R. HILL. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal. *Philosophical Magazine*, 42 : p.414–427, 1951.
- [BLA 87] D. BLANC ET J.L. STRUDEL. The Portevin-Le Châtelier instability : on a heterogeneous flow with a microscopic origin. In *Proc. Int. Symp. on Metallurgy and Materials Sciences : Constitutive Relations and their Physical Basis*, pages 227–238, Risø, Holland, 1987.
- [BOE 78] J.P. BOEHLER. Lois de comportement anisotropes des milieux continus. *J. de Mécanique*, 17(2) : p.153–190, 1978.
- [BOR 91] R. DE BORST. Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engng Computations*, 8 : p.317–332, 1991.
- [BOU 96] A. BOURSIN, J.-L. CHABOCHE ET F. ROUDOLFF. Mécanique de l'endommagement avec conditions unilatérales et stockage d'énergie élastique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 323 : p.369–376, 1996.
- [BUI 69] H.D. BUI. *Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écroutissage et relation de comportement élastoplastique des métaux cubiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1969.
- [BUL 97] F. BULTEL. Elastoplasticité des milieux de Cosserat. Technical report, Rapport de DEA, ENSMP, Evry, 1997.
- [BUR 87] H. BURLET ET G. CAILLETAUD. Modeling of cyclic plasticity in finite element codes. In C.S. DESAI, E. KREMPL ET P.D. ET AL. KIOUSIS, eds, *Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials : Theory and Applications*, pages 1157–1164, Tucson, Arizona, 1987.
- [BUS 77] D. BUSHNEL. A strategy for the solution of problems involving large deflections, plasticity and creep. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 11 : p.683–708, 1977.
- [BUS 96] E.P. BUSO ET F.A. MCCLINTOCK. A dislocation mechanics-based crystallographic model of a B2-type intermetallic alloy. *Int. J. of Plasticity*, 12 : p.1–28, 1996.
- [CAI 79] G. CAILLETAUD ET J.-L. CHABOCHE. Macroscopic description of the microstructural changes induced by varying temperature : Example of IN100 cyclic behaviour. In K.J. MILLER ET R.F. SMITH, eds, *3rd Int. Conf. on Mechanical behaviour of metals*, pages 23–32, Cambridge, UK, 1979. ICM3.
- [CAI 80] G. CAILLETAUD, H. POLICELLA ET G. BAUDIN. Mesure de déformation et d'endommagement par mesure électrique. *La Recherche Aéronautique*, 1 : p.69–75, 1980.
- [CAI 84] G. CAILLETAUD, H. KACZMAREK ET H. POLICELLA. Some elements on multiaxial behaviour of 316L stainless steel at room temperature. *Mech. of Materials*, 3 : p.333–347, 1984.
- [CAI 87] G. CAILLETAUD. *Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1987.
- [CAI 92] G. CAILLETAUD. A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals. *Int. J. of Plasticity*, 8 : p.55–73, 1992.
- [CAI 94] G. CAILLETAUD ET P. PILVIN. Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 3(4) : p.515–541, 1994.

- [CAI 95] G. CAILLETAUD ET K. SAI. Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms. *Int. J. of Plasticity*, 11 : p.991–1005, 1995.
- [CAI 00] G. CAILLETAUD, C. DEPOID, D. MASSINON ET E. NICOULEAU-BOURLES. Elastoviscoplasticity with aging in aluminium alloys. In G.A. MAUGIN, R. DROUOT ET F. SIDOROFF, eds, *Continuum Thermomechanics : The Art and Science of Modelling Material Behaviour (Paul Germain's Anniversary Volume)*, Solid Mechanics and its applications, pages 75–86. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [CAL 97] S. CALLOCH ET D. MARQUIS. Additional hardening due to tension–torsion non-proportional loadings : Influence of the loading path shape. In S. KALLURI ET P.J. BONNACUSE, eds, *Multiaxial Fatigue and Deformation Testing Techniques*, ASTM STP 1280, pages 113–130, 1997.
- [CHA 74] J.-L. CHABOCHE. Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. *Revue française de mécanique*, 50-51 : p.71–82, 1974.
- [CHA 77] J.-L. CHABOCHE. Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. In *Problèmes Non Linéaires de Mécanique, Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique*, pages 137–159, 1977.
- [CHA 78] J.-L. CHABOCHE. *Description phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, Paris, juin 1978.
- [CHA 79a] J.-L. CHABOCHE. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In J.-P. BOEHLER, ed, *Colloque EUROMECH 115, Grenoble*, pages 737–760. Editions du CNRS, 1982, 1979.
- [CHA 79b] J.-L. CHABOCHE, K. DANG VAN ET G. CORDIER. Modelisation of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. In *Proc. SMIRT 5*, volume L, page L11/3, Berlin, 1979.
- [CHA 81] J.-L. CHABOCHE. Continuous Damage Mechanics : a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nucl. Engng and Design*, 64 : p.233–247, 1981.
- [CHA 86] A. CHAREWICZ ET I.M. DANIEL. Fatigue damage mechanisms and residual properties of graphite/epoxy laminates. *Engng Fracture Mechanics*, 25(5/6), 1986.
- [CHA 88] J.-L. CHABOCHE. Continuum Damage Mechanics. Parts i and ii. *J. of Applied Mechanics*, 55 : p.59–72, 1988.
- [CHA 89] J.-L. CHABOCHE. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Int. J. of Plasticity*, 5 : p.247–302, 1989.
- [CHA 91] J.-L. CHABOCHE. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effect. *Int. J. of Plasticity*, 7 : p.661–678, 1991.
- [CHA 92a] J.-L. CHABOCHE. Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *Int. J. Damage Mechanics*, 1(2) : p.148–171, 1992.
- [CHA 92b] J.-L. CHABOCHE. A new unilateral condition for the description of material behaviour with anisotropic damage. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 314 : p.1395–1401, 1992.
- [CHA 93a] J.-L. CHABOCHE. Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part I : A thermodynamically consistent formulation. *J. of Applied Mechanics*, 60 : p.813–821, 1993.
- [CHA 93b] J.-L. CHABOCHE. Development of Continuum Damage Mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *Int. J. Damage Mechanics*, 2 : p.311–329, 1993.
- [CHA 93c] J.L. CHABOCHE. Cyclic viscoplastic constitutive equations. Parts I & II. *J. of Applied Mechanics*, 60 : p.813–831, 1993.
- [CHA 94] J.-L. CHABOCHE. Modeling of ratchetting : evaluation of various approaches. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13 : p.501–518, 1994.

- [CHA 95] J.-L. CHABOCHE, N. EL-MAYAS ET P. PAULMIER. Modélisation thermodynamique des phénomènes de viscoplasticité, restauration et vieillissement. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 320 : p.9–16, 1995.
- [CHA 96a] J.-L. CHABOCHE. *Unified cyclic viscoplastic constitutive equations : development, capabilities and thermodynamic framework*, pages 1–68. Academic Press, 1996.
- [CHA 96b] J.L. CHABOCHE ET G. CAILLETAUD. Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 133 : p.125–155, 1996.
- [CHA 97] J.L. CHABOCHE, R. GIRARD ET P. LEVASSEUR. On the interface debonding models. *Int. J. Damage Mechanics*, 6 : p.220–257, 1997.
- [CHI 69] G.Y. CHIN ET W.L. MAMMEL. Generalization and equivalence of the minimum work (Taylor) and maximum work (Bishop–Hill) principles for crystal plasticity. *Trans. of the Met. Soc. of AIME*, 245 : p.1211–1214, 1969.
- [CHO 87] C.L. CHOW ET J. WANG. An anisotropic theory of Continuum Damage Mechanics for ductile fracture. *Engng Fracture Mechanics*, 27(5) : p.547–558, 1987.
- [CHO 89] C.L. CHOW ET T.J. LU. On evolution laws of anisotropic damage. *Engng Fracture Mechanics*, 34 : p.679–701, 1989.
- [CHR 76] M. CHRZANOWSKI. Use of the damage concept in describing creep-fatigue interaction under prescribed stress. *J. Mech. Sci.*, 18 : p.69–73, 1976.
- [CHR 92] A. CHRYSOCHOOS ET F. BELMAHJOUR. Thermographic analysis of thermo-mechanical couplings. *Archives of Mechanics*, 44 : p.55–68, 1992.
- [CHR 98] A. CHRYSOCHOOS ET H. LOUCHE. Analyse thermographique des mécanismes de localisation dans des aciers doux. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 326 : p.345–352, 1998.
- [COL 67] B.D. COLEMAN ET M.E. GURTIN. Thermodynamics with internal variables. *J. Chem. Phys.*, 47 : p.597–613, 1967.
- [CON 89] E. CONTESTI ET G. CAILLETAUD. Description of creep–plasticity interaction with non-unified constitutive equations. *Nucl. Engng and Design*, 116 : p.265–280, 1989.
- [COR 79] J.-P. CORDEBOIS ET F. SIDOROFF. Anisotropie élastique induite par endommagement. In J.-P. BOEHLER, ed, *Colloque EUROMECH 115, Grenoble*. Editions du CNRS, 1982, 1979.
- [COR 82] J.-P. CORDEBOIS ET F. SIDOROFF. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J. de mécanique théorique et appliquée*, Numéro spécial : p.45–60, 1982.
- [COU 91] O. COUSSY. *Mécanique des milieux poreux*. Technip, 1991.
- [CUI 92] A.M. CUITINO ET M. ORTIZ. Computational modelling of single crystals. *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 1 : p.225–263, 1992.
- [DAR 87] F. DARVE. *Manuel de rhéologie des géomatériaux*. Presses des Ponts et Chaussées, 1987.
- [DEC 98] K. DECAMP, L. BAUVINEAU, J. BESSON ET A. PINEAU. Size and geometry effects on ductile rupture of notched bars in a C–Mn steel : Experiments and modelling. *Int. J. Frac.*, 88(1) : p.1–18, 1998.
- [DEL 87] P. DELOBELLE ET C. OYTANA. Modeling of 316 stainless steel mechanical properties using biaxial experiments. Part I : Experiments and basis of the model. Part II : Model and simulation. *J. Press. Vessel Technol.*, 109 : p.149, 1987.
- [DEL 95] P. DELOBELLE, P. ROBINET ET L. BOCHER. Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel. *Int. J. of Plasticity*, 11 : p.295–330, 1995.
- [DEL 96] P. DELOBELLE, P. ROBINET, P. GEYER ET P. BOUFFIOUX. A model to describe the anisotropic viscoplastic behavior of zircaloy–4 tubes. *J. Nucl. Mat.*, 238 : p.135–162, 1996.

- [DES 89] C.S. DESAI ET Q.S.E. HASHMI. Analysis, evaluation and implementation of a nonassociative model for geologic materials. *Int. J. of Plasticity*, 5(4) : p.397–420, 1989.
- [DEV 97a] L. DEVILLERS-GUERVILLE. *Rupture d'aciers inoxydables austéno-ferritiques moulés, fragilisés par vieillissement à 350–400°*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1997.
- [DEV 97b] L. DEVILLERS-GUERVILLE, J. BESSON ET A. PINEAU. Notch fracture toughness of a cast duplex stainless steel : modelling of experimental scatter and size effect. *Nuclear Engineering and Design*, 168 : p.211–225, 1997.
- [DOE 95] E. DOEGE, T. EL-DSOKI ET D. SEIBERT. Prediction of necking and wrinkling in sheet–metal forming. *J. Mat. Proc. Tech.*, 50 : p.197–206, 1995.
- [DOG 86] A. DOGUI ET F. SIDOROFF. Rhéologie anisotrope en grandes déformations. In *Rhéologie des matériaux anisotropes*, pages 27–38, CR 19e col. GFR Paris, 1986. Cepadues, Toulouse.
- [DOG 95] I. DOGHRI ET R. BILLARDON. Investigation of localization due to damage in elasto–plastic materials. *Mech. of Materials*, 19 : p.129–149, 1995.
- [DOG 00] I. DOGHRI. *Mechanics of Deformable Solids. Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*. Springer Verlag, 2000.
- [DOL 00] I. DOLTSIRIS, ed. *Elements of Plasticity, Theory and Computation*. WIT Press, 2000.
- [DOQ 90] V. DOQUET ET A. PINEAU. Extra-hardening due to non-proportional loading of an austenitic stainless steel. *Scripta Metallurgica and Materiala*, 24 : p.433, 1990.
- [DRA 76] A. DRAGON. On phenomenological description of rock–like materials with account for kinetics of brittle fracture. *Archivum Mechaniki Stosowanej*, 28(1) : p.13–30, 1976.
- [DUS 93] M.K. DUSZEK-PERZYNA ET P. PERZYNA. Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals. *Int. J. Solids Structures*, 30(1) : p.61–89, 1993.
- [DUV 72] G. DUVAUT ET J.-L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [EBE 98] F. EBERL, F. FEYEL, S. QUILICI ET G. CAILLETAUD. Approches numériques de la plasticité cristalline. *J. de Physique IV*, 8 : p.Pr4–15–Pr4–25, 1998.
- [EST 98] Y. ESTRIN, L.S. TÓTH, A. MOLINARI ET Y. BRÉCHET. A dislocation–based model for all hardening stages in large strain deformation. *Acta Mat.*, 46(15) : p.5509–5522, 1998.
- [FAV 95] N. FAVROT. *Etudes des différentes étapes de l'élaboration de structures graduelles en Wc-Co : compactage à froid, frittage, homogénéisation*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [FAV 99] N. FAVROT, J. BESSON, C. COLIN ET F. DELANNAY. Cold compaction and solid state sintering of wc–co based structures : experiments and modeling. *J. Am. Ceram. Soc.*, 82(5) : p.1153–1161, 1999.
- [FOE 97] R. FOERCH, J. BESSON, G. CAILLETAUD ET P. PILVIN. Polymorphic constitutive equations in finite element codes. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 141 : p.355–372, 1997.
- [FOR 96] S. FOREST. *Mechanical Modelling of Non-Homogeneous Deformation of Single Crystals*. PhD thesis, ENSMP and Communitatis Europaeae, 1996.
- [FOR 97] S. FOREST. Homogenization methods and the mechanics of generalized continua. In G.A. MAUGIN, ed, *International Seminar on Geometry, Continuum and Microstructure*, pages 35–48, Paris, France, 28–29 May 1997. Hermann, Collection Travaux en Cours No. 60.

- [FOR 98a] S. FOREST. Mechanics of generalized continua : Construction by homogeneization. *J. de Physique IV*, 26 : p.Pr4–39–Pr4–48, 1998.
- [FOR 98b] S. FOREST ET K. SAB. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communication*, 25 : p.449–454, 1998.
- [FOR 99] S. FOREST ET P. PILVIN. Modelling finite deformation of polycrystals using local objective frames. *Z. Angew. Math. Mech.*, 79 : p.S199–S202, 1999.
- [FOR 00] S. FOREST, F. BARBE ET G. CAILLETAUD. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multiphase materials. *Int. J. Solids Structures*, 37 : p.7105–7126, 2000.
- [FRA 80] P. FRANCIOSI, M. BERVEILLER ET A. ZAOUI. Latent hardening in copper and aluminium single crystals. *Acta Metall.*, 28 : p.273, 1980.
- [FRA 83] G. FRANCFORT. Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM J. Math. Anal.*, 14 : p.696–708, 1983.
- [FRA 85] P. FRANCIOSI. On flow and work hardening expression correlations in metallic single crystal plasticity. *Revue de Physique Appliquée*, 33 : p.1601–1612, 1985.
- [FRA 91] D. FRANÇOIS, A. PINEAU ET A. ZAOUI. *Comportement mécanique des matériaux. Volume 1 : élasticité et élastoplasticité*. Hermès, 1991.
- [FRA 93] D. FRANÇOIS, A. PINEAU ET A. ZAOUI. *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, 1993.
- [FRI 64] J. FRIEDEL. *Dislocations*. Pergamon, 1964.
- [GER 73] P. GERMAIN. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1973.
- [GER 83] P. GERMAIN, Q.S. NGUYEN ET P. SUQUET. Continuum thermodynamics. *J. of Applied Mechanics*, 50 : p.1010–1020, 1983.
- [GOL 83] G.H. GOLUB ET C.F. VAN LOAN. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1983.
- [GOL 94] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND ET J. DEVAUX. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids — case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol.*, 116 : p.290–297, 1994.
- [GOL 97] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND ET J. DEVAUX. *Continuum micromechanics*, volume 377, chapter Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. Springer Verlag, CISM Courses and lectures, 1997.
- [GOO 84] A.M. GOODMAN. Development of constitutive equations for computer analysis of stainless steel components. *Nucl. Engng and Design*, 83 : p.349, 1984.
- [GRE 72] R.J. GREEN. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 14 : p.215–224, 1972.
- [GUI 92] C. GUIONNET. Modeling of ratchetting in biaxial experiments. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 114 : p.56–62, 1992.
- [GUI 98] C. GUILLEMER-NEEL, X. FEAUGAS, V. BOBET ET M. CLAVEL. Damage kinetics in ferritic spheroidal graphite cast iron. In *ECF 12, Fracture from defect*, volume II, pages 721–726, 1998.
- [GUR 77] A.L. GURSON. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I— Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 44 : p.2–15, 1977.
- [HAD 03] J. HADAMARD. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris, 1903.
- [HAL 75] B. HALPHEN ET Q.S. NGUYEN. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 : p.39–63, 1975.

- [HAL 87] B. HALPHEN ET J. SALENÇON. *Élasto-plasticité*. Presses des Ponts et Chaussées, 1987.
- [HAL 96] F.R. HALL, D.R. HAYHURST ET P.R. BROWN. Prediction of plane-strain creep crack growth using Continuum Damage Mechanics. *Int. J. Damage Mechanics*, 5(4) : p.353–402, 1996.
- [HAN 92] N.R. HANSEN ET H.L. SCHREYER. Thermodynamically consistent theories for elastoplasticity coupled with damage. In *Damage Mechanics and Localization*, volume 142/AMD, pages 53–67. ASME, 1992.
- [HAR 92] O. HARIRËCHE ET B. LORET. 3D dynamic strain-localization : shear band pattern transition in solids. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 11(6) : p.735–751, 1992.
- [HAS 94a] T. HASSAN ET S. KYRIAKIDES. Ratcheting of cyclically hardening and softening materials. Part I : Uniaxial behavior. *Int. J. of Plasticity*, 10 : p.149–184, 1994.
- [HAS 94b] T. HASSAN ET S. KYRIAKIDES. Ratcheting of cyclically hardening and softening materials. Part II : Multiaxial behavior. *Int. J. of Plasticity*, 10 : p.185–212, 1994.
- [HAV 92] K.S. HAVNER. *Finite Plastic Deformation of Crystalline Solids*. Cambridge University Press, 1992.
- [HAY 72] D.R. HAYHURST. Creep rupture under multiaxial state of stress. *J. Mech. Phys. Sol.*, 20(6) : p.381–390, 1972.
- [HAY 75] D.R. HAYHURST, P.R. DIMMER ET M.W. CHERNUKA. Estimates of the creep rupture lifetime of structures using the finite element method. *J. Mech. Phys. Sol.*, 23 : p.335, 1975.
- [HER 90] E. HERVÉ ET A. ZAOUI. Modelling the effective behaviour of non-linear matrix-inclusion composites. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9 : p.505–515, 1990.
- [HEU 95] P. HEUILLET, P. ROUMAGNAC ET L. DUGAUTIER. Modélisation du comportement hyperélastique des élastomères. *Mécat-Info*, 15 : p.15–21, 1995.
- [HIL 65] R. HILL. Continuum micro-mechanisms of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Sol.*, 13 : p.89–101, 1965.
- [HIL 66] R. HILL. Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip. *J. Mech. Phys. Sol.*, 14 : p.95–102, 1966.
- [HIL 72] R. HILL ET J.R. RICE. Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strains. *J. Mech. Phys. Sol.*, 20 : p.401–413, 1972.
- [HIL 89] R. HILL. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Engineering Science Series.11, 1989.
- [HUE 85] C. HUET. *Éléments de thermomécanique des matériaux hétérogènes*. Cours de DEA de Génie Mécanique, ENPC, 1985.
- [HUE 90] C. HUET. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Sol.*, 38 : p.813–841, 1990.
- [HUG 80] T.J.R. HUGHES. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 15 : p.1413–1418, 1980.
- [HUG 87] T.J.R. HUGHES. *The finite element method : Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall Inc., 1987.
- [HUL 79] J. HULT. Continuum Damage Mechanics. capabilities limitations and promises. In *Mechanisms of Deformation and Fracture*, pages 233–347, Oxford, 1979. Pergamon.
- [ILC 86] L.B. ILCEWICZ, M.N.L. NARASIMHAN ET J.B. WILSON. Micro and macro material symmetries in generalized continua. *Int. J. of Engng Science*, 24 : p.97–109, 1986.
- [JAO 85] B. JAOUËL. *Étude de la plasticité et application aux métaux*. Dunod, 1985.

- [JIA 94] Y. JIANG ET H. SEHITOGLU. Multiaxial cyclic ratchetting under multiple step loading. *Int. J. of Plasticity*, 10 : p.849–870, 1994.
- [JON 77] J.J. JONAS ET B. B. BAUDELET. Effect of crack and cavity generation on tensile stability. *Acta Metall.*, 25 : p.43–50, 1977.
- [JOU 99] H. JOUSSET. *Comportement en fatigue et relaxation à basse température d'un alliage base titane*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999.
- [JU 89] J.W. JU. On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids Structures*, 25(7) : p.803–833, 1989.
- [KAC 58] L.M. KACHANOV. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk.*, 8 : p.26–31, 1958.
- [KAC 80] M. KACHANOV. Continuum model of medium with cracks. *J. of the Engineering Mechanics Division*, 106(EM5) : p.1039–1051, 1980.
- [KAC 93] M. KACHANOV. Elastic solids with many cracks and related problems. In J. HUTCHINSON ET T. WU, eds, *Advances in Appl. Mech.*, volume 30, pages 259–445. Academic Press, 1993.
- [KAL 92] S.R. KALIDINDI, C.A. BRONKHORST ET L. ANAND. Crystallographic texture evolution in bulk deformation processing of FCC metals. *J. Mech. Phys. Sol.*, 40 : p.536–569, 1992.
- [KAN 82] K.I. KANATANI. Plasticity theory for the kinematics of ideal granular materials. *Int. J. of Engng Science*, 20(1) : p.1–13, 1982.
- [KIM 98] A.S. KIM, J. BESSON ET A. PINEAU. Global and local approaches to fracture normal to interfaces. *Int. J. Solids Structures*, 36 : p.1845–1864, 1998.
- [KOC 66] U.F. KOCKS ET T.J. BROWN. Latent hardening in aluminium. *Acta Metall.*, 14 : p.87–98, 1966.
- [KOC 98] U.F. KOCKS, C.N. TOMÉ ET H.R. WENK. *Texture and anisotropy*. Cambridge University Press, 1998.
- [KOI 60] W.T. KOITER. *General theorems for elastic–plastic solids*, volume 6, pages 167–221. North–Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- [KOP 88] J. KOPLIK ET A. NEEDLEMAN. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, pages 835–853, 1988.
- [KRA 81] D. KRAJČINOVIC ET G.U. FONSEKA. The continuous damage theory of brittle materials. Parts 1 and 2. *J. of Applied Mechanics*, 48 : p.809–824, 1981.
- [KRA 84] D. KRAJČINOVIC. Continuum Damage Mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 37(1) : p.1–6, 1984.
- [KRE 89] W. KREHER ET W. POMPE. *Internal stresses in heterogeneous solids*. Akademie-Verlag Berlin, 1989.
- [KRI 77] R.D. KRIEG ET KRIEG D.B. Accuracies of numerical solution for the elastic–perfectly plastic model. *J. Press. Vessel Technol.*, 99 : p.510–515, 1977.
- [KRÖ 61] E. KRÖNER. Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metall.*, 9 : p.155–161, 1961.
- [KRÖ 76] E. KRÖNER ET H. KOCH. Effective properties of disordered materials. *SM Archives*, 1 : p.183–238, 1976.
- [KRÖ 77] E. KRÖNER. Bounds for effective moduli of disordered materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 25 : p.137–155, 1977.
- [KRÖ 81] E. KRÖNER. Linear properties of random media- the systematic theory. In C. HUET ET A. ZAOUÏ, eds, *Comportements rhéologiques et structure des matériaux*, pages 15–40, CR 15e Coll. GFR, 1981. Editions ENPC.

- [LAD 80] P. LADEVÈZE. *Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations*. rapport interne LMT No.9, 1980.
- [LAD 83] P. LADEVÈZE. Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rapport Interne 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, 1983.
- [LAD 84] P. LADEVÈZE ET J. LEMAITRE. Damage effective stress in quasi-unilateral condition. IUTAM Congress, Lyngby, Danemark, 1984.
- [LAD 94] P. LADEVÈZE, A. GASSER ET O. ALLIX. Damage mechanics modelling for ceramic composites. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 116, 1994.
- [LAD 95] P. LADEVÈZE. A damage computational approach for composites : Basic aspects and micromechanical relations. *Computational Mechanics*, 17 : p.142–150, 1995.
- [LAM 78] H.S. LAMBA ET O.M. SIDEBOTTOM. Cyclic plasticity for non-proportional paths. Parts 1 and 2. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 100 : p.96–112, 1978.
- [LEB 95] J.B. LEBLOND, G. PERRIN ET J. DEVAUX. An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14(4) : p.499–527, 1995.
- [LEC 74] F.A. LECKIE ET D.R. HAYHURST. Creep rupture of structures. *Proc. Royal Soc. London*, 340 : p.323–347, 1974.
- [LEC 80] F.A. LECKIE ET E.T. ONAT. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*. IUTAM Symposium, Senlis, Springer Verlag, 1980.
- [LEM 78] J. LEMAITRE ET J.-L. CHABOCHE. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J. de mécanique appliquée*, 2(3) : p.317–365, 1978.
- [LEM 84] J. LEMAITRE. How to use Damage Mechanics. *Nucl. Engng and Design*, 80 : p.233–245, 1984.
- [LEM 85a] J. LEMAITRE. A Continuum Damage Mechanics model for ductile fracture. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 107 : p.83–89, 1985.
- [LEM 85b] J. LEMAITRE ET J.-L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [LEM 96] J. LEMAITRE. *A course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, 1996.
- [LIP 90] P. LIPINSKI, J. KRIER ET M. BERVEILLER. Elastoplasticité des métaux en grandes déformations : comportement global et évolution de la structure interne. *Revue de Physique Appliquée*, 25 : p.361–388, 1990.
- [LIU 94a] Y. LIU, S. MURAKAMI ET Y. KANAGAWA. Mesh-dependence and stress singularity in finite element analysis of creep crack growth by continuum damage mechanics approach. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13(3) : p.395–417, 1994.
- [LIU 94b] Y. LIU, S. MURAKAMI ET Y. KANAGAWA. Mesh dependence and stress singularity in finite element analysis of creep crack growth by Continuum Damage Mechanics approach. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 13(3) : p.395–417, 1994.
- [LUB 90] J. LUBLINER. *Plasticity Theory*. Mc Millan, 1990.
- [LUB 93] V.A. LUBARDA ET D. KRAJČINOVIĆ. Damage tensors and the crack density distribution. *Int. J. Solids Structures*, 30 : p.2859–2877, 1993.
- [LUE 84] D.G. LUENBERGER. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Pub. Comp., 1984.
- [MAC 95] D.L. MAC DOWELL. Stress state dependence of cyclic ratcheting behavior of two rail steels. *Int. J. of Plasticity*, 11 : p.397–421, 1995.
- [MAI 96] J.-F. MAIRE ET D. D. PACOU. Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique. pages 1225–1234. JNC10, AMAC, 1996. Paris.

- [MAI 97a] J.-F. MAIRE ET J.-L. CHABOCHE. A new formulation of continuum damage mechanics for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 4 : p.247–257, 1997.
- [MAI 97b] J.-F. MAIRE ET P.-M. LESNE. A damage model for ceramic matrix composites. *Aerospace Science and Technology*, 4 : p.259–266, 1997.
- [MAL 80] D.S. MALKUS. Finite elements with penalties in non linear elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 16 : p.121–136, 1980.
- [MAN 65] J. MANDEL. Une généralisation de la théorie de la plasticité de W.T. Koiter. *Int. J. Solids Structures*, 1 : p.273–295, 1965.
- [MAN 66] J. MANDEL. *Cours de mécanique des milieux continus – Tomes I et II*. Gauthier-Villars / réédition 1994, J. Gabay, 1966.
- [MAN 72] J. MANDEL. *Plasticité classique et viscoplasticité*, volume 97 of *CISM Courses and lectures*. Springer Verlag, 1972.
- [MAN 78] J. MANDEL. *Propriétés mécaniques des matériaux*. Eyrolles, 1978.
- [MAR 89] D. MARQUIS. *Phénoménologie et thermodynamique : couplage entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1989.
- [MAT 79] H. MATTHIES ET G. STRANG. The solution of non-linear finite element equations. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 14 : p.1613–1626, 1979.
- [MAT 94] K.K. MATHUR, A. NEEDLEMAN ET V. TVERGAARD. Ductile failure analyses on massively parallel computers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 119 : p.283–309, 1994.
- [MAU 92] G.A. MAUGIN. *Thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- [MAZ 82] J. MAZARS. Mechanical damage and fracture of concrete structures. In *Advances in Fracture Research*, volume 4, pages 1499–1506. Pergamon Press, 1982.
- [MAZ 86] J. MAZARS. A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete. In *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*. RILEM Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete, Lausanne, Elsevier, 1986.
- [MAZ 89] J. MAZARS ET G. PIJAUDIER-CABOT. Continuum Damage theory : application to concrete. *J. of Engng Mechanics*, 115(2) : p.345–365, 1989.
- [MCC 66] F.A. MCCLINTOCK ET A.S. ARGON. *Mechanical behavior of materials*. Addison-Wesley, 1966.
- [MCG 80] P.A. MCGUIRE, S.G. SAMPATH, C.H. POPELAR ET M.F. KANNINEN. A theoretical model for crack propagation and crack arrest in pressurized pipelines. In G.T. HAHN ET M.F. KANNINEN, eds, *Crack Arrest Methodology and Applications*, ASTM STP 711, pages 341–358. 1980.
- [MEA 85] M.E. MEAR ET J.W. HUTCHINSON. Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mech. of Materials*, 4 : p.395–407, 1985.
- [MEN 68] A. MENDELSON. *Plasticity : theory and application*. Macmillan, New York, 1968.
- [MOL 87] A. MOLINARI, G.R. CANOVA ET S. AHZI. A self-consistent approach to the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metall.*, 35 : p.2983–2994, 1987.
- [MOR 83] J.-J. MOREAU. *Application of Convex Analysis to the Treatment of Elastoplastic Systems*. Springer Verlag, Swansea, 1983.
- [MRÓ 67] Z. MRÓZ. On the description of anisotropic work hardening. *J. Mech. Phys. Sol.*, 15 : p.163, 1967.
- [MRÓ 95] Z. MRÓZ, D. WEICHERT ET S. DOROSZ, eds. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*. Kluwer Academic Publisher, 1995.

- [MÜH 98] U. MÜHLICH ET R. KIENZLER. Nonlocal modification of the guron–model. In A. BERTRAM ET F. SIDOROFF, eds, *Euromech—Mecamat’97, 2nd European mechanics of materials conference on mechanics of materials with intrinsic length scale : physics, experiments, modelling and applications*, pages 277–284, 1998.
- [MUN 94] E. MUNIER. *Identification expérimentale et modélisation statistique multi-échelle du comportement mécanique de composites SiC/SiC tissés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [MUR 80] S. MURAKAMI ET N. OHNO. A continuum theory of creep and creep damage. In A.R.S. PONTER ET D.R. HAYHURST, eds, *3rd Creep in Structures Symposium, Leicester*, pages 422–443. IUTAM, Springer Verlag, 1980.
- [MUR 83] S. MURAKAMI. Notion of Continuum Damage Mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 105 : p.99, 1983.
- [MUR 87] T. MURA. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff, 1987.
- [NAG 74] J.C. NAGTEGALL, D.M. PARKS ET J.R. RICE. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 4 : p.153–177, 1974.
- [NEE 90] A. NEEDLEMAN. An analysis of decohesion along an imperfect interface. *Int. J. Frac*, 42 : p.21–40, 1990.
- [NEM 80] S. NEMAT-NASSER ET A. SHOKOOH. On finite plastic flow of compressible materials with internal friction. *Int. J. Solids Structures*, 16 : p.495–514, 1980.
- [NEM 98] S. NEMAT-NASSER ET Y. LI. Flow stress of FCC polycrystals with application to OFHC Cu. *Acta Mat.*, 46(2) : p.565–577, 1998.
- [NGU 77] Q.S. NGUYEN. On the elastic–plastic initial boundary problem and its numerical integration. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 11 : p.817–832, 1977.
- [NOU 90] D. NOUAILHAS. Un modèle de viscoplasticité cyclique pour matériaux anisotropes à symétrie cubique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 310 : p.887–890, 1990.
- [NOU 92] D. NOUAILHAS ET G. CAILLETAUD. Comparaison de divers critères anisotropes pour monocristaux cubiques à faces centrées (CFC). *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 315 : p.1573–1579, 1992.
- [NOU 94] D. NOUAILHAS, J.-P. CULIÉ, G. CAILLETAUD ET L. MÉRIC. FE analysis of the stress–strain behaviour of single–crystal tubes. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14(1) : p.137–154, 1994.
- [NOU 95] D. NOUAILHAS ET G. CAILLETAUD. Tension-torsion behavior of single-crystal superalloys : experiment and finite element analysis. *Int. J. of Plasticity*, 11(4) : p.451–470, 1995.
- [ODE 72] J.T. ODEN. *Finite elements on nonlinear continua*. Mc Graw–Hill, 1972.
- [ODE 78] J.T. ODEN. A theory of penalty methods for finite element approximations of highly nonlinear problems in continuum mechanics. *Computers and Structures*, 8 : p.445–449, 1978.
- [ODE 83] J.T. ODEN ET G. CAREY. *Finite Elements. Volume IV. Mathematical aspects*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [OHA 83] Y. OHASHI, M. KAWAI ET T. MOMOSE. Effect of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 105 : p.257–263, 1983.
- [OHN 93a] N. OHNO ET J.D. WANG. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery. Part I : Formulation and basic features for ratchetting behaviour. *Int. J. of Plasticity*, 9 : p.375–390, 1993.

- [OHN 93b] N. OHNO ET J.D. WANG. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery. Part II : Application to experiments of ratchetting behaviour. *Int. J. of Plasticity*, 9 : p.390–403, 1993.
- [ORT 85a] M. ORTIZ. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mech. of Materials*, 4 : p.67–93, 1985.
- [ORT 85b] M. ORTIZ ET E.P. POPOV. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 21 : p.1561–1576, 1985.
- [PEE 96] R.H.J. PEERLINGS, R. DE BORST, W.A.M. BREKELMANS, J.H.P. DE VREE ET I. SPEE. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15(6), 1996.
- [PIE 85] D. PIERCE, R.J. ASARO ET A. NEEDLEMAN. Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids. *Acta Metall.*, 31 : p.1951, 1985.
- [PIL 90a] P. PILVIN. *Approches multiéchelles pour la prévision du comportement inélastique des métaux*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1990.
- [PIL 90b] P. PILVIN ET G. CAILLETAUD. Intergranular and transgranular hardening in viscoplasticity. In M. ZYCZKOWSKI, ed, *Creep in Structures*, volume 4, pages 171–178, 1990.
- [PIL 94] P. PILVIN. The contribution of micromechanical approaches to the modelling of inelastic behaviour. In A. PINEAU, G. CAILLETAUD ET T. LINDLEY, eds, *4th Int. Conf. on Biaxial/multiaxial Fatigue, Saint-Germain, France*, volume 1, pages 31–46. ESIS, may 31–june 3 1994.
- [PIN 76] A. PINEAU. Influence of uniaxial stress on the morphology of coherent precipitates during coarsening - elastic energy considerations. *Acta Metall.*, 24 : p.559–564, 1976.
- [PIN 81] A. PINEAU. Review of fracture mechanisms and local approaches to predicting crack resistance in low strength steels. In D. FRANÇOIS ET AL., ed, *Int. Conf. of Fracture, Advances in Fracture Researches. ICF5, Cannes, Pergamon Press*, 1981.
- [PLU 86] A. PLUMTREE ET J.O. NILSSON. Damage mechanics applied to high temperature fatigue. In *Journées Internationales de Printemps, Fatigue at High Temperature, Paris. SF2M*, 1986.
- [POI 96] N. POINT ET E. SACCO. A delamination model for laminated composites. *Int. J. Solids Structures*, 33(4) : p.483–509, 1996.
- [PON 98] P. PONTE CASTAÑEDA ET P. SUQUET. Nonlinear composites. *Advances in Appl. Mech.*, 34 : p.171–302, 1998.
- [POT 98] T. POTTIER. *Modélisation multiéchelle du comportement et de l'endommagement de composites à matrice métallique*. Doctorat d'Université, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- [PRA 98] F. PRAT, M. GRANGE, J. BESSON ET E. ANDRIEU. Behavior and rupture of hydrided zircaloy-4 tubes and sheets. *Met. Trans*, 29A : p.1643–1651, 1998.
- [PRE 88] W.H. PRESS, R.O. FOSCHI, S.A. TEUKOLSKY ET W.T. VETTERLING. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1988.
- [RAB 69] Y.N. RABOTNOV. *Creep problems in structural members*. North-Holland, 1969.
- [RAM 90] S. RAMTANI. *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1990.
- [RIC 68] J.R. RICE. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notched and cracks. *J. of Applied Mechanics*, 35 : p.379, 1968.
- [RIC 69] J.R. RICE ET D.M. TRACEY. On the enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Sol.*, 17 : p.201–217, 1969.

- [RIC 70] J.R. RICE. On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation in metals. *J. of Applied Mechanics*, 37 : p.728, 1970.
- [RIC 71] J.R. RICE. Inelastic constitutive relations for solids : An internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Sol.*, 19 : p.433–455, 1971.
- [RIC 73] J.R. RICE ET D.M. TRACEY. Computational fracture mechanics. In S.J. FENVES, ed, *Symposium on numerical methods in structural mechanics*, Urbana, Illinois, 1973. Academic Press.
- [RIC 76] J.R. RICE. The localization of deformation. In W.T. KOITER, ed, *Theoretical and Applied Mechanics*. North Publishing Company, 1976.
- [RIK 79] E. RIKS. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Structures*, 15 : p.529–551, 1979.
- [RIV 69] R.S. RIVLIN. Red herrings and sundry unidentified fish in non-linear mechanics. Technical report, Centre for the Application of Mathematics, Lehigh University, Technical Report No. CAM-100-9, 1969.
- [ROU 85a] G. ROUSSELIER, J.-J. ENGEL ET J.C. MASSON. Etude comparative de modèles de comportement pour la simulation d'essais en traction-compression sur tubes en acier inoxydable. Technical Report 8, EDF-DER/GIS Rupture à chaud, 1985.
- [ROU 85b] M. ROUSSET. *Surface seuil de plasticité : détermination automatique et modélisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1985.
- [ROU 87] G. ROUSSELIER. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nucl. Engng and Design*, 105 : p.97–111, 1987.
- [ROU 97] P. ROUGÉE. *Mécanique des Grandes Transformations*. Springer Verlag, 1997.
- [RUN 89] K. RUNESSON ET Z. MR' OZ. A note on non-associated flow rules. *Int. J. of Plasticity*, 5 : p.639–658, 1989.
- [SAA 88] K. SAANOUNI. *Sur l'analyse de la fissuration des milieux élasto-viscoplastiques par la théorie de l'endommagement continu*. Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Compiègne, 1988.
- [SAA 89] K. SAANOUNI, J.-L. CHABOCHE ET P.-M. LESNE. On the creep crack growth prediction by a non local damage formulation. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 8(6) : p.437–459, 1989.
- [SAA 92] K. SAANOUNI ET P.-M. LESNE. Sur la description phénoménologique des déformations anélastiques dans les composites endommageables. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 315 : p.1165–1170, 1992.
- [SAB 92] K. SAB. On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 11 : p.505–515, 1992.
- [SAI 95] K. SAI ET G. CAILLETAUD. Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms. *Int. J. of Plasticity*, 11(8) : p.991–1005, 1995.
- [SAL 84] J. SALENÇON. *Viscoélasticité*. Presses des Ponts et Chaussées, 1984.
- [SCH 65] A. SCHOFIELD ET P. WROTH. *Critical states soil mechanics*. MacGraw Hill, 1965.
- [SCH 79] H.L. SCHREYER, R.L. KULAK ET J.M. KRAMER. Accurate numerical solutions for elastic-plastic models. *J. Press. Vessel Technol.*, 101 : p.226–234, 1979.
- [SHA 93] G.X. SHAN, O. KOLEDNIK, F.D. FISHER ET H.P. STÜWE. A 2D model for numerical investigations of stable crack growth in thick smooth fracture mechanics specimens. *Engng Fracture Mechanics*, 45(1), 1993.
- [SHI 76] S. SHIMA ET M. OYANE. Plasticity theory for porous metals. *Int. J. Mech. Sci.*, 18 : p.285–291, 1976.
- [SID 96] F. SIDOROFF. Formalisme grandes déformations en hyperélasticité et viscoélasticité. In G. CAILLETAUD, ed, *Colloque National Mécamat Aussois*, 1996.

- [SIE 92] R. SIEVERT. *Eine Systematik für elastisch-plastische Stoffgleichungen*. PhD thesis, Dissertation, Schriftenreihe Phys. Ing.-Wiss., Band 23, TU Berlin, 1992.
- [SIE 98a] T. SIEGMUND ET W. BROCKS. Tensile decohesion by local failure criteria. *Technische Mechanik*, 18(4) : p.261–270, 1998.
- [SIE 98b] R. SIEVERT, S. FOREST ET R. TROSTEL. Finite deformation Cosserat-type modelling of dissipative solids and its application to crystal plasticity. *J. de Physique IV*, 8 : p.Pr8–357–364, 1998.
- [SIM 85a] J.C. SIMO ET R.L. TAYLOR. Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 48 : p.101–118, 1985.
- [SIM 85b] J.C. SIMO, R.L. TAYLOR ET K.S. PISTER. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 51 : p.177–208, 1985.
- [SIM 86] J.C. SIMO ET R.L. TAYLOR. Return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 22 : p.649–670, 1986.
- [SIM 87] J.C. SIMO ET J.W. JU. Strain- and stress-based continuum damage models - I - Formulation. *Int. J. Solids Structures*, 23(7) : p.821–840, 1987.
- [SIM 91] J.C. SIMO ET S. GOVINDJEE. Nonlinear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 31 : p.151–176, 1991.
- [SIM 97] J.C. SIMO ET T.R.J. HUGHES. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, 1997.
- [SIQ 93] C. SIQUIERA. *Développement d'un essai biaxial sur plaques composites et utilisation pour la modélisation du comportement d'un matériau SMC*. Doctorat d'Université, Université de Franche-Comté, 1993.
- [SKR 98] J. SKRZYPEK ET A. GANCZARSKI. *Modeling of material damage and failure of structures*. Springer Verlag, 1998.
- [STA 98] A. STAROSELSKI ET L. ANAND. Inelastic deformation of polycrystalline face centered cubic materials by slip and twinning. *J. Mech. Phys. Sol.*, 46(4) : p.671–696, 1998.
- [STE 97] A.C. STEENBRINK, E. VAN DER GIESSEN ET P.D. WU. Void growth in glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, 45(3) : p.405–437, 1997.
- [SUQ 97] P. SUQUET, ed. *Continuum Micromechanics*, volume 377 of *CISM Courses and lectures*. Springer Verlag, 1997.
- [SZA 87] I. SZABO. *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, 1987.
- [TAB 97] L. TABOURET, M. FIVEL ET E. RAUCH. Generalised constitutive laws for FCC single crystals. *Material Science Engineering*, A234-236 : p.639–642, 1997.
- [TAH 99] S. TAHERI ET E. LORENTZ. An elastic–plastic constitutive law for the description of uniaxial and multiaxial ratchetting. *Int. J. of Plasticity*, 15 : p.1159–1180, 1999.
- [TAL 85] R. TALREJA. A continuum mechanics characterization of damaged composite materials. *Proc. Royal Soc. London*, pages 195–216, 1985.
- [TAN 70] K. TANAKA ET T. MORI. The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres. *Acta Metall.*, 18 : p.931–941, 1970.
- [TAY 38a] G.I. TAYLOR. *Analysis of plastic strain in a cubic crystal*, pages 218–224. Mc Millan, 1938.
- [TAY 38b] G.I. TAYLOR. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals.*, 62 : p.307–324, 1938.
- [TEO 76] C. TEODOSIU ET F. SIDOROFF. A theory of finite elastoviscoplasticity of single crystals. *Int. J. of Engng Science*, 14 : p.165–176, 1976.

- [TEO 93] C. TEODOSIU, J.L. RAPHANEL ET L. TABOUROT. Finite element simulation of the large elastoplastic deformation of multicrystals. In C. TEODOSIU, J.-L. RAPHANEL ET F. SIDOROFF, eds, *5th MECAMAT Int. seminar on Large Plastic Deformations : Fundamental Aspects and Applications to Metal Forming, Fontainebleau, France*, pages 153–168. MECAMAT'91, A.A. Balkema, 1993.
- [TEO 97] C. TEODOSIU, ed. *Constitutive Modeling of Polycrystalline Metals at Large Strains*, volume 376 of *CISM Courses and lectures*. Springer Verlag, 1997.
- [TOU 93] G. TOUZOT ET J. DABOUNOU. Intégration numérique de lois de comportement élastoplastique. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2(4) : p.465–494, 1993.
- [TRI 96] N. TRIANTAFYLIDIS ET S. BARDENHAGEN. The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *J. Mech. Phys. Sol.*, 44 : p.1891–1928, 1996.
- [TRO 93] R. TROSTEL. *Vektor- und Tensor- Algebra*. Mathematische Grundlagen der technischen Mechanik. I Beiträge zur theoretischen Mechanik, Vieweg, 1993.
- [TRU 60] C. TRUESDELL ET R. TOUPIN. *The classical field theories, Handbuch der Physik*, edited by S. Flügge, volume 3.1. Springer Verlag, 1960.
- [TRU 94] C. TRUESDELL ET W. NOLL. *The non-linear field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, réédition Springer Verlag, 1994.
- [TVE 84] V. TVERGAARD ET A. NEEDLEMAN. Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.*, 32 : p.157–169, 1984.
- [TVE 90a] V. TVERGAARD. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Material Science Engineering*, A125 : p.203–213, 1990.
- [TVE 90b] V. TVERGAARD. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Appl. Mech.*, 27 : p.83–151, 1990.
- [VAK 71] A.A. VAKULENKO ET M.L. KACHANOV. Continuum theory of medium with cracks. *Mech. of Solids, english transl. of Mekhanika Tverdogo Tela (in Russian)*, 6(4) : p.145–151, 1971.
- [VER 83] P.A. VERMEER. Frictional slip and non-associated plasticity. *Scand. J. Metallurgy*, 12 : p.268–276, 1983.
- [VOY 93] G.Z. VOYIADJIS ET P. KATTAN. Damage of fiber reinforced composite materials with micromechanical characterization. *Int. J. Solids Structures*, 30(20) : p.2757–2778, 1993.
- [WIL 64] M.L. WILKINS. *Calculation of elastic-plastic flow*. Academic Press, New York, 1964.
- [XIA 95] L. XIA, C.F. SHIH ET J.W. HUTCHINSON. A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *J. Mech. Phys. Sol.*, 43(3) : p.389–413, 1995.
- [YOD 84] P.J. YODER ET R.L. WHIRLEY. On the numerical implementation of elastoplastic models. *J. of Applied Mechanics*, 51(2) : p.283–287, 1984.
- [ZAO 85] A. ZAOUÏ. Approximate statistical modelling and applications. In E. SANCHEZ-PALENCIA ET A. ZAOUÏ, eds, *Homogenization techniques for composite media*, pages 337–397, Lecture notes in physics, No. 272, 1985. Springer Verlag.
- [ZAO 93a] A. ZAOUÏ. *Matériaux hétérogènes*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 1993.
- [ZAO 93b] A. ZAOUÏ ET J.L. RAPHANEL. On the nature of the intergranular accommodation in the modelling of elastoviscoplastic behaviour of polycrystalline aggregates. In J. L. RAPHANEL, C. TEODOSIU ET SIDOROFF F., eds, *5th MECAMAT Int. Seminar on Large Plastic Deformations*, pages 27–38. MECAMAT'91, A.A. Balkema, 1993.

- [ZAR 87] J. ZARKA. *Modelling small deformations of polycrystals*, chapter Systematic Structural Modeling of Metals, pages pp.374–410. Elsevier, 1987.
- [ZHA 95] Z.L. ZHANG ET E. NIEMI. A new failure criterion for the Gurson–Tvergaard dilational constitutive model. *Int. J. Frac.*, 70 : p.321–334, 1995.
- [ZHU 95] Y.Y. ZHU ET S. CESCOTTO. Fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. *Int. J. Solids Structures*, 32(11) : p.1607–1641, 1995.
- [ZIE 96] J. ZIEBS, J. BRESSERS, H. FRENZ, D.R. HAYHURST, H. KLINGELHÖFFER ET S. FOREST. *Int. Symp. on Local strain and temperature measurements in non-uniform fields at elevated temperatures, Berlin*. Woodhead Pub.Lim., 1996.
- [ZIE 00] O.C. ZIENKIEWICZ ET R.L. TAYLOR. *The finite element method, Vol. I-III*. Butterworth–Heinemann, 2000.

Index

- θ -méthode, 63, 346
- Accommodation élastoplastique, 273
- Adiabatique, 23
- Anisotropie, 46, 109, 183
- Assemblage, 74
- Bifurcation, 385
- Bornes, 239
 - Hashin–Shtrikman, 256
 - Reuss, 241
 - Voigt, 241
- Chargement
 - cyclique, 99, 106, 109
 - non proportionnel, 109
- Cinématique, 289
- Cohérence, 31, 87, 94, 192, 316, 347, 351, 386
- Compatibilité, 391
- Condition d’Hadamard, 391
- Configuration isocline, 315
- Contrôle d’erreur, 61
- Contrainte
 - effective, 138, 148, 158, 174
 - interne, 29
- Contraintes
 - planes, 373
- Convergence, 58
- Convexité, 88
- Corotationnel, 296
- Cosserat, 286, 327, 382, 414
- Couplage, 26, 165
- Critère, 39, 80, 134
 - anisotrope, 46
 - Drucker–Prager, 43, 90
 - Hill, 47
 - Mohr–Coulomb, 45
 - Tresca, 42, 89
 - von Mises, 42, 89
- Décomposition
 - multiplicative, 310, 323, 340
 - polaire, 297
- Déformation, 297
- Déformation progressive, 101, 107, 358
- Dérivée de Jaumann, 294
- Dérivées convectives, 295
- Désactivation des dommages, 181, 209
- Développement asymptotique, 260
- Discrétisation, 73
- Discrétisation spatiale, 66
- Dissipation, 21, 82, 85, 97, 166, 304, 334
- Dommage
 - scalaire, 155
 - tensoriel, 155, 200
- Ecoulement, 81, 86, 89, 93, 136, 172
- Ecrouissage, 24, 81, 94, 111, 138
 - cinématique, 31, 95, 105, 111
 - isotrope, 31, 95, 111
 - multiplicatif, 38, 114
 - non linéaire, 95, 106
- Effacement, 37
- Effet unilatéral, 181
- Efforts extérieurs, 301
- Efforts intérieurs, 18, 300
- Élément isoparamétrique, 69
- Éléments finis, 65
- Elasticité hétérogène, 237
- Ellipticité, 400

- Endommagement, 24, 143
- Energie
libre, 21, 96
stockée, 97
- Entropie, 20, 304, 334
- Equation différentielle, 59
- Eshelby, 254
- Evanescence, 107, 108
- Fissure, 146, 176, 365
- Fluage, 32
- Force thermodynamique, 25
- Germination, 139
- Glissement simple, 318, 337
- Gradient conjugué, 54
- Grandes déformations, 289, 376
- Hencky–Mises, 91
- Homogénéisation, 217
en thermoélasticité, 258
non linéaire, 265
- Hyperélasticité, 308, 333
- Hypoélasticité, 308
- Inclusion d’Eshelby, 254
- Incompressibilité, 369
- Indifférence matérielle, 306
- Intégration, 59
 θ –méthode, 63
explicite, 60
implicite, 63
Runge–Kutta, 60
- Intégration discrète, 67
- Interface (d’une loi de comportement),
345
- Invariant, 41
- Isocline (configuration), 315
- Kuhn–Tucker, 88
- Lemme de Hill–Mandel, 235
- Localisation, 385, 400
- Loi de comportement, 24, 77, 79, 83,
305
- Longueur d’arc, 57
- Mémoire, 107, 108, 281
- Méthode
BFGS, 52
de Newton, 48
de Riks, 55
itérative, 51, 54
- Méthodes asymptotiques, 236
- Maillage, 410
- Matériaux
compressibles, 130, 361
hétérogènes, 217
poreux, 130, 131, 361
standards généralisés, 82, 315
- Matrice d’interaction, 116, 117
- Matrice tangente cohérente, 64, 77,
345
- Mesures de déformation, 297
- Milieu
continu généralisé, 284, 325, 414
courbure, 285
flexion, 285
de Cosserat, 286, 327
- Modèle
à 3 phases, 251
autocohérent, 250
de Berveiller–Zaoui, 266
de Kröner, 266
de Prager, 29
en β , 273
standard généralisé, 25
- Modèle rhéologique, 27
- Modules effectifs, 237
- Monocristal, 115, 117, 323
- Moyenne
d’ensemble, 228
spatiale, 228
- Multicinématique, 105, 353
- Multimécanismes, 105, 115, 123, 125,
323
- Newton–Raphson, 48
- Normalité, 85, 86, 89, 188
- Norton–Hoff, 38
- Objectivité, 17, 290, 299, 316

- Objet matériau, 343
- Opérateur de Green, 244
- Périodicité, 376
- Pas adaptatif, 61
- Perte d'unicité, 387
- Plasticité, 28, 79, 84, 125, 134, 310
 - non associée, 94
 - parfaite, 87
- Points de Gauss, 67
- Polycristal, 277
- Potentiel, 21
- Prager, 29, 92
- Prandtl–Reuss, 90, 346
- Processus irréversibles, 19
- Propagation, 146, 176, 365
- Puissances virtuelles, 18, 73, 299
- Référentiel corotationnel, 296
- Régularisation, 410
- Recouvrance, 37
- Relaxation, 32
- Restauration, 111, 358
- Rochet, 101, 107, 358
- Rotation propre, 296
- Runge–Kutta, 60, 346
- Rupture, 146, 176, 364
- Standard généralisé, 82, 315
- Structures à gros grain, 284
- Surécrouissage, 280
- Symétrie, 307
- Température, 39
- Température variable, 351, 358
- Théorie systématique, 244
- Thermoélasticité, 22, 258, 260
- Thermodynamique, 19, 303
- Transformations finies, 289, 376
- Transports convectifs, 292
- Travail plastique, 85, 87
- Travaux virtuels, 18
- Unicité, 387
- Variable interne, 21, 83, 343
- Vieillessement, 114
- Viscoélasticité, 32, 309
- Viscoplasticité, 34, 79, 84, 111, 125, 135, 197, 316, 353