

# Second and third gradient theories in continuum mechanics

Samuel Forest

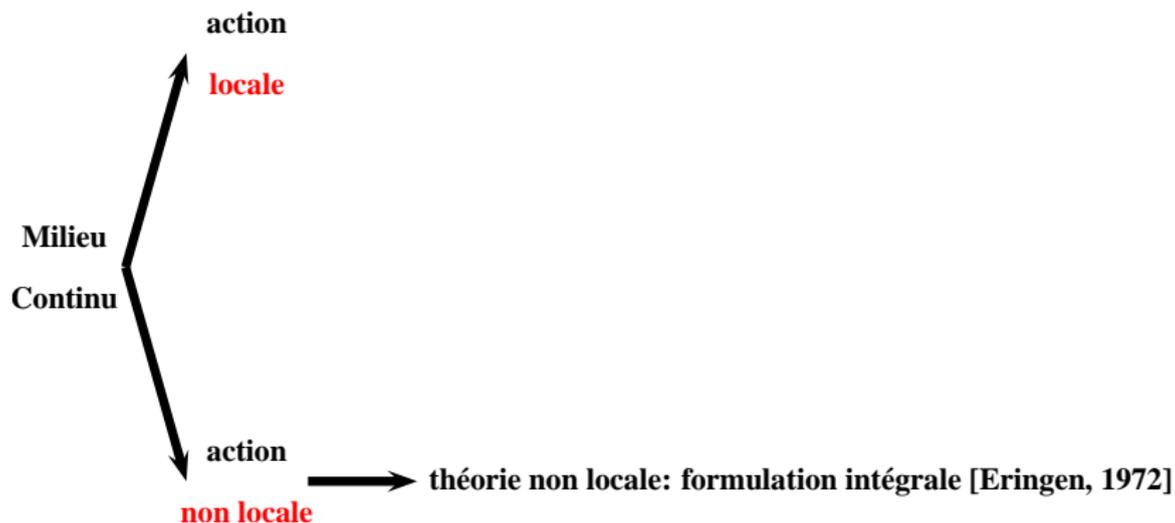
Mines ParisTech / CNRS  
BP 87, 91003 Evry, France  
Samuel.Forest@ensmp.fr



# Mécanique des milieux continus généralisés

Principe de l'**action locale**: *seule compte l'histoire d'un voisinage arbitrairement petit de la particule  $\underline{X}$*

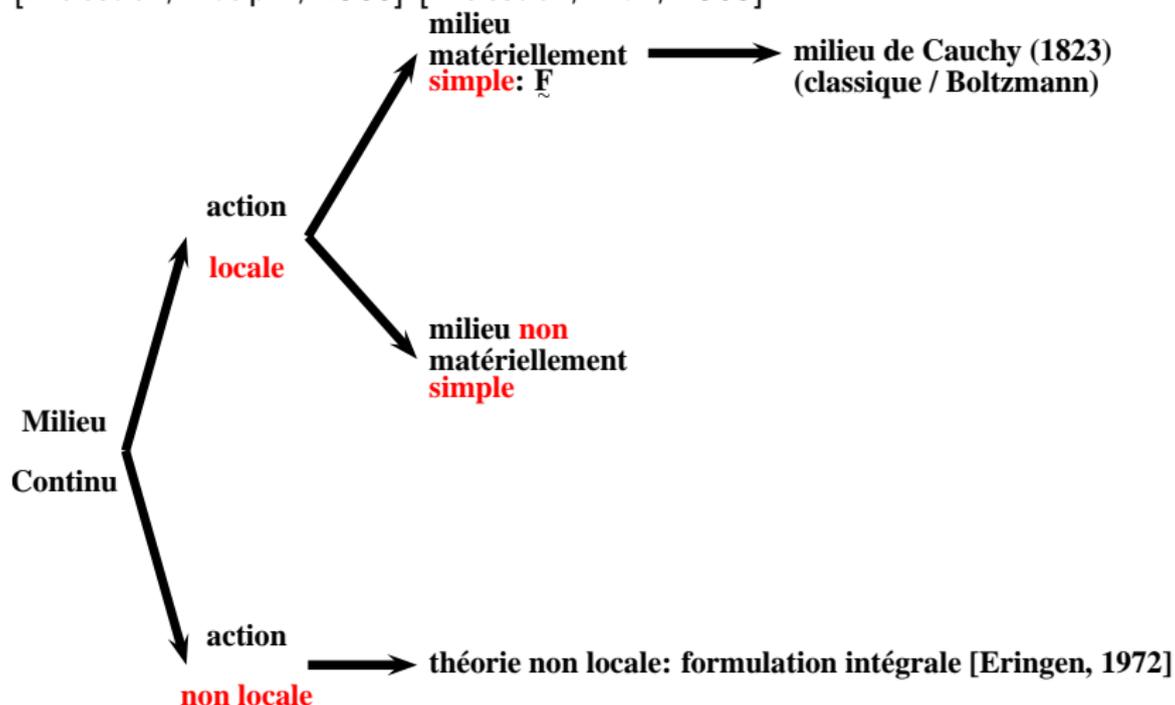
[Truesdell, Toupin, 1960] [Truesdell, Noll, 1965]



# Mécanique des milieux continus généralisés

Principe de l'**action locale**: seule compte l'histoire d'un voisinage arbitrairement petit de la particule  $\underline{X}$

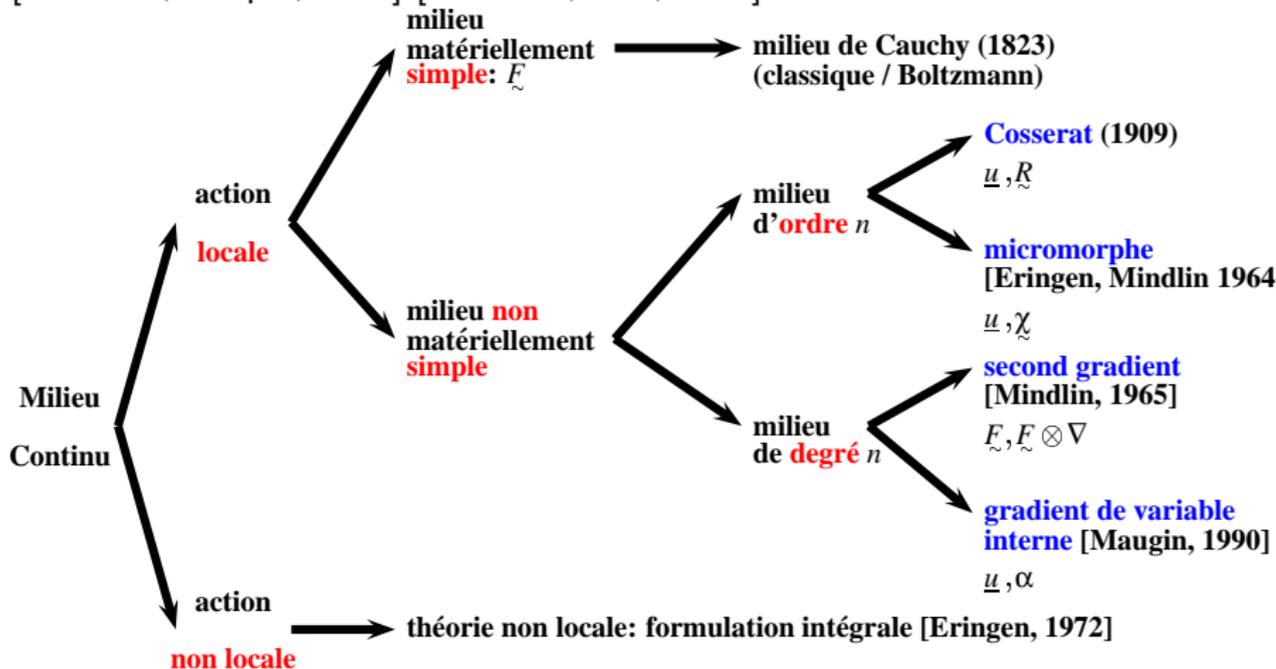
[Truesdell, Toupin, 1960] [Truesdell, Noll, 1965]



# Mécanique des milieux continus généralisés

Principe de **l'action locale**: *seule compte l'histoire d'un voisinage arbitrairement petit de la particule  $\underline{X}$*

[Truesdell, Toupin, 1960] [Truesdell, Noll, 1965]



# Plan

- 1 Théorie du second gradient du déplacement et effets d'échelles
- 2 Théorie du troisième gradient et tension de surface

# Plan

- 1 Théorie du second gradient du déplacement et effets d'échelles
- 2 Théorie du troisième gradient et tension de surface



## ON FIRST STRAIN-GRADIENT THEORIES IN LINEAR ELASTICITY

R. D. MINDLIN

Department of Civil Engineering, Columbia University

and

N. N. ESHEL

Department of Civil Engineering, The City College,  
University of the City of New York

**Abstract**—This paper contains a study of the linear theory of elasticity in which the potential energy-density depends on the gradient of the strain in addition to the strain.

In the first part of the paper, three forms of the theory are compared and the relations connecting the stresses in the three forms and the boundary conditions in the three forms are derived. In the second part of the paper, ambiguities in the form of the moment-equation of equilibrium and the definition of couple-stress are resolved by a derivation based on conservation principles rather than the variational principles employed previously.

La méthode  
des puissances virtuelles en mécanique  
des milieux continus

PREMIÈRE PARTIE

Théorie du second gradient

par

P. GERMAIN\*

---

## Milieu du second gradient

- degrés de liberté

$$DOF := \{\underline{\mathbf{u}}\}$$

- espace des champs virtuels

$$\mathcal{V}^o = \{\underline{\dot{\mathbf{u}}}\}, \quad \mathcal{V} = \{\underline{\dot{\mathbf{u}}}, \underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c, \underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c\}$$

Les champs  $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$  sont supposés au moins deux fois continûment différentiables

## Efforts intérieurs

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs est la forme linéaire la plus générale portant sur l'ensemble des variables de  $\mathcal{V}$  :

$$p^{(i)} = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) + \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c)$$

Les grandeurs duales associées aux premier et second gradients de vitesses sont le tenseur des forces–contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le tenseur dit des hyper–contraintes  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  ( $S_{ijk} = S_{ikj}$ ). L'axiome de la puissance virtuelle des efforts intérieurs stipule que  $\mathcal{P}^{(i)}$  est nulle pour tout mouvement de corps rigide  $\implies \underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique  $\mathcal{D} \subset V$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)}(\underline{\dot{\mathbf{u}}}) &= \int_{\mathcal{D}} - \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \nabla^c) \cdot \nabla^c \right) \cdot \underline{\dot{\mathbf{u}}} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left( (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \nabla^c + ((\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) : \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \nabla^c \right) dV \end{aligned}$$

(Germain, 1973)

## Efforts intérieurs

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs est la forme linéaire la plus générale portant sur l'ensemble des variables de  $\mathcal{V}$  :

$$p^{(i)} = \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) + \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c)$$

Les grandeurs duales associées aux premier et second gradients de vitesses sont le tenseur des forces–contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le tenseur dit des hyper–contraintes  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  ( $S_{ijk} = S_{ikj}$ ). L'axiome de la puissance virtuelle des efforts intérieurs stipule que  $\mathcal{P}^{(i)}$  est nulle pour tout mouvement de corps rigide  $\implies \underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique  $\mathcal{D} \subset V$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)}(\underline{\dot{\mathbf{u}}}, \dot{T}) &= \int_{\mathcal{D}} - \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \nabla^c). \nabla^c \right) . \underline{\dot{\mathbf{u}}} \, dV \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} \left( \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \nabla^c). \underline{\mathbf{n}} \right) . \underline{\dot{\mathbf{u}}} + (\underline{\underline{\mathbf{S}}}. \underline{\mathbf{n}}) : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) \right) dS \end{aligned}$$

## Formule de Stokes pour les surfaces

On définit les opérateurs dérivée tangentielle  $\underline{\mathbf{D}}_t$  et dérivée normale  $D_n$  d'un champ de vecteurs  $\underline{\mathbf{u}}$  sur une frontière  $S$  :

$$\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla = \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{D}}_t + (D_n \underline{\mathbf{u}}) \otimes \underline{\mathbf{n}}, \quad \text{avec} \quad D_n \underline{\mathbf{u}} = (\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla) \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

Le théorème de la divergence sur une surface régulière  $S$  appuyée sur un contour  $\Gamma$  s'énonce

$$\int_S \underline{\mathbf{D}}_t \cdot \underline{\mathbf{u}} \, dS = \int_S 2R \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, dS + \int_\Gamma \underline{\boldsymbol{\nu}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, dl \quad \text{avec} \quad \underline{\boldsymbol{\nu}} = \underline{\mathbf{t}} \times \underline{\mathbf{n}}$$

où  $2R = \underline{\mathbf{D}}_t \cdot \underline{\mathbf{n}}$  est le double de la courbure moyenne de la surface au point courant.

## Efforts intérieurs

Comme il subsiste encore un gradient de la vitesse dans la contribution surfacique, on peut une seconde fois appliquer le théorème de la divergence mais dans le cas d'une surface fermée sans arête pour simplifier

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)}(\underline{\dot{\mathbf{u}}}) &= \int_{\mathcal{D}} - \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \underline{\underline{\nabla}}^c). \underline{\underline{\nabla}}^c \right) . \underline{\dot{\mathbf{u}}} \, dV \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \underline{\underline{\nabla}}^c). \underline{\mathbf{n}} + 2R \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) - (\underline{\underline{\mathbf{S}}}. \underline{\mathbf{n}}). \underline{\mathbf{D}}_t \right) . \underline{\dot{\mathbf{u}}} \\ &\quad + \left( \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) \right) . D_n \underline{\dot{\mathbf{u}}} \, dS \end{aligned}$$

où  $D_n$  et  $\underline{\mathbf{D}}_t$  désignent respectivement les opérateurs dérivées normale et tangentielle définis précédemment.

## Efforts extérieurs

- efforts volumiques

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_{\mathcal{D}} \left( \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{P}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c) \right) dV$$

où  $\underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{W}}$  sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique du gradient des vitesses. Les grandeurs duales introduites sont les simples forces de volume  $\underline{\mathbf{f}}$ , les couples de volume  $\underline{\mathbf{C}}$  et les doubles forces de volume  $\underline{\mathbf{P}}$  qui peuvent en principe exister dans la théorie classique. Les triples forces  $\underline{\mathbf{P}}$  ne peuvent exister qu'au sein d'un milieu de degré 2.

- efforts surfaciques. La forme la plus générale de la puissance des efforts de contact apparaît en considérant la forme de la contribution surfacique dans l'expression transformée des efforts intérieurs :

$$\mathcal{V}^c = \{ \underline{\dot{\mathbf{u}}}, D_n \underline{\dot{\mathbf{u}}} \}, \quad p^{(c)} = \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{M}} \cdot D_n \underline{\dot{\mathbf{u}}}$$

où  $\underline{\mathbf{t}}$  est le vecteur contrainte,  $\underline{\mathbf{M}}$  une double force normale

# Equations d'équilibre

L'application du principe des puissances virtuelles

$$\mathcal{P}^{(i)}(\vartheta^* \in \mathcal{V}) = \mathcal{P}^{(c)}(\vartheta^* \in \mathcal{V}^c) + \mathcal{P}^{(e)}(\vartheta^* \in \mathcal{V}^o)$$

conduit aux équations d'équilibre en volume :

$$\underline{\tau} \cdot \nabla^c + \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{S}} \cdot \nabla^c + \underline{\mathbf{P}} \cdot \nabla^c$$

et au contour :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{t}} &= \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{n}} + 2R\underline{\mathbf{S}} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) - (\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{D}}_t \\ \underline{\mathbf{M}} &= \underline{\mathbf{S}} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) \end{aligned}$$

L'équilibre mécanique est décrit par une seule équation aux dérivées partielles faisant intervenir la divergence d'un *tenseur de contraintes effectives*  $\underline{\tau}$ . Les contraintes effectives contiennent la contribution des *contraintes intrinsèques*  $\underline{\sigma}$ , celles pour lesquelles des lois de comportement seront nécessaires. Des lois de comportement sont aussi nécessaires pour les hypercontraintes.

# Bilan d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique des milieux continus prend ici la forme :

$$\rho \dot{\epsilon} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) + \underline{\underline{\mathbf{S}}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c) - \underline{\mathbf{q}} \cdot \nabla^c + r$$

où  $\epsilon$  est la densité volumique d'énergie interne du milieu

## Second principe de la thermodynamique des milieux continus

- L'inégalité de Clausius–Duhem s'écrit ici :

$$\rho (T \dot{\eta} - \dot{\epsilon}) + \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) + \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot (\nabla^c T) \geq 0$$

- Cas isotherme, en introduisant la densité d'énergie libre

$$\Psi = \epsilon - T\eta$$

$$-\rho \dot{\Psi} + \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c) + \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{u}}} \otimes \nabla^c \otimes \nabla^c \geq 0$$

- Cas de l'élasticité en transformations infinitésimales :

$$\Psi(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \underline{\mathbf{u}}), \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{K}}}}$$

## Second gradient du déplacement ou gradient de déformation?

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{u}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}$$

La même information est contenue dans  $\underline{\underline{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}$  et dans  $\underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}$ . Il n'y a donc qu'une seule théorie du second gradient, même si elle peut être présentée d'au moins trois façons différentes comme dans (Mindlin and Eshel, 1968). En effet, le gradient de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  s'exprime comme une fonction linéaire de  $\underline{\underline{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}$ . Inversement, le second gradient du déplacement est lié au gradient de déformation par la relation établie par (Toupin, 1962) en grandes transformations :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{\mathbf{1}}}_T : (\underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}}) - \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}})$$

i.e. dans le contexte des petites déformations :

$$\underline{\underline{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} : (\underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\varepsilon}})$$

# Elasticité linéaire du second gradient

## Degrés de liberté

$$\underline{\mathbf{u}} \quad u_j$$

## Mesures de déformation

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \{\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla\}, \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes \nabla \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad K_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$$

## Equations d'équilibre

$$(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \nabla). \nabla + \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad \sigma_{ij,j} - S_{ijk,jk} + f_i = 0$$

## Conditions aux limites

$$\underline{\mathbf{t}} = (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\underline{\mathbf{S}}}. \nabla). \underline{\mathbf{n}} - (\underline{\underline{\mathbf{S}}}. \underline{\mathbf{n}}). \underline{\mathbf{D}}_t + 2R\underline{\underline{\mathbf{S}}}: (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})$$

$$t_i = (\sigma_{ij} - S_{ijk,k})n_j - D_j S_{ijk} n_k + 2RS_{ijk} n_j n_k$$

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}: (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) \quad M_i = S_{ijk} n_j n_k$$

# Elasticité linéaire du second gradient

## Potentiel d'élasticité isotrope

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 K_{kii} K_{jjk} + a_2 K_{jji} K_{kki} \\ + a_3 K_{kii} K_{kjj} + a_4 K_{kji} K_{kji} + a_5 K_{kji} K_{ijk}$$

## Relations d'élasticité isotrope

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$
$$S_{ijk} = \frac{1}{2} a_1 (K_{ppk} \delta_{ij} + K_{ppj} \delta_{ik} + 2 K_{ipp} \delta_{jk}) \\ + 2 a_2 K_{ppi} \delta_{jk} + a_3 (K_{kpp} \delta_{ij} + K_{jpp} \delta_{ik}) \\ + 2 a_4 K_{kij} + a_5 (K_{ijk} + K_{jik})$$

# Elasticité linéaire du second gradient

$$\left\{ \begin{array}{c} S_{111} \\ S_{112} \\ S_{221} \\ S_{222} \\ S_{121} \\ S_{122} \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{c} K_{111} \\ K_{112} \\ K_{221} \\ K_{222} \\ K_{121} \\ K_{122} \end{array} \right\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2a & 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 0 & a_1 + 2a_3 \\ 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & a_1 + 2a_2 & a_1 + 2a_5 & 0 \\ a_1 + 2a_2 & 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & 0 & a_1 + 2a_5 \\ 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 2a & a_1 + 2a_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_3 & a_{345} & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + a_3 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & 0 & a_{345} \end{bmatrix}$$

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$a_{345} = a_3 + 2a_4 + a_5$$

# Effets d'échelle en théorie du second gradient

- Longueur caractéristique/interne :

$$l_c = \sqrt{\frac{A}{\mu}}$$

- Conséquence : la concentration de contrainte au bord d'un trou dépend de la taille du trou
- une certaine non localité...
- équations aux dérivées partielles d'ordre 4; analogie :

	1D	2D	3D
analyse asymptotique	poutre d'Euler–Bernoulli	plaque de Love–Kirchhoff	théorie du second gradient
cinématique locale approchée	poutre de Timoshenko	plaque de Mindlin	Cosserat, micromorphe

# Effets d'échelle en théorie du second gradient

- Longueur caractéristique/interne :

$$l_c = \sqrt{\frac{A}{\mu}}$$

- Conséquence : la concentration de contrainte au bord d'un trou dépend de la taille du trou
- une certaine non localité...
- équations aux dérivées partielles d'ordre 4; analogie
- Toupin remarque que, dans un milieu non centro-symétrique, une surface libre est le siège de déformations résiduelles...

# Plan

- 1 Théorie du second gradient du déplacement et effets d'échelles
- 2 Théorie du troisième gradient et tension de surface

## SECOND GRADIENT OF STRAIN AND SURFACE-TENSION IN LINEAR ELASTICITY

R. D. MINDLIN

Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, N.Y.

**Abstract**—In this paper there is formulated a linear theory of deformation of an elastic solid in which the potential energy-density is a function of the strain and its first and second gradients. This is a theory in which cohesive force and surface-tension are intrinsic. A solution is given for the strain and surface-tension, or surface-energy per unit area, resulting from separation of a solid along a plane; and a comparison is made with an analogous lattice model. Also presented are a general solution of the displacement-equation of equilibrium in terms of stress functions and the particular solution for the concentrated force. The special case of a liquid is considered and the solutions are given for the surface-tensions at plane and spherical surfaces.

## Milieu du troisième gradient

- troisième gradient du déplacement  $\equiv$  second gradient de la déformation
- contexte infinitésimal, on vise l'élasticité linéarisée

$$DOF = \{\dot{\underline{\mathbf{u}}}\}$$

$$\overset{1}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \underline{\mathbf{u}}), \quad \overset{2}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \nabla \otimes \nabla \otimes \underline{\mathbf{u}}, \quad \overset{3}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \underline{\mathbf{u}}$$

$$\Psi(\overset{1}{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \overset{2}{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \overset{3}{\underline{\underline{\varepsilon}}})$$

- densité de puissance des efforts intérieurs

$$\rho^{(i)} = \overset{1}{\underline{\underline{\sigma}}} : \overset{1}{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} + \overset{2}{\underline{\underline{\sigma}}} : \overset{2}{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} + \overset{3}{\underline{\underline{\sigma}}} : \overset{3}{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}$$

contraintes généralisées : simples, doubles et triples forces surfaciques

- énergie

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho^{(i)}$$

# Conditions d'équilibre

- efforts extérieurs

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_{\mathcal{D}} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{u}}} \, dV, \quad \mathcal{P}^{(i)} = \int_{\partial\mathcal{D}} \left( \underline{\mathbf{t}}^1 \cdot \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{t}}^2 \cdot D_n \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{t}}^3 \cdot D_n^2 \underline{\dot{\mathbf{u}}} \right) dS$$

vecteurs–contraintes généralisés

- équations de champs

$$\underline{\mathcal{T}} \cdot \nabla + \underline{\mathbf{f}} = 0$$

contrainte effective

$$\underline{\mathcal{T}} = \underline{\mathcal{G}}^1 - \underline{\sigma}^2 \cdot \nabla + (\underline{\sigma}^3 \cdot \nabla) \cdot \nabla$$

(Mindlin, 1965)

# Conditions d'équilibre

- conditions aux limites

$$\underline{\mathbf{t}}^1 = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{n}} + \left( (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^2 - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{\mathbf{n}} + (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{D}}_L - (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{D}}_t) \cdot (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})) \right) \cdot \underline{\mathbf{D}}_L$$

$$\underline{\mathbf{t}}^2 = (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^2 - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 \cdot \underline{\nabla}) : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) + ((\underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{D}}_L) \cdot \underline{\mathbf{n}} + (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})) \cdot \underline{\mathbf{D}}_L$$

$$\underline{\mathbf{t}}^3 = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^3 : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})$$

- opérateur  $\underline{\mathbf{D}}_L$

$$\underline{\mathbf{D}}_L = (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{D}}_t) \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{D}}_t$$

# Loi de comportement

- potentiel d'élasticité linéarisée isotrope

$$\begin{aligned}\rho\Psi &= \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}^1\varepsilon_{jj}^1 + \mu\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{ij}^1 + a_1\varepsilon_{ijj}^2\varepsilon_{ikk}^2 + a_2\varepsilon_{iik}^2\varepsilon_{kjj}^2 + a_3\varepsilon_{iik}^2\varepsilon_{jjk}^2 \\ &+ a_4\varepsilon_{ijk}^2\varepsilon_{ijk}^2 + a_5\varepsilon_{ijk}^2\varepsilon_{kji}^2 + b_1\varepsilon_{ijj}^3\varepsilon_{kkll}^3 + b_2\varepsilon_{ijkk}^3\varepsilon_{ijll}^3 \\ &+ b_3\varepsilon_{ijjk}^3\varepsilon_{jkl}^3 + b_4\varepsilon_{ijjk}^3\varepsilon_{llkj}^3 + b_5\varepsilon_{ijjk}^3\varepsilon_{lljk}^3 + b_6\varepsilon_{ijk}^2\varepsilon_{ijk}^2 \\ &+ b_7\varepsilon_{ijkl}^3\varepsilon_{jkli}^3 + c_1\varepsilon_{ii}^1\varepsilon_{jjkk}^3 + c_2\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{ijkk}^3 + c_3\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{kkij}^3 + b_0\varepsilon_{ijj}^3\end{aligned}$$

18 modules d'élasticité

- lois d'élasticité

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}}, \quad \overset{2}{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^2}, \quad \overset{3}{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^3}$$

(Toupin, 1962; Mindlin, 1964; Mindlin, 1965)

# Lois de comportement

- contexte infinitésimal

$$I^2 = \frac{a_i}{\mu}, \quad |\nabla \otimes u| \ll 1, \quad I|\nabla \otimes \nabla \otimes u| \ll 1, \quad I^2|\nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes u| \ll 1$$

- lois d'élasticité

$$\overset{1}{\sigma}_{pq} = \lambda \overset{1}{\varepsilon}_{ii} \delta_{pq} + 2\mu \overset{1}{\varepsilon}_{pq} + c_1 \overset{3}{\varepsilon}_{ijij} \delta_{pq} + c_2 \overset{3}{\varepsilon}_{pqii} + \frac{1}{2} c_3 (\overset{3}{\varepsilon}_{iipq} + \overset{3}{\varepsilon}_{iiqp})$$

$$\overset{2}{\sigma}_{pqr} = a_1 (\overset{2}{\varepsilon}_{pii} \delta_{qr} + \overset{2}{\varepsilon}_{qii} \delta_{pr}) + \frac{1}{2} a_2 (\overset{2}{\varepsilon}_{iip} \delta_{qr} + 2\overset{2}{\varepsilon}_{rii} \delta_{qp} + \overset{2}{\varepsilon}_{iiq} \delta_{pr})$$

$$+ 2a_3 \overset{2}{\varepsilon}_{iir} \delta_{pq} + 2a_4 \overset{2}{\varepsilon}_{pqr} + a_5 (\overset{2}{\varepsilon}_{rqp} + \overset{2}{\varepsilon}_{rpq})$$

$$\overset{3}{\sigma}_{pqrs} = \frac{2}{3} \overset{3}{\varepsilon}_{ijij} \delta_{pqrs} + \frac{2}{3} b_2 \overset{3}{\varepsilon}_{jkii} \delta_{jkpqrs} + \frac{1}{6} b_3 ((\overset{3}{\varepsilon}_{ijij} + \overset{3}{\varepsilon}_{iikj})) \delta_{jkpqrs} + 2\overset{3}{\varepsilon}_{jsii} \delta_{jpqr}$$

$$+ \frac{2}{3} b_4 \overset{3}{\varepsilon}_{iisj} \delta_{jpqr} + \frac{2}{3} b_5 \overset{3}{\varepsilon}_{iijj} \delta_{jpqr} + 2b_6 \overset{3}{\varepsilon}_{pqrs} + \frac{2}{3} b_7 (\overset{3}{\varepsilon}_{qrsp} + \overset{3}{\varepsilon}_{rspq} + \overset{3}{\varepsilon}_{spqr})$$

$$+ \frac{1}{3} c_1 \overset{1}{\varepsilon}_{ii} \delta_{pqrs} + \frac{1}{3} c_2 \overset{1}{\varepsilon}_{ij} \delta_{ijpqrs} + \frac{1}{3} c_3 \overset{1}{\varepsilon}_{is} \delta_{ipqr} + \frac{1}{3} b_0 \delta_{pqrs}$$

- tenseurs identité d'ordres 4 et 6

$$\delta_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}$$

$$\delta_{ijklmn} = \delta_{ik} \delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}$$

# Tension de surface

- La contribution  $\frac{1}{3}b_0\delta_{pqrs}$  représente des **forces de cohésion**, homogènes et auto-équilibrées. Le **module de cohésion** est  $b_0$ . Elle donne lieu à une **tension de surface**, énergie par unité de surface, associée à la formation d'une nouvelle surface.
- La tension de surface moyenne d'un solide du troisième gradient, de volume  $V$  et de surface  $A$ , est définie par

$$\bar{T} = \frac{\mathcal{W}}{A}, \quad \mathcal{W} := \int_V \rho \Psi dV$$

- Avec le potentiel élastique défini précédemment, l'énergie libre moyenne

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\sigma}^1 : \nabla \otimes \underline{u} + \sigma^2 : \nabla \otimes \nabla \otimes \underline{u} + \sigma^3 :: \nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \underline{u}) dV + \frac{1}{2} b_0 \int_V \nabla^2 \nabla \cdot \underline{u} dV$$

- En l'absence d'efforts extérieurs  $\underline{\mathbf{t}}^1 = \underline{\mathbf{t}}^2 = \underline{\mathbf{t}}^3 = 0$ , seul le dernier terme subsiste

$$\bar{T} = \frac{b_0}{2A} \int_V \nabla^2 \nabla \cdot \underline{u} dV = \frac{b_0}{2A} \int_S \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) dS$$

ce qui permet de définir la tension de surface ponctuelle, ou énergie de surface par unité de surface

$$T = \frac{1}{2} b_0 \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{u})$$

## Déformation et tension de surface

- On considère un demi-plan  $x \geq 0$  libre d'efforts extérieurs :

$$\underline{\mathbf{t}}^1 = \underline{\mathbf{t}}^2 = \underline{\mathbf{t}}^3 = 0 \quad \text{en } x = 0$$

- On recherche un déplacement de la forme

$$u_x = u_x(x), u_y = u_z = 0, \quad \varepsilon = u'_x$$

- L'équation d'équilibre donne

$$\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xxx}^2 + \sigma_{xxxx}^3 = 0$$

- La loi d'élasticité fournit, dans ces conditions

$$\sigma_{xx}^1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon + \bar{c}\varepsilon'', \quad \text{avec } \bar{c} = c_1 + c_2 + c_3$$

$$\sigma_{xxx}^2 = \bar{a}\varepsilon', \quad \text{avec } \bar{a} = 2(a_3 + a_4)$$

$$\sigma_{xxxx}^3 = b_0 + \bar{c}\varepsilon + \bar{b}\varepsilon'', \quad \text{avec } \bar{b} = 2(b_5 + b_6)$$

## Déformation et tension de surface

- L'équation d'équilibre fournit une équation différentielle d'ordre 6

$$\left(1 - l_{11}^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \left(1 - l_{12}^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \frac{d^2 u_x}{dx^2} = 0$$

où les coefficients  $l_{11}$  et  $l_{12}$  sont des longueurs caractéristiques, réelles ou complexes, intervenant dans l'équation de Navier généralisée

- La solution du problème aux limites précédent est de la forme

$$u_x = A_1 \exp\left(-\frac{x}{l_{11}}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{x}{l_{12}}\right)$$

où les constantes peuvent être identifiées à partir des conditions aux limites précédentes. Si les longueurs sont complexes, alors la solution s'exprime comme une somme de produits de fonctions sinusoidales et exponentielles

# Déformation et tension de surface

- On trouve alors l'expression de la tension de surface

$$T = -\frac{1}{2}b_0\varepsilon'(0) = -\frac{1}{2}b_0\left(\frac{A_1}{l_{11}^2} + \frac{A_2}{l_{22}^2}\right)$$

$$T = \frac{b_0^2(l_{11}^2 - l_{12}^2)}{2(\lambda + 2\mu)(l_{11}(l_{12}^2 + l_{10}^2)^2 - l_{12}(l_{11}^2 + l_{10}^2)^2)}$$

# Modèle de réseau atomique 1D

- points en  $x = n$  ( $n$  entiers relatifs)
- les forces entre particules sont limitées aux premiers, seconds et troisièmes voisins; elles sont supposées linéaires par rapport au déplacement relatif correspondant
- le réseau est séparé entre  $n = 0$  et  $n = -1$ , et on étudie le réseau  $n \geq 0$ ; la séparation est effectuée en ajoutant des efforts égaux et opposés aux résultantes des forces initiales exercées par le réseau sur les particules 0,1,2 par les particules -1,-2,-3; ces forces sont initialement auto-équilibrées

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0$$

- l'équilibre du demi-réseau s'écrit

$$P_0 = \alpha_1(u_1 - u_0) + \alpha_2(u_2 - u_0) + \alpha_3(u_3 - u_0)$$

$$P_1 = \alpha_1(u_2 - 2u_1 + u_0) + \alpha_2(u_3 - u_1) + \alpha_3(u_4 - u_1)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(u_{2+i} - 2u_2 + u_{2-i}) + \alpha_3(u_5 - u_2)$$

$$0 = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(u_{n+i} - 2u_n + u_{n-i})$$

# Modèle de réseau atomique 1D

- En adoptant la notation

$$\Delta^2 = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}, \quad \Delta^4 = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}, \dots$$

l'équation du mouvement se met sous la forme

$$(1 - \lambda_1^2 \Delta^2)(1 - \lambda_2 \Delta^2) \Delta^2 u_n = 0$$

où les  $\lambda_i$  s'exprime en fonction des  $\alpha_i$

- Une solution s'annulant pour  $n \rightarrow 0$  est

$$u_n = A'_1 \exp(-n/l'_1) + A'_2 \exp(-n/l'_2)$$

de la même forme que la solution continue

- identification de certaines des modules d'élasticité généralisés en fonction des caractéristiques atomiques

# Cas du fluide élastique

- Le potentiel d'élasticité ne dépend que de la dilatation infinitésimale

$$\Delta = \nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

$$\rho \Psi_{\Delta}(\Delta, \nabla \Delta, \nabla \otimes \nabla \Delta) = \frac{1}{2} \lambda \Delta^2 + a_1 \nabla \Delta \cdot \nabla \Delta + b_1 (\nabla^2 \Delta)^2 + b_2 (\nabla \otimes \nabla \Delta) : (\nabla \otimes \nabla \Delta) + c_1 \Delta \nabla^2 \Delta + b_0 \nabla^2 \Delta$$

- pressions généralisées

$$p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta} = -\lambda \Delta - c_1 \nabla^2 \Delta$$

$$\underline{\mathbf{p}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \Delta} = -2a_1 \nabla \Delta$$

$$\underline{\underline{\pi}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \otimes \nabla \Delta} = -(b_0 + 2b_1 \nabla^2 \Delta + c_1 \Delta) \underline{\underline{\mathbf{1}}} - 2b_2 \nabla \otimes \nabla \Delta$$

- équation d'équilibre

$$p - \nabla \cdot \underline{\mathbf{p}} + (\nabla \otimes \nabla) : \underline{\underline{\pi}} = 0$$

en l'absence d'efforts volumiques

- la tension de surface est

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \frac{1}{2} b_0 \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Delta$$

## Tension de surface du fluide élastique

- Surface fluide plane  $\Delta = A_1 \exp(-x/l_1) + A_2 \exp(-x/l_2)$

$$T_0 = \frac{b_0^2(l_1^2 - l_2^2)}{2\lambda(l_1(l_2^2 + l_0^2) - l_2(l_1^2 + l_0^2))}$$

- Surface fluide sphérique de rayon  $r_0$

$$\Delta = A_1 \frac{l_1}{r} \sinh(r/l_1) + A_2 \frac{l_2}{r} \sinh(r/l_2), \quad T \simeq \frac{T_0}{1 + (8b_2 T_0 / b_0^2 r_0)}$$

Retrouve-t-on la loi de la Laplace? délicat pour la pression dont le sens est multiple ici! mais clair pour la dilatation moyenne de la sphère :

$$\bar{\Delta} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_V \Delta dV \simeq -\frac{6c_1 T}{b_0 \lambda r_0}$$

développement au premier ordre en fonction de la courbure de la surface

# Conclusions

- La mécanique des milieux continus généralisés permet de rester continu à de petites échelles, sans doute de l'ordre de quelques distances atomiques, au moins en élasticité.
- Traitement par des frontières diffuses.
- Autres applications (second gradient seulement!) :
  - ★ instabilité de Grinfeld (Danescu and Sidoroff, 1998)
  - ★ identification des constantes d'élasticité par atomistique (Maranganti and Sharma, 2007)
- Etendre Mindlin aux contraintes de surface plus générales?

Danescu A. and Sidoroff F. (1998).

*Second gradient vs. surface energy in the Asaro-Grinfeld instability.*

Journal de Physique IV, vol. 8, pp Pr8-79-86.

Germain P. (1973).

*La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient.*

J. de Mécanique, vol. 12, pp 235-274.

Maranganti R. and Sharma P. (2007).

*A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies.*

Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 55, pp 1823-1852.

Mindlin R.D. (1964).

*Micro-structure in linear elasticity.*

Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 16, pp 51-78.

Mindlin R.D. (1965).

*Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity.*

Int. J. Solids Structures, vol. 1, pp 417-438.

Mindlin R.D. and Eshel N.N. (1968).

*On first strain gradient theories in linear elasticity.*

Int. J. Solids Structures, vol. 4, pp 109–124.

Toupin R.A. (1962).

*Elastic materials with couple stresses.*

Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 11, pp 385–414.