

Aufbau und Identifikation von Stoffgleichungen für höhere Kontinua mittels Homogenisierungsmethoden

S. Forest

Eine erweiterte Homogenisierungsmethode wird entwickelt, um ein heterogenes Material durch ein homogenes effektives Cosserat - Medium zu ersetzen. Im nichtlinearen Fall wird ein phänomenologischer konstitutiver Rahmen für elastoviskoplastische Cosserat - Medien beschrieben. Die Homogenisierungsmethode kann dann benutzt werden, um die Materialparameter dieser Stoffgleichung zu bestimmen. Dabei wird das Konzept der kinematischen Krümmungsverfestigung hergeleitet.

1 Einleitung

Erweiterte Kontinua können benutzt werden, um den Einfluß der Mikrostruktur auf einige Aspekte des Materialverhaltens zu berücksichtigen. Sie unterteilen sich in drei wichtige Materialklassen. Das Materialverhalten nicht lokaler Medien wird durch eine Integralformulierung der Stoffgleichung beschrieben. Die Berücksichtigung von Gradienten n -ter Ordnung des Verschiebungsfeldes führt zu sogenannten Kontinua höheren Grades. Kontinua höherer Ordnung werden durch die Angabe zusätzlicher Freiheitsgrade gekennzeichnet, die von dem Verschiebungsfeld unabhängig sind. Jedem materiellen Punkt eines Cosserat - Kontinuums werden zum Beispiel eine Verschiebung und eine Mikrodrehung zugeordnet (Schäfer, 1967). Ausführliche theoretische Entwicklungen und Beispiele wurden in einem Band 1968 gesammelt (Kröner, 1968). Zwanzig bis dreißig Jahre später beobachtet man ein Wiederaufleben der Mechanik höherer Kontinua, das sich durch die rasante Entwicklung der numerischen Mechanik, aber auch der experimentellen Messtechniken erklären läßt (Bertram und Sidoroff, 1998).

Ein langwieriges Problem für die Anwendung der Mechanik höherer Kontinua bleibt die Identifikation zahlreicher zusätzlicher Materialparameter, die üblicherweise eingeführt werden müssen. Ein isotropes linear-elastisches Cosserat - Medium besitzt vier elastische Moduli zusätzlich zu den klassischen Lamé Konstanten. Die generalisierten intrinsischen Größen können nur bei nichthomogenen Verformungen zum Ausdruck kommen. Deshalb beziehen sich Schivje (1966), Gauthier und Jashman (1977) auf Torsion oder Biegeversuche. Die zusätzlichen Konstanten sind außerdem oft charakteristische Längen, die die gleiche Größenordnung wie die Heterogenitäten des Materials haben, so daß ganz kleine Proben betrachtet werden, wobei die gemessenen Größen dubios werden. Das plastische Materialverhalten hat sich als ein besseres Anwendungsgebiet für die höheren Kontinua erwiesen : Cosserat - Medien und Medien höheren Grades sind in der Lage, die Bildung von Scherfugen finiter Breite wiederzugeben. In vielen anderen Fällen aber führte die Suche nach den charakteristischen Längen bei nichtlinearem Verhalten zu umstrittenen Ergebnissen, insbesondere wenn die Größe der untersuchten Metallproben der Korngröße entsprechen muß (Stolken und Evans, 1998, Quilici u.a., 1998). Vielmehr bietet die Kombination von Feldmessungen und Strukturrechnungen (inverses Problem) eine viel erfolgreichere Methode für die Ermittlung der zusätzlichen Materialkonstanten (Geers u.a., 1998).

Das Problem der praktischen Anwendung der erweiterten Mechanik würde sich ganz anders darstellen, wenn eine systematische Methode für die Ermittlung der zusätzlich eingeführten Konstanten zur Verfügung stehen würde. Die Homogenisierungstheorie bietet eine solche Methode an. Die Arbeiten von Besdo, Dorau, Jonasch und Scholz (1986-1990) haben gezeigt, daß es möglich ist, ein heterogenes Material mit periodischer Mikrostruktur durch ein homogenes Cosserat-Material zu ersetzen. Die Lösung einzelner spezifischer Randwertprobleme auf der Einheitszelle liefert systematisch den Wert der effektiven elastischen Konstanten. Die Ergebnisse wurden auf die Rechnung von Strukturen angewandt, und es wurde gezeigt, daß das Cosserat - Ersatzmaterial zu einer feineren Beschreibung als das klassische Ersatzmaterial führen kann. Eine grundlegende Hypothese der klassischen Homogenisierungstheorie

lautet : die charakteristische Länge l der Materialinhomogenitäten soll viel kleiner sein als die Länge L der gerechneten Struktur oder, genauer gesagt, als die kleinste Wellenlänge der räumlichen Variation der makroskopischen Beanspruchungen. Dies gewährleistet, daß ein homogenes Ersatzmaterial (HEM) als Cauchy Kontinuum definiert werden kann. Als Erste betrachteten Beran und Mc Coy (1968) den Fall langsam variierender Makrofelder für random heterogene linear elastische Werkstoffe. Sie leiteten ein nichtlokales elastisches HEM ab, das durch ein Medium zweiten Grades approximiert werden konnte. Im Falle periodischer Mikrostruktur haben Gambin und Kröner (1989) die Methode der asymptotischen Entwicklungen angewandt, um ein HEM zweiten Grades herzuleiten.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie ein mikromorphes oder Cosserat HEM für heterogene elastische und elastoplastische Werkstoffe im Sinne der periodischen Homogenisierung aufgebaut werden kann.

2 Heterogene Materialien unter starken makroskopischen Beanspruchungsgradienten

2.1 Klassische Homogenisierungsmethoden

Im Rahmen der klassischen Homogenisierungstheorie wird ein repräsentatives Volumenelement Ω definiert, das die relevanten Aspekte der Mikrostruktur des heterogenen Materials enthält. Dann muß das folgende Randwertproblem auf Ω gelöst werden :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}}) \\ \textit{konstitutive Gleichungen} \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\nabla} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \textit{Randbedingungen} \end{array} \right. \quad (1)$$

wobei $\underline{\mathbf{u}}$ die Verschiebung ist, $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ der klassische Spannungstensor und $\underline{\nabla}$ der Nabla-Operator. Im Falle von Randomwerkstoffen muß Ω eine grosse Zahl von Heterogenitäten enthalten, um repräsentativ zu sein. Dann kann man homogene Randbedingungen einführen :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad \text{oder} \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (2)$$

so daß $\underline{\mathbf{E}} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle$, $\underline{\boldsymbol{\Sigma}} = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$ die mittleren makroskopischen Verzerrungs- und Spannungszustände sind. Wenn das Material eine periodische Mikrostruktur aufweist, dann ist Ω die Einheitszelle und das Verschiebungsfeld nimmt die folgende Form an :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{v}} \quad (3)$$

wobei $\underline{\mathbf{v}}$ den gleichen Wert an entgegengesetzten Punkten von $\partial\Omega$ annimmt. Ein Beispiel für eine Einheitszelle für ein Sandwich-Material wird in Bild 1 gegeben. Die dunkle Schicht ist aus Stahl und die Matrix aus weichem Material. Es werden aber zuerst nur die linearen elastischen Eigenschaften bei kleinen Verformungen betrachtet. Drei elementare Beanspruchungsbedingungen müssen ausgeübt werden, um die effektiven elastischen Konstanten zu ermitteln (Bild 1). Für alle erwähnten Randbedingungen gilt die sogenannte Hill-Mandel Bedingung :

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' \rangle = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* \rangle : \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' \rangle \quad (4)$$

wobei $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*$ ein divergenzfreies Spannungsfeld ist und $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}'$ ein kompatibles Verzerrungsfeld. Diese Vorgehensweise setzt das schon erwähnte Verhältnis $l \ll L_\omega$ zwischen den charakteristischen Längen des Problems voraus. Es bedeutet, daß die makroskopischen Größen sich so langsam ändern, daß $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ als konstant über Ω betrachtet werden können.

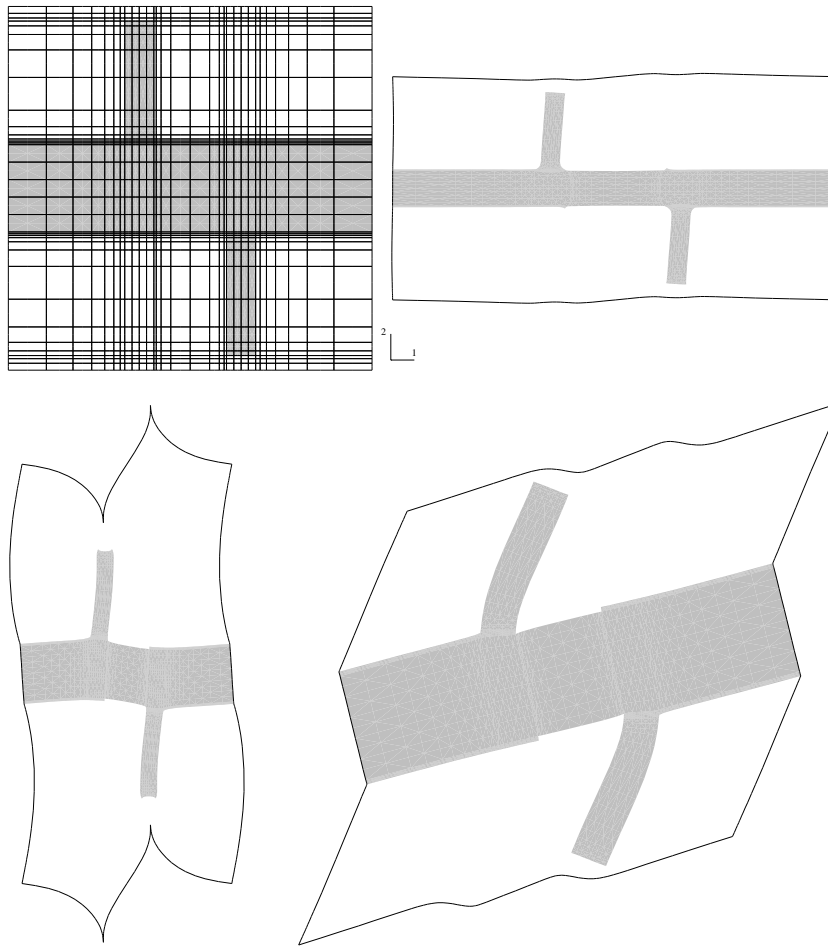


Bild 1. Einheitszelle eines periodischen heterogenen Materials (oben links); Extension in Richtung 1 (oben rechts) bzw. 2 (unten links), und einfache Scherung mit klassischen periodischen Randbedingungen.

2.2 Nichthomogene Randbedingungen an der Einheitszelle

Wenn starke Gradienten der makroskopischen Felder auftreten, kann man die Randbedingungen (2) durch einen quadratischen Ansatz ersetzen :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{D}}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (5)$$

wobei $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ ein konstanter Tensor dritter Stufe ist (Forest, 1998). Hier soll aber ein spezieller Fall untersucht werden, wo nur der Krümmungsanteil $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ von $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ betrachtet wird :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : ((\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{x}}) \quad \text{mit} \quad \text{sp}(\underline{\underline{\mathbf{K}}}) = 0 \quad (6)$$

wo $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ der Permutationstensor ist. Es folgt der Ausdruck der makroskopischen Deformation und deren Krümmung :

$$\underline{\mathbf{F}} = \langle \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_x \rangle \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}} \otimes \underline{\nabla}_X = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad (7)$$

wobei x (bzw. X) die lokalen (bzw. makroskopischen) Koordinaten sind. Bei diesem Verfahren kann man einer Einheitszelle eine Krümmung vorgeben. Eine allgemeinere Methode der Entwicklung von nichthomogenen Randbedingungen wird in Abschnitt 3 dargestellt.

2.3 Biegesteifigkeit einer Einheitszelle

Für periodische Medien wird die nichthomogene Randbedingung (6) wie folgt erweitert :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : ((\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{v}} \quad (8)$$

und $\underline{\mathbf{v}}$ nimmt den gleichen Wert an entgegengesetzten Punkten des Randes an. In Bild 2 wird dem Sandwich-Material eine konstante Krümmung vorgegeben. Der Effekt der Anwendung von periodischen Bedingungen ist klar zu erkennen. Für beide Fälle (6) und (8) gilt eine erweiterte Hill-Mandel Gleichung :

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \quad M_{ij} = \frac{2}{3} \langle \epsilon_{ikl} x_k \sigma_{lj} \rangle \quad (9)$$

In diesem Ausdruck erkennt man die Arbeit der inneren Kräfte eines effektiven Cosserat - Ersatzmediums, dessen Kraft und Momentenspannungen $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ heißen. Genauer handelt es sich hier um ein Cosserat - Medium mit innerem Zwang (*couple stress theory*, (Koiter, 1963)), da die Kraftspannungen noch symmetrisch und die Krümmung und Momentenspannungen spurlos sind. Die Lösung des Randwertproblems von Bild 2 liefert eine zusätzliche elastische Konstante, nämlich die Biegesteifigkeit des heterogenen Materials. Solche Biegesteifigkeiten wurden schon in Jonasch (1986) und Besdo und Dorau (1988) allerdings auf anderer Weise ermittelt, und für Strukturrechnungen benutzt.

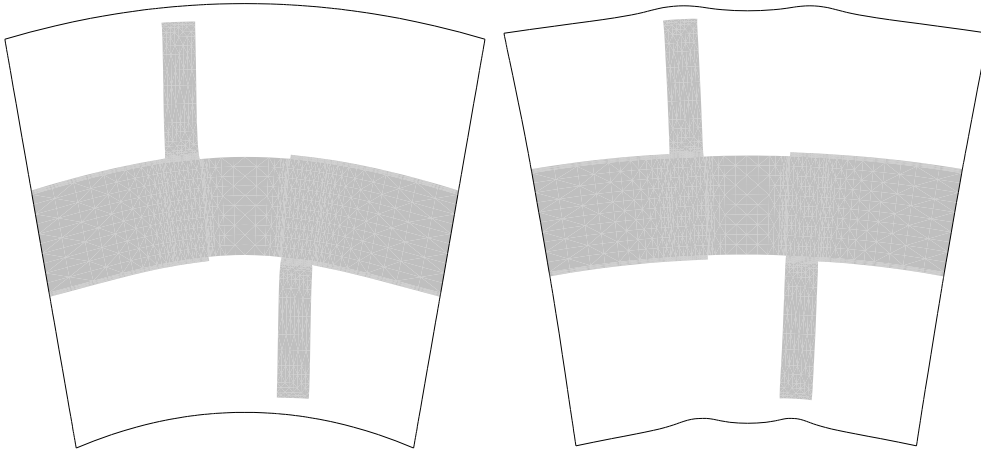


Bild 2. Einfache Krümmung einer Einheitszelle mit nichthomogenen Randbedingungen (links) und generalisierten periodischen Randbedingungen (rechts).

3 Polynomentwicklung des lokalen Verschiebungsfeldes

3.1 Definition generalisierter Freiheitsgrade

Im allgemeinen kann das erweiterte HEM als mikromorph betrachtet werden. Aber dann müssen die neuen Freiheitsgrade als Funktion der lokalen Felder in Ω definiert werden. Die Verschiebung $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}})$ und die Mikrodeformation $\underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}})$ werden als die beste Approximierung des lokalen Verschiebungsfeldes durch eine homogene Drehung und Verzerrung interpretiert :

$$(\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}), \underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}})) = \min_{(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\chi})} \langle |\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}} - \underline{\chi} \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}})|^2 \rangle_{\Omega} \quad (10)$$

Die Lösung dieses Minimierungsproblems lautet :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \rangle \quad \underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}} \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{A}} = \langle (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle \quad (11)$$

Die zugeordneten Gradienten lauten :

$$\underline{\mathbf{U}} \otimes \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}} = \langle \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle \quad \underline{\chi} \otimes \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}} = \langle (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} - \underline{\mathbf{U}} \otimes \underline{\mathbf{A}}^{-T} \quad (12)$$

3.2 Zweidimensionales Cosserat - Ersatzkontinuum

In Forest und Sab (1998) wurde der Spezialfall eines zweidimensionalen Cosserat - HEM untersucht. Dies entspricht einer antimetrischen Mikrodeformation $\underline{\chi}$. Der Einfachheit halber wird eine quadratische Einheitszelle Ω mit Kantenlänge l gewählt. Die Freiheitsgrade sind die Verschiebung $\underline{\mathbf{U}}$ und die Mikrodrehung $\underline{\Phi}$, die mit den lokalen Größen verbunden sind, wie aus (11) folgt :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} \quad \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{6}{l^2} \langle (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \times \underline{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} \quad (13)$$

Die zugeordneten Cosserat - Verzerrungsmaße sind die klassische Verzerrung $\underline{\mathbf{E}}$, die relative Drehung $\underline{\Omega} - \underline{\Phi}$ und die Krümmung $\underline{\mathbf{K}}$:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}_X \otimes \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}} \otimes \underline{\nabla}_X)(\underline{\mathbf{X}}) \quad \underline{\Omega}(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_1} - \frac{\partial U_1}{\partial X_2}\right)\underline{\mathbf{e}}_3 = \Omega(\underline{\mathbf{X}})\underline{\mathbf{e}}_3 \quad (14)$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}\underline{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}\underline{\mathbf{e}}_2 = \frac{6}{l^2} \langle ((\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3) \underline{\nabla}_x \rangle_{\Omega} - \frac{6}{l^2} ((\underline{\mathbf{1}} \times \underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3) \underline{\nabla}_X \quad (15)$$

wobei $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$ eine orthonormale Basis bezeichnet. Diese Größen werden jetzt für den Fall eines polynomialen lokalen Verschiebungsfeldes ausgewertet :

$$u_i = A_i + B_{i1}\tilde{x}_1 + B_{i2}\tilde{x}_2 + C_{i1}\tilde{x}_1^2 + C_{i2}\tilde{x}_2^2 + 2C_{i3}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{i1}\tilde{x}_1^3 + D_{i2}\tilde{x}_2^3 + 3D_{i3}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 3D_{i4}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 \quad (16)$$

mit $(i = 1, 2)$, $(\tilde{x}_1 = x_1/l, \tilde{x}_2 = x_2/l)$. Unter den Bedingungen $E_{ij}(\underline{\mathbf{X}} = 0) = B_{ij}$ und konstanter Krümmung $\underline{\mathbf{K}}$ können die Koeffizienten des Polynoms mit den Cosserat - Verzerrungsmaßen identifiziert werden :

$$(\Phi - \Omega)(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{D_{12}}{10l} \quad \underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{C_{21} - C_{13}}{l^2}\underline{\mathbf{e}}_1 + \frac{C_{23} - C_{12}}{l^2}\underline{\mathbf{e}}_2 \quad (17)$$

Die endgültige Form des Polynoms für die Ermittlung der effektiven Eigenschaften eines zweidimensionalen Cosserat HEM lautet :

$$\begin{cases} u_1^* = B_{11}\tilde{x}_1 + B_{12}\tilde{x}_2 - C_{23}\tilde{x}_2^2 + 2C_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{12}(\tilde{x}_2^3 - 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2) \\ u_2^* = B_{12}\tilde{x}_1 + B_{22}\tilde{x}_2 - C_{13}\tilde{x}_1^2 + 2C_{23}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - D_{12}(\tilde{x}_1^3 - 3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) \end{cases} \quad (18)$$

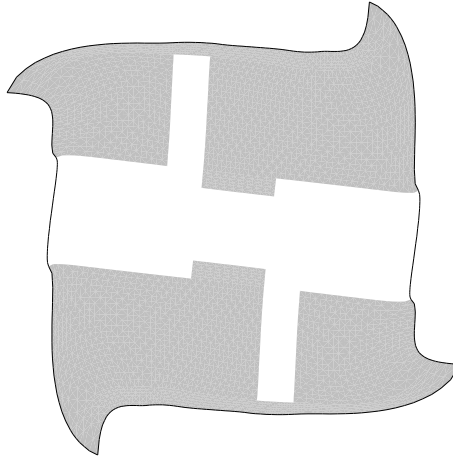


Bild 3. Vorgegebene relative Drehung der Mikrostruktur.

Die Lösung des Randwertproblems auf Ω wird dann unter der Form $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^* + \underline{\mathbf{v}}$ gesucht, mit periodischen Bedingungen für $\underline{\mathbf{v}}$ und anti-periodischen Bedingungen für $\underline{\sigma}$. Der quadratische Term in den Gleichungen (18) entspricht dem Vorschlag (6), während ein kubischer Ansatz notwendig ist, um die Wirkung von einer relativen Drehung zu merken. Im Gegensatz zu Abschnitt 2.3 ist das gefundene HEM ein Cosserat - Medium ohne inneren Zwang. In Bild 3 wird gezeigt, wie einer Einheitszelle eine relative Drehung

vorgegeben werden kann. Die Vorteile der Benutzung eines Cosserat HEMs anstelle des klassischen effektiven Cauchy Mediums wurden in zwei Beispielen für lineare Elastizität in Forest (1997) und Forest und Sab (1998) gezeigt.

3.3 Dreidimensionales Cosserat - Ersatzkontinuum

Es liegt nahe, die Form (16) des Polynoms zum dreidimensionalen Fall folgenderweise zu verallgemeinern :

$$\begin{aligned}
u_i &= B_{i1}\tilde{x}_1 + B_{i2}\tilde{x}_2 + B_{i3}\tilde{x}_3 + C_{i1}\tilde{x}_1^2 + C_{i2}\tilde{x}_2^2 + C_{i3}\tilde{x}_3^2 + 2C_{i4}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 2C_{i5}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2C_{i6}\tilde{x}_3\tilde{x}_1 \\
&+ D_{i1}\tilde{x}_1^3 + D_{i2}\tilde{x}_2^3 + D_{i3}\tilde{x}_3^3 + 3D_{i4}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 3D_{i5}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + 3D_{i6}\tilde{x}_2^2\tilde{x}_3 + 3D_{i7}\tilde{x}_2\tilde{x}_3^2 + 3D_{i8}\tilde{x}_3^2\tilde{x}_1 \\
&+ 3D_{i9}\tilde{x}_3\tilde{x}_1^2 + E_i\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3
\end{aligned} \quad (19)$$

Nach Gleichung (15) lauten dann die drei ersten Komponenten der Krümmung :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= C_{34} - C_{26} + 3(D_{34} - D_{29})X_1 + (3D_{25} - \frac{E_1}{2})X_2 + (\frac{E_3}{2} - 3D_{28})X_3 \\
K_{22} &= C_{15} - C_{34} + (\frac{E_1}{2} - 3D_{34})X_1 + 3(D_{16} - D_{35})X_2 + (3D_{17} - \frac{E_3}{2})X_3 \\
K_{33} &= C_{26} - C_{15} + (3D_{29} - \frac{E_1}{2})X_1 + (\frac{E_2}{2} - 3D_{16})X_2 + (3D_{28} - 3D_{17})X_3
\end{aligned}$$

Es stellt sich dann aber heraus, daß die Spur der Krümmung notwendigerweise null ist. Das bedeutet, daß die vorige Form des Polynoms nicht erlaubt, einer Einheitszelle eine sphärische Krümmung vorzugeben. Dieses wird erst möglich, wenn man eine Polynomentwicklung bis zum 4. Grad einführt :

$$\begin{aligned}
u_1 &= E_{11}x_1 + E_{12}x_2 + E_{31}x_3 - k_{31}x_1x_2 - \frac{k_{32}}{2}x_2^2 + k_{21}x_1x_3 + \frac{k_{23}}{2}x_3^2 + 2(k_{22}^{dev} - k_{33}^{dev})x_2x_3 \\
&+ 10\Theta_3(x_2^3 - 3x_1^2x_2) - 10\Theta_2(x_3^3 - 3x_1^2x_3) + \frac{10\text{sp}(\mathbf{k})}{3}(x_2^3 - x_3^2)x_2x_3 \\
u_2 &= E_{12}x_1 + E_{22}x_2 + E_{23}x_3 + k_{32}x_1x_2 + \frac{k_{31}}{2}x_1^2 - k_{12}x_2x_3 - \frac{k_{13}}{2}x_3^2 - 2(k_{11}^{dev} + k_{33}^{dev})x_1x_3 \\
&- 10\Theta_3(x_1^3 - 3x_1x_2^2) + 10\Theta_1(x_3^3 - 3x_2^2x_3) + \frac{10\text{sp}(\mathbf{k})}{3}(x_3^3 - x_1^2)x_1x_3 \\
u_3 &= E_{31}x_1 + E_{23}x_2 + E_{33}x_3 - k_{23}x_1x_3 - \frac{k_{21}}{2}x_1^2 + k_{13}x_2x_3 + \frac{k_{12}}{2}x_2^2 + 2(k_{11}^{dev} + k_{22}^{dev})x_1x_2 \\
&+ 10\Theta_2(x_1^3 - 3x_1x_2^2) - 10\Theta_1(x_2^3 - 3x_2x_3^2) + \frac{10\text{sp}(\mathbf{k})}{3}(x_1^3 - x_2^2)x_1x_2
\end{aligned}$$

wobei \mathbf{k}^{dev} der deviatorische Anteil von \mathbf{k} ist. Es folgt :

$$\mathbf{\underline{\Phi}} - \mathbf{\underline{\Omega}} = \mathbf{\underline{\Theta}} + \frac{\text{sp}(\mathbf{k})}{3}\mathbf{\underline{X}} \quad K_{ij} = k_{ij} - 10\text{sp}(\mathbf{k})X_iX_j \quad \text{mit } i \neq j \quad (20)$$

$$K_{11} = k_{11}^{dev} + \frac{\text{sp}(\mathbf{k})}{3} + 10\text{sp}(\mathbf{k})X_1^2 - 5\text{sp}(\mathbf{k})(X_2^2 + X_3^2) \quad (21)$$

4 Elastoviskoplastische Cosserat - Medien

Es wird zuerst ein allgemeiner phänomenologischer konstitutiver Rahmen für nichtlineare Cosserat - Stoffgleichungen vorgestellt. Dann wird gezeigt, wie die vorige erweiterte Homogenisierungsmethode benutzt werden kann, um die Materialparameter dieser Gleichungen zu ermitteln.

4.1 Standard Cosserat - Medien

Die Cosserat - Verzerrungsmaße werden jetzt wie folgt definiert und in elastische und plastische Anteile zerlegt :

$$\mathbf{\dot{\underline{\Phi}}} = \mathbf{\dot{\underline{U}}} \otimes \mathbf{\underline{\nabla}} + \mathbf{\underline{\epsilon}} \cdot \mathbf{\dot{\underline{\Phi}}} = \mathbf{\dot{\underline{\Phi}}}^e + \mathbf{\dot{\underline{\Phi}}}^p \quad \mathbf{\dot{\underline{K}}} = \mathbf{\dot{\underline{\Phi}}} \otimes \mathbf{\underline{\nabla}} = \mathbf{\dot{\underline{K}}}^e + \mathbf{\dot{\underline{K}}}^p \quad (22)$$

Die Prinzipien der Kontinuumsthermodynamik in lokaler Form werden jetzt ausgewertet, um die Zustandsgleichungen herzuleiten. Die innere Energie, die Entropie und die freie Energie werden mit ϵ , η bzw. ψ bezeichnet. Die freie Energie ist eine Funktion von $\underline{\mathbf{E}}^e, \underline{\mathbf{K}}^e$, von der Temperatur T und von inneren Variablen $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$. Die Energiebilanz, die Entropieungleichung, die intrinsische Dissipation und schließlich die Zustandsgleichungen lauten dann :

$$\rho \dot{\epsilon} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\mathbf{M}} : \dot{\underline{\mathbf{K}}} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{q}} \quad (23)$$

$$\rho \dot{\eta} + \frac{\underline{\mathbf{q}}}{T} \cdot \underline{\nabla} \geq 0 \quad \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\mathbf{M}} : \dot{\underline{\mathbf{K}}} - \rho(\dot{\Psi} + \eta \dot{T}) - \frac{\underline{\mathbf{q}}}{T} \cdot T \underline{\nabla} \geq 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \rho D &= \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\mathbf{M}} : \dot{\underline{\mathbf{K}}} - \rho(\dot{\Psi} + \eta \dot{T}) \\ &= (\underline{\boldsymbol{\Sigma}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e}) : \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e + (\underline{\mathbf{M}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{K}}^e}) : \dot{\underline{\mathbf{K}}}^e - \rho(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \eta) \dot{T} + \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p + \underline{\mathbf{M}} : \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\alpha}}} : \dot{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e} \quad \underline{\mathbf{M}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{K}}^e} \quad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\alpha}}} \quad (26)$$

wobei $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ die Kraft- bzw. Momentenspannungen sind. Die Theorie von klassischen sogenannten Standardmaterialien (Germain u.a., 1983) wird auf Cosserat - Kontinua erweitert, indem ein konvexes viskoplastisches Dissipationspotential $\Omega(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}}, \underline{\boldsymbol{\alpha}})$ eingeführt wird :

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\mathbf{M}}} \quad \dot{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\boldsymbol{\alpha}}} \quad (27)$$

Die Konvexität des Potentials gewährleistet die identische Erfüllung der Bedingung positiver intrinsischer Dissipation.

4.2 Anwendung auf von Mises Cosserat - Plastizität

Zu dem obigen allgemeinen konstitutiven Rahmen gehören zwei wichtige Klassen von nichtlinearen Cosserat - Medien. Für die erste Materialklasse werden eine einzige Fließfunktion $f(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}}, \underline{\boldsymbol{\alpha}})$ als Potential und ein plastischer Multiplikator \dot{p} eingeführt :

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{M}}} \quad (28)$$

Als Beispiel kann man die klassische von Misesche Plastizität auf Cosserat - Medien erweitern :

$$f(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}}, R) = J_2(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}}) - R(p); \quad J_2(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (a_1 \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\boldsymbol{\Sigma}} + a_2 \underline{\boldsymbol{\Sigma}} : \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^T + b_1 \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{M}} + b_2 \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{M}}^T)} \quad (29)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{a_1 \underline{\boldsymbol{\Sigma}} + a_2 \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^T}{J_2(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}})} \quad \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{b_1 \underline{\mathbf{M}} + b_2 \underline{\mathbf{M}}^T}{J_2(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\mathbf{M}})} \quad (30)$$

Der plastische Multiplikator ist ein Maß für die kumulierte plastische Verzerrung und Krümmung und sein Ausdruck für den Fall $a_1 = a_2 = a, b_1 = b, b_2 = 0$ ist : $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} (2a \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p + b \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p)}$. Für die zweite Materialklasse elastoviskoplastischer Cosserat - Medien wird das Dissipationspotential in zwei Teile zerlegt :

$$\Omega_{\text{tot}} = \Omega(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, R) + \Omega_c(\underline{\mathbf{M}}, R_c); \quad \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \frac{\partial \Omega_{\text{tot}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \frac{\partial \Omega_{\text{tot}}}{\partial \underline{\mathbf{M}}} = \frac{\partial \Omega_c}{\partial \underline{\mathbf{M}}}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial \Omega}{\partial R}; \quad \dot{\kappa} = -\frac{\partial \Omega_c}{\partial R_c} \quad (31)$$

wo Ω and Ω_c konvex sind. Im elastoplastischen Fall gibt es dann zwei getrennte Fließfunktionen und zwei plastische Multiplikatoren. Daher kann eine zweite Erweiterung der von Mises Plastizität auf Cosserat - Medien formuliert werden :

$$f(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, R) = J_2(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}) - R(p, \kappa) \quad f_c(\underline{\mathbf{M}}, R_c) = J_2(\underline{\mathbf{M}}) - R_c(p, \kappa) \quad (32)$$

$$J_2(\underline{\Sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}(a_1 \underline{s} : \underline{s} + a_2 \underline{s} : \underline{s}^T)} \quad J_2(\underline{\mathbf{M}}) = \sqrt{\frac{1}{2}(b_1 \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{M}} + b_2 \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{M}}^T)} \quad \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\Sigma}} \quad (33)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \dot{\kappa} \frac{\partial f_c}{\partial \underline{\mathbf{M}}} \quad \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(A_1 \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p + A_2 \dot{\underline{\mathbf{E}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{E}}}^{pT} \right)} \quad \dot{\kappa} = \sqrt{2 \left(B_1 \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p + B_2 \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p : \dot{\underline{\mathbf{K}}}^{pT} \right)} \quad (34)$$

mit $A_1 = a_1/(a_1^2 - a_2^2)$ und $A_2 = -a_2/(a_1^2 - a_2^2)$. Mit einem solchen Modell kann die Auswertung der Fließbedingungen zu unbestimmten plastischen Multiplikatoren führen. Die viskoplastische Formulierung (31) wird dann als Regularisierungsmethode empfohlen, wobei Ω ein viskoplastisches Potential und Ω_c ein plastisches Potential sein dürfen.

4.3 Kinematische Krümmungs-Verfestigung

Als Beispiel von inneren Variablen wurden in dem letzten Abschnitt isotrope Verfestigungsvariablen R und R_c eingeführt. Ein weiteres Beispiel von tensorwertigen inneren Variablen wird hier gezeigt. Die Einführung kinematischer Verfestigungsvariablen kann notwendig werden, sobald zyklische Beanspruchungen eines heterogenen Materials betrachtet werden. Dafür werden die zwei Klassen der von Mises elastoplastischen Cosserat - Medien erweitert, indem man zwei Rückspannungen $\underline{\mathbf{X}}$ und $\underline{\mathbf{X}}_c$ berücksichtigt :

$$f(\underline{\Sigma}, \underline{\mathbf{M}}, R, \underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{X}}_c) = J_2(\underline{\Sigma} - \underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c) - R(p) \quad (35)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{a_1 (\underline{s} - \underline{\mathbf{X}}) + a_2 (\underline{s} - \underline{\mathbf{X}})^T}{J_2} \quad \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{b_1 (\underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c) + b_2 (\underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c)^T}{J_2} \quad (36)$$

für die erste Materialklasse mit einem einzigen Kriterium, und

$$f(\underline{\Sigma}, R, \underline{\mathbf{X}}) = J_2(\underline{\Sigma} - \underline{\mathbf{X}}) - R(p, \kappa), \quad f_c(\underline{\mathbf{M}}, R_c, \underline{\mathbf{X}}_c) = J_2(\underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c) - R_c(p, \kappa) \quad (37)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{a_1 (\underline{s} - \underline{\mathbf{X}}) + a_2 (\underline{s} - \underline{\mathbf{X}})^T}{J_2} \quad \dot{\underline{\mathbf{K}}}^p = \dot{\kappa} \frac{1}{2} \frac{b_1 (\underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c) + b_2 (\underline{\mathbf{M}} - \underline{\mathbf{X}}_c)^T}{J_2} \quad (38)$$

für die zweite Materialklasse. Der symmetrische Anteil der Variablen $\underline{\mathbf{X}}$ entspricht der klassischen kinematischen Verfestigung, die in der Lage ist, den klassischen Bauschinger Effekt zu beschreiben. Was kann aber die physikalische Bedeutung einer Momenten-Rückspannung $\underline{\mathbf{X}}_c$ sein? Wie können die Materialparameter bestimmt werden, die in der zugehörigen Entwicklungsgleichung auftreten können? Die obigen erweiterten Stoffgleichungen können benutzt werden, um das mechanische Verhalten eines heterogenen Werkstoffs mit periodischer Mikrostruktur zu beschreiben. Wenn die nichtlinearen Eigenschaften der verschiedenen Phasen oder Komponenten des heterogenen Materials bekannt sind, kann die im Abschnitt 3 beschriebene Homogenisierungsmethode angewandt werden, um die Antwort der Einheitszelle auf homogene und nichthomogene makroskopische Beanspruchungen vorherzusagen. Dann können die Materialparameter des vorgeschlagenen nicht-linearen Modells angepaßt werden. Reine Krümmungs - Verfestigung $\underline{\mathbf{X}}_c$ tritt auf, wenn zyklische Biegung auf die Einheitszelle Ω ausgeübt wird. Auf Bild 5 sieht man den plastischen Zustand von Ω nach einem Zyklus solcher Biegung mit erweiterten periodischen Randbedingungen. Die resultierende Momentenspannung/Krümmungskurve wird in Bild 6 gezeigt, wobei die folgenden Formeln für die Rechnung der Momentenspannung und Krümmung benutzt wurden :

$$K_{31} = \langle x_1 u_{2,1} - x_2 u_{1,1} \rangle \quad M_{31} = \langle -\sigma_{11} x_2 \rangle \quad (39)$$

die sich aus den Gleichungen (9) und (15) ergeben. Es ist bemerkenswert, daß lokale lineare Elastizität in der Stahlschicht und ideale Plastizität in der Matrix zu einer makroskopischen nichtlinearen kinematischen Krümmungs - Verfestigung führen. Ähnlich könnte man den antisymmetrischen Teil der kinematischen Verfestigung $\underline{\mathbf{X}}$ identifizieren, indem man zyklische Beanspruchungen wie in Bild 3 betrachtet.

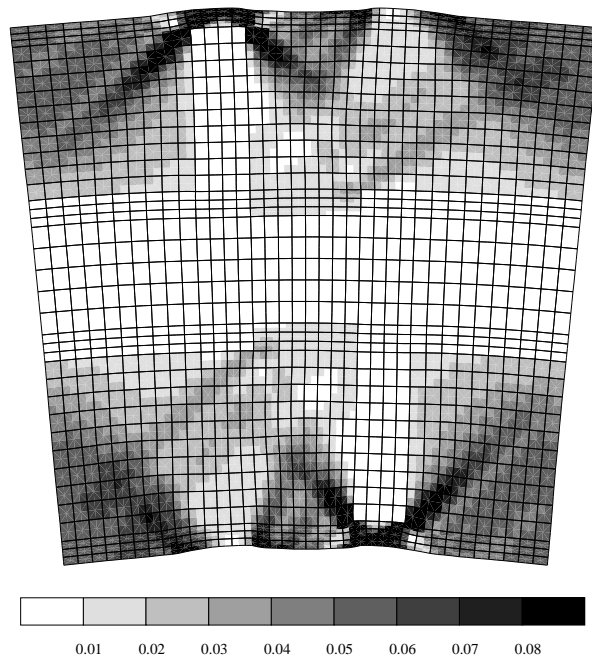


Bild 4. Zyklische Krümmung einer Einheitszelle (kumulierte plastische Dehnung) : die mittlere Schicht bleibt elastisch während die Matrix ein elastisch-plastisches Verhalten ohne Verfestigung aufweist.

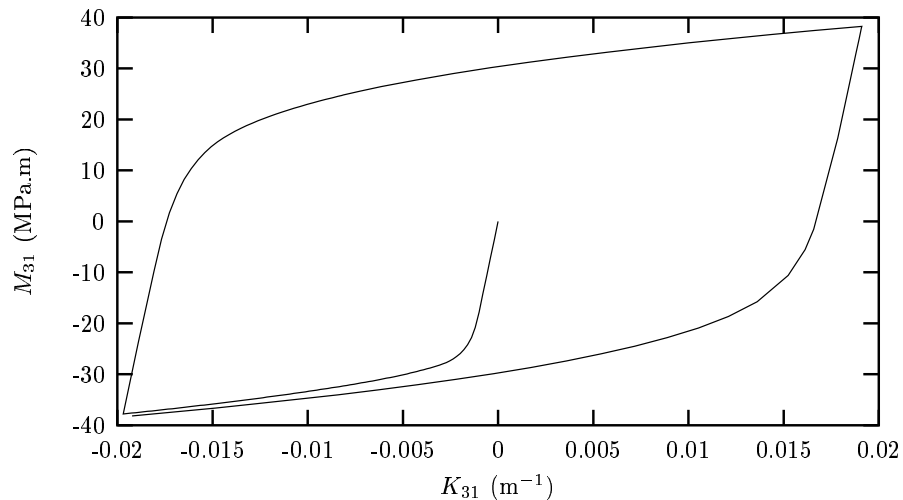


Bild 5. Resultierende Momentenspannung - Krümmungskurve.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde eine erweiterte Homogenisierungsmethode für die Herleitung von effektiven Eigenschaften eines homogenen Cosserat - Ersatzkontinuums beschrieben, die auf einer polynomialen Entwicklung des lokalen Verschiebungsfelds basiert. Ein Nachteil der Methode ist, daß der erweiterte Typ des HEMs von vornherein angenommen wird. Von einer Homogenisierungstheorie könnte man erwarten, daß die Form der effektiven Bilanzgleichungen hergeleitet wird. Im Falle heterogener Elastizität ist die Methode direkt anwendbar, um die zusätzlichen elastischen Moduli zu ermitteln, und die Vorhersage des effektiven Modells wurde mit der Rechnung inhomogener Strukturen in Forest (1998) und Forest und Sab (1998) verglichen. Im nichtlinearen Fall wurde ein allgemeiner konstitutiver Rahmen dargestellt und es wurde empfohlen, die Materialparameter mit den Ergebnissen von homogener und nichthomogener Beanspruchung der Einheitszelle anzupassen. Der Vorteil der Methode liegt darin,

daß beliebige mehrachsige Beanspruchungen auf Ω gerechnet werden können, die sich experimentell schwer realisieren lassen. Das erleichtert die Parameteridentifikation. Eine bessere Methode wäre, die Form der effektiven nichtlinearen Stoffgleichungen analytisch herzuleiten, was allerdings vor allem bei nichthomogenen makroskopischen Feldern wahrscheinlich selten möglich ist. Deshalb wird in dieser Arbeit die Kombination von Homogenisierungsmethoden mit phänomenologischen Ansätzen für den nicht linearen Fall bevorzugt.

Literatur

1. Beran, M.J.; McCoy, J.J.: Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids. *Int. J. Solids Structures*, (1970), 1035–1054.
2. Bertram, A.; Sidoroff, F.: Proceedings of the 2nd European Conference on Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale. *J. de Physique IV*, 8, (1998), Pr8.
3. Besdo, D.; Dorau, H.-U.: Zur Modellierung von Verbundmaterialien als homogenes Cosserat - Kontinuum. *ZAMM*, 68, (1988), T 153–155.
4. Forest, S.: Mechanics of generalized continua : Construction by homogenization. *J. de Physique IV*, 8, (1998), Pr4-39–48.
5. Forest, S.; Sab, K.: Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mech. Res. Comm.*, 25, (1998), 449–454.
6. Gambin, B.; Kröner, E.: Higher order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 151, (1989), 513–519.
7. Geers, M.G.D; de Borst, R.; Brekelmans, W.A.M; Peerlings, R.H.J.: On the use of local strain fields for the determination of the intrinsic length scale. *J. de Physique IV*, 8, (1998), Pr8-167–174.
8. Germain, P.; Nguyen, Q.S.; Suquet, P.: Continuum thermodynamics. *J. of Applied Mechanics*, 50, (1983), 1010-1020.
9. Gauthier, R.D.; Jahsman, W.E.: A quest for micropolar elastic constants. *J. Appl. Mech.*, 43, (1976).
10. Jonasch, G.: Zur numerischen Behandlung spezieller Scheibenstrukturen als Cosserat - Kontinuum. *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18, Nr. 34*, VDI-Verlag, (1986).
11. Koiter, W.T.: Couple-stresses in the theory of elasticity. *Proc. K. Ned. Akad. Wet. B*, 67, (1963), 17–44.
12. Kröner, E.: Mechanics of generalized continua. *Proc. of the IUTAM-Symposium*, Freudenstadt, Stuttgart, Springer-Verlag, (1968)
13. Quilici, S.; Forest, S.; Cailletaud, G.: On size effects in torsion of multi- and polycrystalline specimens. *J. de Physique IV*, 8, (1998), Pr8-325–332.
14. Schäfer, H.: Das Cosserat - Kontinuum. *ZAMM*, 47, (1967), 485–498.
15. Schivje, J.: A note on couple-stresses. *J. Mech. Phys. Solids*, 14, (1966), 113–120.
16. Scholz, S.-P.: Homogenisierung einer Sandwichplatte mit rechteckigem Gitterkern. *Forsch.-Ber. 2. Inst. Mech. Techn. Univ. Berlin, Nr. 8*, Univ.-Bibl., 1990.
17. Stolken, J.S.; Evans, E.G.: A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta mater.*, 46, (1998), 5109–5115.

Anschrift: Dr.-Ing. Samuel Forest, Centre des Matériaux / UMR 7633, Ecole des Mines de Paris / CNRS, BP 87 F-91003 Evry