

# Plasticité des milieux de Cosserat. Application aux composites particulaires

J. BESSON, F. BULTEL, S. FOREST

Centre des Matériaux UMR CNRS 7667  
91003 Évry cedex

## Résumé

Le comportement plastique des composites particulaires est décrit soit par des modèles à champs moyens soit par des simulations par éléments finis (EF). Dans le cas où la matrice s'écroute peu, les calculs EF prédisent un taux de renforcement beaucoup plus faible. Cela est dû à la localisation de la déformation autour des inclusions. L'emploi des milieux de Cosserat permet de limiter ce phénomène et ainsi de réaliser des calculs EF cohérents avec les modèles à champs moyens.

## 1 Introduction

Le comportement en traction des composites particulaires à renforts céramiques peut être décrit soit par des modèles à champs moyens [1, 2] soit par des simulations par éléments finis sur des cellules élémentaires [3, 4]. L'effet des inclusions sur le comportement est représenté par un taux de renforcement ( $\mathcal{R}$ ) égal au rapport des limites d'écoulement du composite et de la matrice pour une déformation macroscopique donnée. La Figure 1 indique les valeurs de  $\mathcal{R}$  pour différents modèles à champs moyens ainsi que dans le cas de la simulation par éléments finis lorsque la matrice a un comportement parfaitement plastique. On constate donc une forte différence entre les modèles à champs moyens et les modèles éléments finis. Ces derniers donnent un plus faible taux de renforcement car la déformation plastique devient fortement hétérogène (Figure 2) et se localise près de l'interface avec la particule. Le modèle

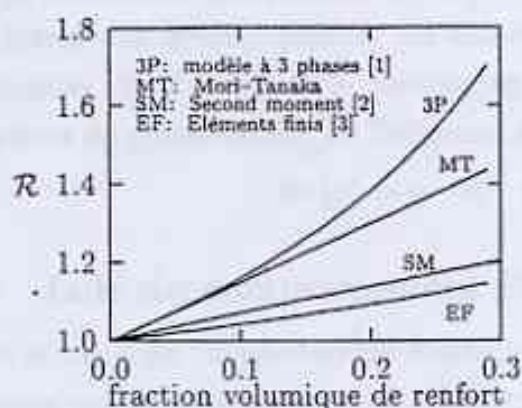


Figure 1: Taux de renforcement pour une matrice parfaitement plastique en fonction de la fraction volumique d'inclusion pour différents modèles.

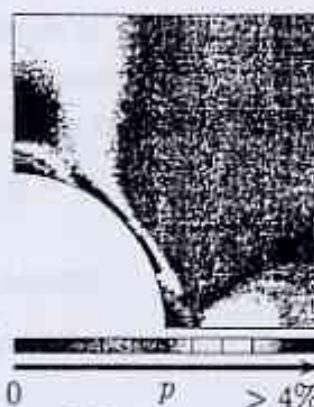


Figure 2: Déformation plastique autour de l'inclusion pour une fraction volumique de 8% (matrice "classique"). Déformation macroscopique: 2%

utilisant le second moment de la déformation plastique de la matrice (SM) prend en compte les hétérogénéités existant dans celle-ci. Il se rapproche donc des calculs par éléments finis. Un meilleur accord est, par ailleurs, obtenu dans le cas où la matrice présente un écrouissage.

Par ailleurs, des expériences menées sur un composite Al(6061)—SiC [5] élaboré par métallurgie des poudres, ont montré que le comportement de ce matériau se rapproche plutôt des prévisions fournies par les modèles de type Mori-Tanaka ou 3-phases. La matrice Al(6061) présente un faible écrouissage et son comportement devient rapidement parfaitement plastique. Les particules ont une taille de 10  $\mu\text{m}$ .

Ces observations suggèrent que, dans le matériau étudié, la déformation ne se localise pas aussi fortement que dans le cas du calcul de cellule. Expérimentalement, il n'a pas été possible de mettre en évidence de telles bandes. Un des moyens pour régulariser les phénomènes de localisation est d'utiliser des modèles faisant appel à une longueur caractéristique. Dans cet esprit, le composite peut alors être modélisé en représentant la matrice par un milieu de Cosserat élasto-plastique [6]. L'objet de ce travail est d'appliquer la mécanique des milieux de Cosserat au cas du composite Al(6061)—SiC afin de pouvoir représenter les courbes de traction expérimentales.

## 2 Elasto-plasticité des milieux de Cosserat

### 2.1 Cinématique et équations d'équilibre

Un milieu de Cosserat est un milieu dont l'évolution est caractérisée par un champ de déplacement  $\underline{u}(\underline{x})$  et un champ de rotation  $\underline{\Phi}(\underline{x})$  indépendants. À partir de ces champs on définit les tenseurs de déformation et de courbure-torsion :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \text{div}(\underline{u}) + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\kappa}} = \text{div}(\underline{\underline{\Phi}}) \quad (1)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  représente la signature de la permutation  $(i, j, k)$ . Les tenseurs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\kappa}$  sont en général non symétriques. A ces tenseurs, sont associés le tenseur  $\underline{\sigma}$  des forces-contraintes de Cauchy et le tenseur  $\underline{\mathfrak{m}}$  des couples-contraintes qui vérifient les équations de conservation, en l'absence de forces et couples volumiques :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = \underline{0} \quad \text{et} \quad \text{div}(\underline{\mathfrak{m}}) - \underline{\xi} : \underline{\sigma} = \underline{0} \quad (2)$$

## 2.2 Lois de comportement élastoplastiques

Dans le cas d'un comportement élastique,  $(\underline{\xi}, \underline{\kappa})$  est relié à  $(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{m}})$  par les relations linéaires qui dans le cas isotrope s'écrivent :

$$\underline{\xi} = \lambda \text{tr} \underline{\xi} + 2\mu \langle \underline{\xi} \rangle + 2\mu_c \langle \underline{\xi} \rangle^{\wedge} \quad \text{et} \quad \underline{\mathfrak{m}} = \alpha \text{tr} \underline{\kappa} + 2\beta \langle \underline{\kappa} \rangle + 2\beta_c \langle \underline{\kappa} \rangle^{\wedge} \quad (3)$$

On retrouve donc les deux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  ainsi que quatre nouvelles constantes :  $\mu_c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\beta_c$ . Dans le cas axisymétrique étudié dans la suite,  $\alpha$  n'intervient pas et on prend généralement  $\beta = \beta_c$ . Il apparaît donc une longueur caractéristique  $l_e = \sqrt{\beta/\mu}$ . La prise en compte des déformations et courbures plastiques passe par la construction de critères portant par exemple sur les tenseurs de forces- et couples-contraintes. Des extensions des critères classiques sont d'ores-et-déjà disponibles [6] et on en propose quelques autres dans la suite. Les déformations et les courbures se décomposent en une partie élastique et une partie irréversible :  $\underline{\xi} = \underline{\xi}_e + \underline{\xi}_p$  et  $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_e + \underline{\kappa}_p$ .

### Plasticité mono-critère

Le critère de von Mises peut s'étendre aux milieux de Cosserat en introduisant des invariants des tenseurs forces et couples-contraintes de la manière suivante :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{m}}) = J_2(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{m}}) - R(p), \quad J_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \left( a_1 \underline{s} : \underline{s} + a_2 \underline{s} : \underline{s}^T + b_1 \underline{\mathfrak{m}} : \underline{\mathfrak{m}} + b_2 \underline{\mathfrak{m}} : \underline{\mathfrak{m}}^T \right)} \quad (4)$$

où  $\underline{s}$  est le déviateur de  $\underline{\sigma}$ . On retrouve le critère de von Mises classique lorsque les couples sont nuls et les contraintes symétriques à la condition que  $a_1 + a_2 = 1$ . Le seuil  $R$  ayant la dimension d'une contrainte, et si pour simplifier on prend  $a_1 = a_2 = a$  et  $b_1 = b, b_2 = 0$ , un nouvelle longueur interne apparaît :  $l_p = \sqrt{a/b}$ . L'incrément de déformation plastique s'obtient alors suivant la règle de normalité :

$$\underline{\dot{\xi}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{a_1 \underline{s} + a_2 \underline{s}^T}{J_2(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{m}})} \quad \underline{\dot{\kappa}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathfrak{m}}} = \dot{p} \frac{1}{2} \frac{b_1 \underline{\mathfrak{m}} + b_2 \underline{\mathfrak{m}}^T}{J_2(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{m}})} \quad (5)$$

Le multiplicateur plastique introduit comptabilise les contributions de la déformation et de la courbure plastiques sans distinction et, dans le cas simplifié, il vaut :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} (2a \underline{\dot{\xi}}^p : \underline{\dot{\xi}}^p + b \underline{\dot{\kappa}}^p : \underline{\dot{\kappa}}^p)}$$

<sup>1</sup> $\langle \underline{\xi} \rangle$  (resp.  $\langle \underline{\xi} \rangle^{\wedge}$ ) représente la partie symétrique (resp. antisymétrique) de  $\underline{\xi}$ .

Ce modèle sera utilisé dans la suite dans le cas simplifié avec  $a = 1/2$ .

### Plasticité multi-critères

Une alternative consiste à considérer deux critères distincts portant sur les forces-contraintes et les couples-contraintes respectivement. Une telle formulation s'inspire en fait de la théorie de la plasticité cristalline [7]. On introduit donc :

$$f(\underline{\sigma}, p, \kappa) = J_2^a(\underline{\sigma}) - R(p, \kappa) \quad \text{et} \quad g(\underline{\mathfrak{m}}, p, \kappa) = J_2^b(\underline{\mathfrak{m}}) - M(p, \kappa) \quad (6)$$

$$J_2^a(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}(a_1 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} + a_2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}^T)} \quad \text{et} \quad J_2^b(\underline{\mathfrak{m}}) = \sqrt{\frac{1}{2}(b_1 \underline{\mathfrak{m}} : \underline{\mathfrak{m}} + b_2 \underline{\mathfrak{m}} : \underline{\mathfrak{m}}^T)} \quad (7)$$

On suppose encore que le rapport  $\sqrt{a/b}$  a la dimension d'une longueur de sorte que les fonctions d'érouissage  $R$  et  $M$  intervenant dans les critères s'expriment en MPa. Le couplage entre courbure et déformation plastique se fait également par l'intermédiaire de ces deux fonctions qui dépendent des déformations et courbures plastiques cumulées  $p$  et  $\kappa$ . Suivant la règle de normalité, les lois d'écoulement deviennent :

$$\underline{\dot{\underline{\xi}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{et} \quad \underline{\dot{\underline{\kappa}}}^p = \dot{\kappa} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathfrak{m}}} \quad (8)$$

où deux multiplicateurs plastiques sont introduits et définis par :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} (A_1 \underline{\dot{\underline{\xi}}}^p : \underline{\dot{\underline{\xi}}}^p + A_2 \underline{\dot{\underline{\xi}}}^p : \underline{\dot{\underline{\xi}}}^{pT})} \quad \dot{\kappa} = \sqrt{2 (B_1 \underline{\dot{\underline{\kappa}}}^p : \underline{\dot{\underline{\kappa}}}^p + B_2 \underline{\dot{\underline{\kappa}}}^p : \underline{\dot{\underline{\kappa}}}^{pT})} \quad (9)$$

avec  $A_1 = a_1/(a_1^2 - a_2^2)$  et  $A_2 = -a_2/(a_1^2 - a_2^2)$  et des expressions analogues pour les  $B_i$ . L'écoulement peut avoir lieu simultanément pour la déformation et la courbure plastique ou seulement pour l'une d'elles. Ces évolutions s'étudient de manière analogue à la plasticité classique à plusieurs mécanismes de déformation irréversible [8]. Les formulations à un ou deux critères peuvent être réunies dans un même cadre constituant une extension de la famille des matériaux standards généralisés plastiques et viscoplastiques.

## 3 Simulation du comportement du composite

L'application de la mécanique des milieux continus généralisés aux phénomènes de localisation de la déformation dans les matériaux élastoplastiques adoucissants a représenté un grand succès des quinze dernières années [6]. La longueur  $l_p$  introduite plus haut dans le cas des milieux de Cosserat a pu être reliée à la largeur des bandes de localisation  $l_b$  dans une plaque en traction en déformation plane pour un matériau de comportement similaire à la matrice d'aluminium considérée dans ce travail [9]. Cette relation quasi-linéaire est donnée par la Figure 3 ( $l_b \approx 8l_p$ ). Puisque, dans

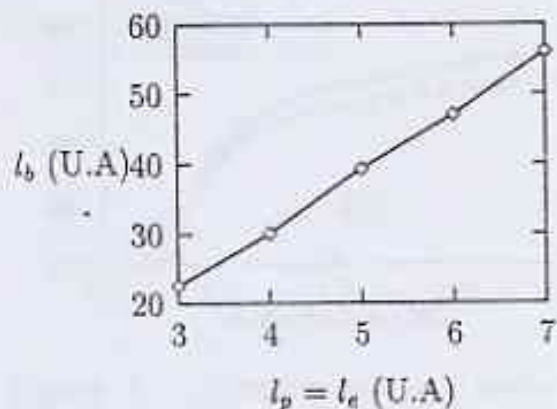


Figure 3: Largeur de bande  $l_b$  de localisation en fonction de la longueur caractéristique de Cosserat  $l_p = l_c$

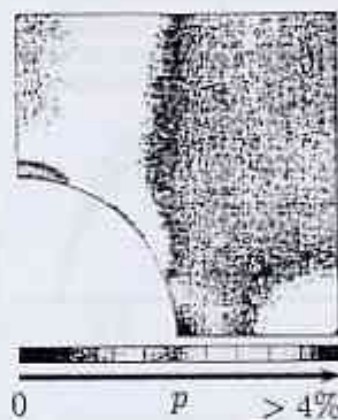


Figure 4: Déformation plastique autour de l'inclusion pour une fraction volumique de 8% (matrice de Cosserat). Déformation macroscopique: 2%

le cas du composite, on n'observe pas de localisation de déformation au sein de la matrice, on fixe dans la suite la longueur à  $l_p = 6\mu\text{m}$ , i.e. une fraction de la distance interparticulaire (ici  $50\mu\text{m}$ ). Il s'ensuit que si une bande de localisation se forme dans la matrice, elle se développera de manière diffuse en occupant tout l'espace interparticulaire. On réduit encore le nombre de paramètres en prenant  $l_c = l_p$  comme dans [6]. La fonction d'écroutissage  $R(p)$  est déterminée à partir de la courbe de traction du matériau non renforcé. Le paramètre  $\mu_c$  a ensuite été ajusté afin de reproduire par le calcul éléments finis le comportement en traction du composite contenant 8% d'inclusion. Le modèle est ainsi complètement déterminé. On constate également (Figure 4) que la déformation plastique  $p$  est effectivement beaucoup moins localisée que dans le cas classique (Figure 2). On valide alors le jeu obtenu en prédisant la réponse du composite à 4%. La Figure 5 compare les courbes de tractions simulées et expérimentales. On constate que la formulation classique donne une réponse très proche du comportement de la matrice seule. La formulation de Cosserat permet de bien représenter le comportement. On montre également qu'un modèle simple de Mori-Tanaka ou qu'un modèle 3-phases est très proche de la simulation réalisée avec la matrice de Cosserat.

Comment choisir sur des bases physiques la longueur de Cosserat? Elle est sans doute liée à la taille de grain et on peut s'attendre à des effets sur le comportement si elle est du même ordre de grandeur que la taille des particules. Dans le cas présent c'est effectivement le cas: taille des inclusion: 10–15  $\mu\text{m}$ , taille des grains Al: 6–10  $\mu\text{m}$ . Si où  $l_p$  était beaucoup plus petite que la taille de grain, le composite se comporterait suivant le schéma classique alors que dans le cas contraire, le mécanisme de durcissement ferait intervenir les interactions entre dislocations et précipités.

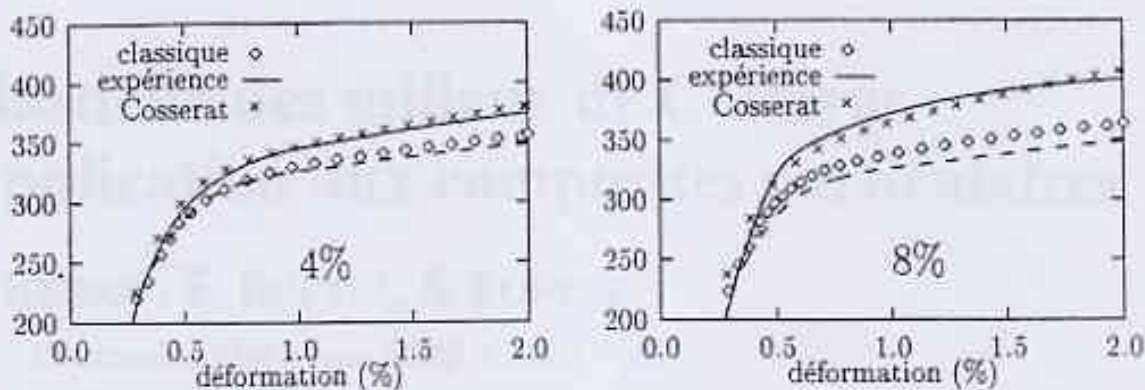


Figure 5: Comparaison des calculs de cellules élémentaires (classique et Cosserat) avec les expériences pour des fractions volumiques de 4 et 8% (contraintes en MPa). La courbe en pointillé correspond au comportement de la matrice seule.

## Références

- [1] E. Hervé and A. Zaoui. Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9(6): 505-515, 1990.
- [2] P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(6): 981-1002, 1993.
- [3] G. Bao, J.W. Hutchinson, and R.M. McMeeking. Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep. *Acta metall. mater.*, 39(8): 1871-1882, 1991.
- [4] Y.-L. Shen, M. Finot, A. Needleman, and S. Suresh. Effective plastic response of two-phase composite. *Acta metall. mater.*, 43(4): 1701-1722, 1995.
- [5] E. Gonia-Péron, J. Besson, P. Pilvin, and C. Peytour-Chansac. Cyclic behavior of metal-matrix composites: an experimental and theoretical investigation. *Key engineering Materials*, 127-131: 1175-1182, 1997.
- [6] R. De Borst. Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum. *Eng. Computations*, 8: 317-332, 1991.
- [7] S. Forest. Modeling slip, kink and shear banding in classical and generalized single crystal plasticity. *Acta mater.*, 46(9): 3265-3281, 1998.
- [8] K. Saï and G. Cailletaud. Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms. *Int J. Plasticity*, 11(8): 991-1005, 1995.
- [9] F. Bultel. Elastoplasticité des milieux de cosserat. Technical report, Rapport de DEA, ENSMP, Evry, 1997.