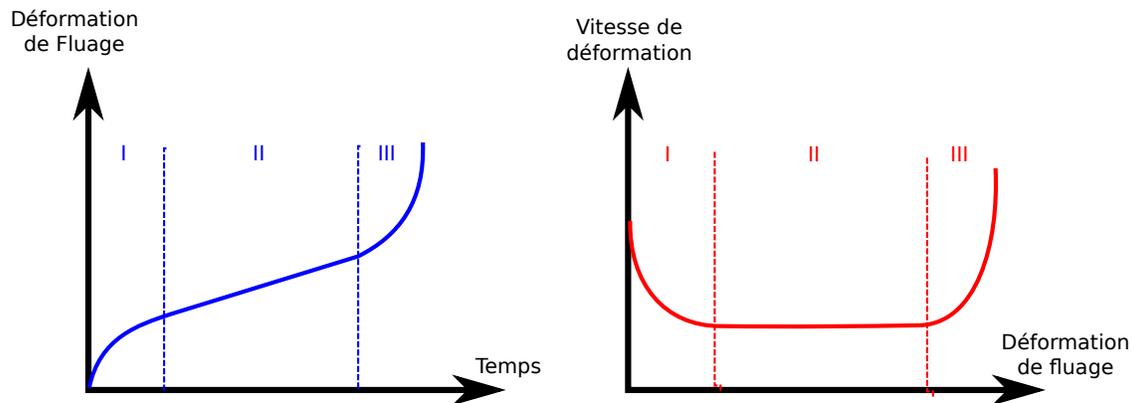


# Approches multiéchelles de la plasticité des métaux

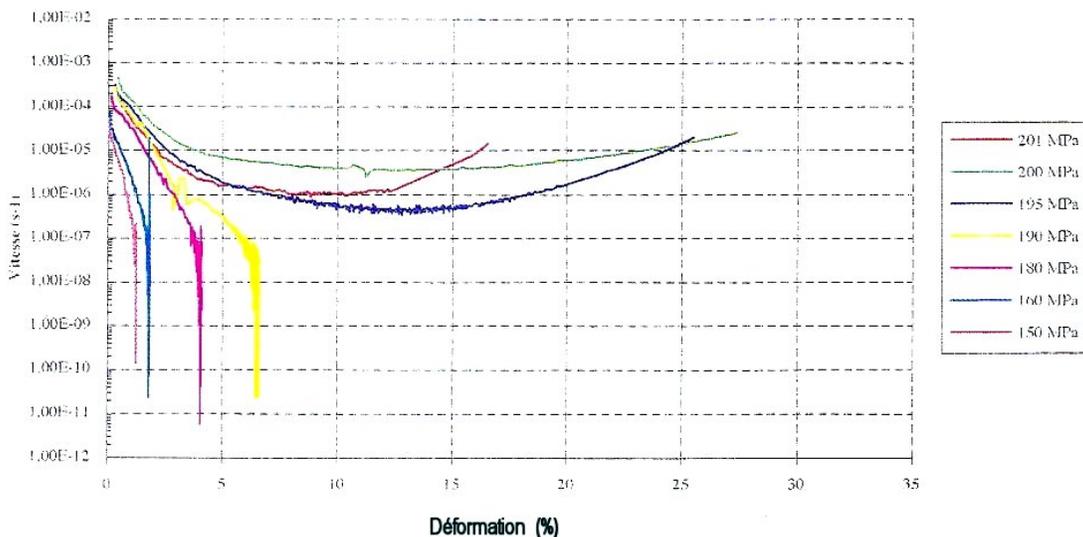
## Bifurcation en fluage - prédiction de la contrainte critique

-

L'essai de fluage conventionnel consiste à appliquer à une éprouvette de traction lisse une force constante après une phase de mise en charge. Pour un niveau de charge suffisamment élevé, la déformation de l'éprouvette au cours du temps suit alors une évolution en trois phases comme présenté sur la figure ci dessous. Dans la phase I, la vitesse de déformation initialement plutôt élevée diminue jusqu'à atteindre une vitesse stabilisée. Dans la phase II, l'éprouvette se déforme de manière régulière et homogène à vitesse constante. Dans la phase III, la vitesse de déformation se remet à augmenter jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette. Cette dernière phase s'accompagne généralement d'une localisation de la déformation dans l'éprouvette de type striction du même type que celle observé en traction monotone.



Lors d'essais de fluage à 200°C sur des éprouvettes en Zirconium (cf. figure ci dessous), pour des contraintes nominales appliquées supérieures à 195 MPa, on observe bien le mécanisme en trois phases décrit plus haut. La phase II est dans ce cas plus ou moins courte en fonction de la charge appliquée. Par contre pour des contraintes nominales inférieures ou égales à 190 MPa, la vitesse diminue et tends vers 0 après quelques % de déformation ce qui entraine un arrêt de la déformation de fluage.



Le phénomène d'arrêt de fluage est généralement relié au vieillissement dynamique du matériau et à la sensibilité inverse à la vitesse de déformation qui en découle. Ce type de comportement ne sera cependant pas abordé ici et on va montrer qu'il est également possible de reproduire cet effet d'arrêt de fluage en utilisant un simple modèle visco-plastique sans vieillissement dynamique. Pour cela il faut remarquer que les essais de fluage sont souvent réalisés à force constante et non à contrainte vraie constante. Comme la section des éprouvettes diminue lors de la déformation, la contrainte vraie augmente. Cette compétition entre écrouissage et variation géométrique entraîne l'arrêt du fluage si le niveau de contrainte est insuffisant pour atteindre la déformation critique de striction. Si par contre la contrainte est suffisamment élevée, le fluage se poursuit jusqu'à la rupture.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de la contrainte critique pour le modèle visco-plastique présenté ci-dessous.

- On néglige la partie élastique de la déformation, on parlera donc indifféremment de déformation ou de déformation plastique (idem pour les vitesses) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_p \quad (1)$$

- Le comportement plastique est basé sur un loi de type Prandl-Reuss, c'est à dire en utilisant un critère de von Mises et une règle d'écrouissage isotrope. On appelle  $f$  la fonction de charge qui définit la limite du domaine d'élasticité,  $p$  la déformation plastique cumulée, et  $\dot{p}$  la vitesse de déformation plastique.

$$f(\underline{\sigma}, p) = \sigma_{mises}(\underline{\sigma}) - R(p) \quad (2)$$

$$\sigma_{mises}(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev}} \quad (3)$$

$$\underline{\sigma}^{dev} = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr}(\underline{\sigma})}{3} \underline{I} \quad (4)$$

$$R(p) = R_0 + Q \left( 1 - e^{-bp} \right) \quad (5)$$

- La vitesse d'écoulement plastique est donnée par une loi de type Norton :

$$\dot{p} = \left( \frac{\langle f \rangle}{K} \right)^n \quad \text{avec } \langle f \rangle = \max(0, f) \quad (6)$$

Le problème est découpé en trois parties. Dans un premier temps on étudie l'apparition de la striction pour un chargement monotone et pour un modèle plastique classique. Dans un second temps on ajoute la viscosité au modèle (eq. 6) et on étudie l'apparition de la striction pour un chargement monotone. Enfin on étudie l'apparition de la striction pour ce modèle visco-plastique pour un chargement de type fluage et on détermine la contrainte nominale pour laquelle le fluage s'arrête.

## Striction plastique en traction monotone

Dans l'ensemble du problème on considère un état de traction simple suivant la direction 1 tel que seul le terme  $\sigma_{11}$  du tenseur des contraintes vraies  $\underline{\sigma}$  est non nul. Cette composante  $\sigma_{11}$  est égale au rapport entre la force appliquée sur l'éprouvette  $F$  et la section courante de cette dernière  $S$  (à ne pas confondre avec la section initiale  $S_0$ .) On travaille dans cette partie avec un modèle plastique, ce qui implique que l'équation 6 peut être remplacée par la condition de charge plastique  $f = 0$ .

1. En utilisant cette propriété de  $f$ , donner la relation entre la force appliquée  $F$ , la section  $S$ , la déformation plastique cumulée  $p$ , et les paramètres du modèle  $R_0, Q, b$ .

**Solution:**

$$\sigma_{mises}(\underline{\sigma}) = \sigma_{11}$$

$$\sigma_{11} = R(p)$$

$$F = S \left[ R_0 + Q \left( 1 - e^{-bp} \right) \right]$$

2. La déformation plastique se faisant à volume constant, on peut approximer la relation entre la section initiale de l'éprouvette  $S_0$  et la section courante  $S$  par la relation  $S_0 = Se^p$  (relation non démontrée ici). Donner la relation entre  $F$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $S_0$ , et  $p$ . Utiliser cette relation pour calculer l'expression de la force  $F$  en fonction de  $p, S_0$  et des paramètres du modèle. Que vaut cette force  $F$  en  $p = 0$  et pour  $p \rightarrow +\infty$ ? Calculer la valeur de la dérivée de  $F(p)$  puis sa valeur pour  $p = 0$ .

**Solution:**

$$F = S_0 \sigma_{11} e^{-p}$$

$$F(p) = S_0 e^{-p} \left[ R_0 + Q \left( 1 - e^{-bp} \right) \right]$$

$$F(0) = S_0 R_0$$

$$F(+\infty) = 0$$

$$\frac{dF}{dp} = -F(p) + S_0 e^{-p} \left[ Q b e^{-bp} \right]$$

$$\frac{dF}{dp}(p=0) = S_0 (Qb - R_0)$$

Pour la plupart des alliages métalliques, le produit  $Qb$  est supérieur à  $R_0$ . Les résultats de la question précédente montrent que la fonction  $F(p)$  est alors positive à dérivée positive en  $p = 0$  et tend vers 0 en  $+\infty$ . Elle passe donc nécessairement par un maximum entre  $p = 0$  et  $+\infty$ . On constate expérimentalement que ce maximum coïncide généralement avec l'apparition de la striction dans l'éprouvette.

3. Calculer la valeur de la déformation critique  $p^{crit}$  pour laquelle ce maximum est atteint. En déduire la valeur de la contrainte critique  $\sigma_{11}^{crit}$ , puis de la force critique  $F^{crit}$  correspondantes en fonction de  $S_0$ ,  $R_0$ ,  $b$ , et  $Q$ .

**Solution:**

$$p^{crit} = \frac{1}{b} \log \left[ \frac{Q(1+b)}{R_0 + Q} \right]$$

$$\sigma_{11}^{crit} = \frac{b(R_0 + Q)}{1+b}$$

$$F^{crit} = S_0 \frac{b(R_0 + Q)}{1+b} \left[ \frac{Q(1+b)}{R_0 + Q} \right]^{1/b}$$

4. Donner les tendances d'évolution de  $p^{crit}$  lorsque les paramètres du modèle  $R_0$ ,  $Q$ ,  $b$  varient. Calculer  $p^{crit}$  pour les valeurs de paramètres suivants :  $R_0 = 130\text{MPa}$ ,  $Q = 80\text{MPa}$ ,  $b = 40$ .

**Solution:**

$$\begin{array}{l} \text{Si } R_0 \nearrow \text{ alors } p^{crit} \searrow \\ \text{Si } Q \nearrow \text{ alors } p^{crit} \nearrow \\ \text{Si } b \nearrow \text{ alors } p^{crit} \searrow \\ p^{crit} = 6.87\% \end{array}$$

## Striction visco-plastique en traction monotone

On considère maintenant un modèle visco-plastique. Le chargement est toujours de type traction monotone. La relation  $f = 0$  n'est plus valable et cette dernière fonction est maintenant reliée à la vitesse de déformation plastique  $\dot{p}$  à partir de l'équation 6. Lors d'un essai de traction monotone on impose généralement une vitesse de déplacement de la traverse supérieure  $V$  constante. On peut montrer que la vitesse de déformation plastique peut alors être approximée par la relation suivante :

$$\dot{p} = \frac{V}{l_0} e^{-p}$$

avec  $l_0$  la longueur initiale de la partie utile de l'éprouvette.

5. En utilisant cette dernière relation, l'équation 6, et les autres équations du modèle, donner l'expression de la force  $F(p)$  en fonction de  $S_0, V, l_0, p$  et des paramètres du modèle ( $R_0, Q, b, K, n$ )

**Solution:**

$$F(p) = S_0 e^{-p} \left[ R_0 + Q \left( 1 - e^{-bp} \right) + K \left( \frac{V}{l_0} \right)^{1/n} e^{-p/n} \right]$$

6. Par analogie avec la section précédente, on considère que la striction peut démarrer quand la fonction  $F(p)$  atteint un maximum. Donner l'équation portant sur  $p$  à résoudre pour obtenir la valeur de  $p_{crit}$  associé à ce maximum.

**Solution:**

$$Q(b+1)e^{-bp} = R_0 + Q + K \left( \frac{V}{l_0} \right)^{1/n} \left( \frac{n+1}{n} \right) e^{-p/n}$$

Cette dernière équation ne peut se résoudre de manière simple analytiquement. Cependant, en se limitant au cas des matériaux solides relativement peu visqueux (i.e.  $n \geq 4$ ) on remarquera qu'on peut faire l'approximation  $e^{-p/n} \simeq 1$  du moins pour les niveaux de déformation relativement faibles pour lesquels la striction va se produire. L'équation permettant d'obtenir  $p_{crit}$  devient alors :

$$Q(b+1)e^{-bp} = R_0 + Q + K \left( \frac{V}{l_0} \right)^{1/n} \left( \frac{n+1}{n} \right)$$

7. Donner l'expression simplifiée de  $p_{crit}$  obtenue à l'aide de cette équation. Montrer que l'on retrouve l'expression obtenue dans le cas plastique lorsque  $V = 0$  ou  $n \rightarrow +\infty$ . Donner l'évolution de  $p_{crit}$  lorsque la vitesse  $V$  et les paramètres  $K$  et  $n$  varient. Calculer la valeur de  $p_{crit}$  pour les valeurs des paramètres suivant :  $R_0 = 130\text{MPa}$ ,  $Q = 80\text{MPa}$ ,  $b = 40$ ,  $V/l_0 = 10^{-2}\text{s}^{-1}$ ,  $K = 300\text{MPa}\cdot\text{s}^{1/n}$ ,  $n = 4$

**Solution:**

$$p^{crit} = \frac{1}{b} \log \left[ \frac{Q(1+b)}{R_0 + Q + K \left( \frac{V}{l_0} \right)^{1/n} \left( \frac{n+1}{n} \right)} \right]$$

Si  $V \nearrow$  alors  $p^{crit} \searrow$   
 Si  $K \nearrow$  alors  $p^{crit} \searrow$   
 Si  $n \nearrow$  alors  $p^{crit} \nearrow$   
 $p_{crit} = 5.75\%$

## Striction en fluage - bifurcation de fluage

On considère maintenant un essai de fluage et le comportement visco-plastique de la deuxième partie. On applique après une montée en charge une force constante sur l'éprouvette  $F_0$ . Un critère d'apparition de la striction de type charge maximale n'est donc plus pertinent car cette dernière reste constante tout au long de l'essai. Pour déterminer la déformation critique on va donc plutôt étudier l'évolution de la vitesse de déformation plastique cumulée  $\dot{p}$  en fonction de la déformation plastique cumulée  $p$ .

8. En utilisant les même équation que dans la partie précédente, montrer que l'on peut écrire  $\dot{p}$  en fonction de  $p$  sous la forme suivante :

$$\dot{p}(p) = \left[ \frac{\langle f(p) \rangle}{K} \right]^n$$

avec

$$f(p) = \frac{F_0}{S_0} e^p - R_0 - Q \left( 1 - e^{-bp} \right)$$

**Solution:**

Utiliser Norton + l'expression de  $f$  + la relation entre  $F$  et  $\sigma_{11}$

9. Calculer la dérivée de  $\dot{p}(p)$  par rapport à  $p$ . Pour cela on supposera qu'on reste dans un domaine où la fonction  $f(p)$  reste positive. Montrer que le signe de cette dérivée  $\frac{d\dot{p}(p)}{dp}$  dépend uniquement de celui de  $\frac{df}{dp}$  que l'on calculera au passage.

**Solution:**

$$\frac{d\dot{p}(p)}{dp} = \frac{n f^{n-1}}{K^n} \frac{df}{dp}$$

$$\frac{df}{dp} = \frac{F_0}{S_0} e^p - Q b e^{-bp}$$

10. On étudie le signe de  $\frac{df}{dp}$  afin de caractériser l'évolution de  $\dot{p}(p)$ . Montrer que si  $Qb > F_0/S_0$  alors cette dérivée est négative puis positive lorsque  $p$  augmente. En déduire que  $\dot{p}(p)$  passe par un minimum comme sur la première image du sujet et calculer la déformation plastique critique  $p_{min}$  correspondant à ce minimum.

**Solution:**

$$\left. \frac{df}{dp} \right|_{p=0} = \frac{F_0}{S_0} - Qb < 0$$

$$\left. \frac{df}{dp} \right|_{+\infty} = +\infty$$

$$\frac{df}{dp} = 0 \quad \text{pour} \quad p_{min} = \frac{1}{b+1} \log \left( \frac{QbS_0}{F_0} \right)$$

11. Introduire cette formule de  $p_{crit}$  dans l'expression de  $\dot{p}(p)$  pour montrer que la valeur minimale de la vitesse de déformation  $\dot{p}_{min}$  vaut

$$\dot{p}_{min} = \left[ \frac{\langle f_{min} \rangle}{K} \right]^n$$

avec

$$f_{min} = Q(b+1) \left( \frac{F_0}{QbS_0} \right)^{b/(b+1)} - (R_0 + Q)$$

**Solution:**

Utiliser le fait que  $\frac{F_0}{S_0} e^{p_{min}} = Qb e^{-b p_{min}}$  et la formule de  $p_{min}$ .

Il existe à ce stade 2 possibilités en fonction de la valeur de la force de fluage relative  $F_0/S_0$  appliquée :

- Si  $F_0/S_0$  est grand alors  $f_{min}$  et  $\dot{p}_{min}$  sont positifs et la déformation va se poursuivre au delà du minimum en accélérant jusqu'à la rupture.
- Si  $F_0/S_0$  est petit alors  $f_{min}$  et  $\dot{p}_{min}$  sont négatifs et la déformation va s'arrêter lorsque  $\dot{p}$  atteindra zéro et il n'y aura pas rupture de l'éprouvette.

12. Donner l'expression de la force de fluage relative  $F_0/S_0|_{lim}$  limite pour laquelle on bifurque entre les 2 modes (arrêt de fluage et fluage jusqu'à la rupture). Calculer la valeur de cette valeur limite pour les paramètres donnés plus haut. Commentez la valeur obtenue par rapport aux résultats expérimentaux de la figure 2.

**Solution:**

$$F_0/S_0|_{lim} = Qb \left[ \frac{R_0 + Q}{Q(1+b)} \right]^{\frac{b+1}{b}}$$

$$F_0/S_0|_{lim} = 191 \text{MPa}$$