

DIMENSIONNEMENT D'UN DISQUE DE TURBINE ALESE

Les disques de turbine des moteurs d'avions sont des pièces tournantes dont le dimensionnement est d'une importance capitale pour l'intégrité du moteur en service. Ils sont soumis à des forces centrifuges notables et ne doivent pas éclater. Un tel disque est représenté sur la figure 1. Il est alésé pour le passage de l'arbre et a un diamètre de l'ordre de 50cm.

L'objet du problème est de présenter les premiers éléments rentrant en jeu dans le dimensionnement d'une telle structure. Pour cela, on va déterminer la réponse élastique puis élastoplastique d'un disque simplifié présentant une section rectangulaire dans le plan (r, z) de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e (figure 2). On se restreint au contexte des petites perturbations et au cas des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$) licite pour un disque suffisamment mince. On supposera dans ce problème que le disque est libre d'effort en $r = r_i$ et en $r = r_e$. Le matériau est considéré comme isotrope. On considèrera successivement le cas de l'élasticité linéarisée puis de l'élastoplasticité sans écrouissage.

Les différentes parties du problème peuvent être traitées de manière relativement indépendante en admettant, si besoin est, les résultats annoncés dans les sections précédentes.

1 Comportement élastique et limite d'élasticité d'un disque mince alésé en rotation

1.1 Equilibre du disque en rotation

Dans le problème, on va déterminer les composantes des champs de déplacements, déformations et contraintes dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) attaché au disque. Le disque étant en rotation à la vitesse ω , on travaille donc dans le référentiel tournant associé. Dans ce référentiel, les équations de l'équilibre statique du disque de turbine s'écrivent :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad (1)$$

faisant intervenir des forces de volume :

$$\rho \underline{\mathbf{f}} = \rho \omega^2 r \underline{\mathbf{e}}_r \quad (2)$$

On calcule la vitesse d'entraînement du référentiel attaché au disque :

$$\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{Q}}(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\underline{x}}' = \underset{\sim}{\dot{Q}} \cdot \underset{\sim}{Q}^T \cdot \underline{x}' = \underset{\sim}{W} \cdot \underline{x} = \underset{\sim}{\dot{\omega}} \wedge \underline{x}'$$

où $\underset{\sim}{\dot{\omega}} = \omega \underline{e}_z$. D'où

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{x}}' &= \underset{\sim}{\dot{\omega}} \wedge \dot{\underline{x}}' = \underset{\sim}{\dot{\omega}} \wedge (\underset{\sim}{\dot{\omega}} \wedge \underline{x}') \\ &= (\underset{\sim}{\dot{\omega}} \cdot \underline{x}') \underset{\sim}{\dot{\omega}} - (\underset{\sim}{\dot{\omega}} \cdot \underset{\sim}{\dot{\omega}}) \underline{x}' \\ &= -\omega^2 r \underline{e}_r \end{aligned} \quad (3)$$

pour $\underline{x}' = r \underline{e}_r$. On n'utilisera plus la notation \underline{x}' dans la suite.

1.2 Forme du tenseur des contraintes

On cherche l'état de contraintes dans le disque sous la forme

$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

dont les composantes sont supposées être des fonctions de la variable r seulement.

Montrer que l'explicitation des équations d'équilibre se réduit à l'équation

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (5)$$

où σ'_{rr} désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} .

1.3 Une condition de compatibilité

Une deuxième équation sur les contraintes peut être obtenue en remarquant que

$$(r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{rr} \quad (6)$$

En utilisant la loi d'élasticité isotrope linéarisée liant $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\sigma}$, montrer que l'équation précédente implique que

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \quad (7)$$

En élasticité linéarisée isotrope, on a ici

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E},$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{d(r\varepsilon_{\theta\theta})}{dr}$$

ce qui conduit à (7).

1.4 Contraintes dans le disque mince alésé en rotation

Intégrer les équations (5) et (7) et montrer que les contraintes se mettent sous la forme

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(3 + \nu) + \frac{A}{r^2} + B \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(1 + 3\nu) - \frac{A}{r^2} + B \quad (9)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

En éliminant $\sigma_{\theta\theta}$ dans (5) et (7), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur σ_{rr} :

$$r\sigma_{rr}'' + 3\sigma_{rr}' + \rho\omega^2 r(3 + \nu) = 0 \quad (10)$$

dont la résolution conduit à (8) et (9).

A l'aide des conditions aux limites, identifier les deux constantes et montrer finalement que

$$\sigma_{rr} = -\frac{3 + \nu}{8} \frac{\rho\omega^2}{r^2} (r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left((3 + \nu) \left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) \right) \quad (12)$$

Les conditions aux limites retenues dans ce problème sont

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

ce qui donne

$$A = -\frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r_i^2 r_e^2, \quad B = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (r_i^2 + r_e^2)$$

1.5 Déformations et déplacements dans le disque mince alésé en rotation

A partir des contraintes précédentes, on peut déterminer les déformations associées grâce à la loi d'élasticité. On montre alors que le champ de déformation trouvé est compatible et qu'on peut trouver les champs de déplacements u_r et u_z associés. Ce travail n'est pas demandé ici car le champ de contraintes obtenu va suffire dans les analyses suivantes.

Les relations d'élasticité isotrope linéarisées fournissent les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left(3(\nu^2 - 1) + (3 + \nu) \left((1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu) \left((1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left(2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

dont l'intégration fournit les déplacements :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left((\nu^2 - 1) + (3 + \nu) \left((1 - \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} \right) \right)$$

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

On a utilisé la condition de symétrie du disque par rapport au plan $z = 0$: $u_z(z = 0) = 0$. Cette solution conduit à des déformations de cisaillement ε_{rz} non nulles et non prises en compte jusqu'ici. Qu'en pensez-vous ?

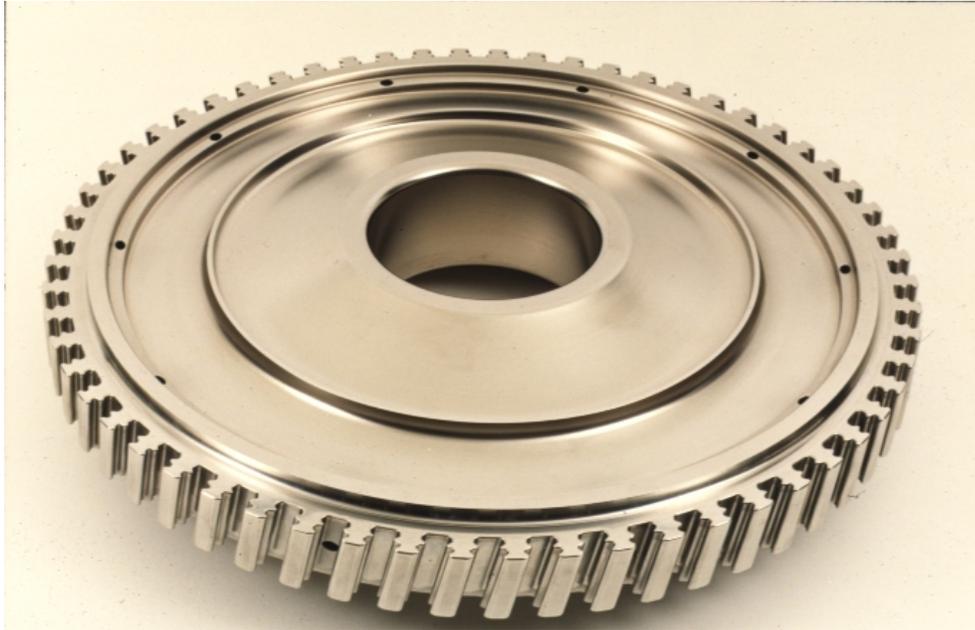


Figure 1: Disque de turbine haute pression de moteur d'avion (source SNECMA).

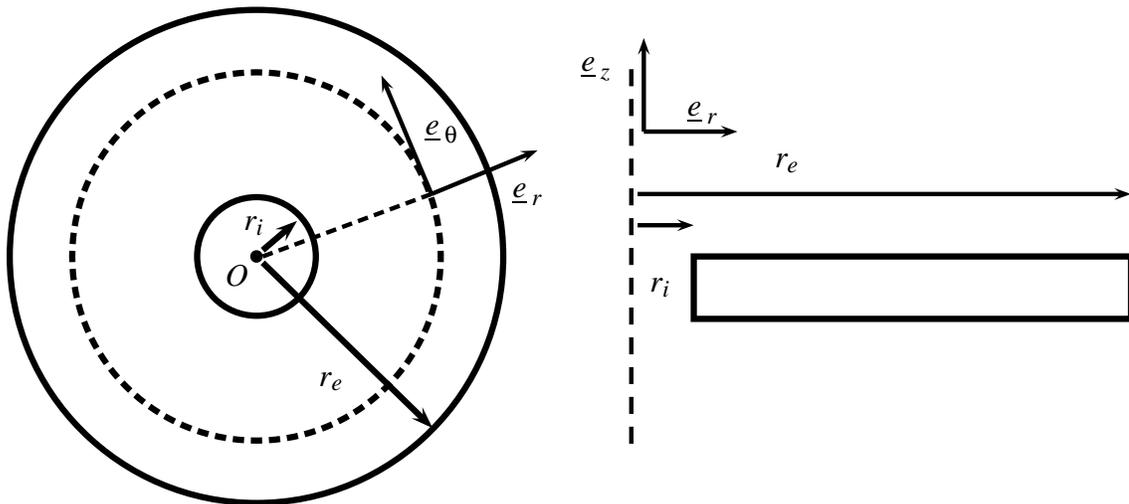


Figure 2: Schématisation d'un disque de turbine alésé ; dimensions du disques et introduction des coordonnées cylindriques.

2 Critère de plasticité

On utilise le critère de Tresca pour détecter le développement de déformations plastiques au sein du disque. On note σ_0 la limite d'élasticité du matériau en traction. Le critère s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = \max_{(\sigma_i, \sigma_j)} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0 \leq 0$$

où les σ_i désignent les contraintes principales.

2.1 Relations d'ordre entre les contraintes

Montrer que les contraintes sont rangées dans l'ordre suivant

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$$

En effet,

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left((3 + \nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + (1 - \nu) \right) \geq 0$$

L'équation (11) indique clairement que $\sigma_{rr} \geq 0$.

2.2 Domaine d'élasticité

Tracer la frontière du domaine d'élasticité dans le plan $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta})$. Montrer que, dans le cas du disque, le critère s'écrit simplement

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_0 \quad (13)$$

2.3 Lieu et vitesse d'apparition de la plasticité dans le disque en rotation

Indiquer en quel point de la structure l'écoulement plastique va commencer. Montrer que la vitesse de rotation correspondante ω_e vaut

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1 - \nu) + r_e^2(3 + \nu)} \quad (14)$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est monotone décroissante et prend sa valeur maximale en $r = r_i$. La plasticité va donc commencer sur le rayon intérieur du disque lorsque

$$\sigma_{\theta\theta}(r = r_i) = \sigma_0 = \frac{\rho\omega^2}{8} \left((3 + \nu)(r_i^2 + 2r_e^2) - (1 + 3\nu)r_i^2 \right)$$

ce qui fournit la vitesse de rotation critique ω_e donnée par (14).

2.4 Utilisation d'un autre critère

L'utilisation du critère de von Mises conduit-elle à une modification de la valeur critique ω_e ? Avec les conditions aux limites adoptées dans ce problème, les points matériels en $r = r_i$ sont en traction simple selon \underline{e}_θ de sorte que $J_2(\underline{\sigma}(r = r_i)) = |\sigma_{\theta\theta}|$. Le critère de von Mises conduit par conséquent à la même vitesse critique d'initiation de la plasticité que le critère de Tresca. Il n'en va plus de même lorsque l'on poursuit l'analyse pour des vitesses supérieures à ω_e .

3 Réponse élastoplastique du disque alésé en rotation

Une vitesse de rotation $\omega > \omega_e$ est imposée au disque de sorte qu'une partie du disque est le siège de déformations plastiques. On suppose que la zone plastique, dite zone 1, est confinée à $r_i \leq r \leq a$, tandis que la zone $a \leq r \leq r_e$, dite zone 2, a une réponse purement élastique. On admet que l'état de contraintes continue à ne mettre en jeu que les composantes $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz} = 0$ toujours rangées dans l'ordre

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$$

En conséquence, la fonction critère de plasticité s'écrit toujours (13).

3.1 Champ de contraintes dans la zone plastique

Déterminer complètement le champ de contraintes dans la zone 1. Pour cela, on utilisera la condition d'équilibre (5), le critère (13) et la condition à la limite en $r = r_i$.

On vérifiera que ces contraintes peuvent se mettre sous la forme

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \left(1 - \frac{r_i}{r}\right) - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^3\right) \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \quad (16)$$

L'équation (16) n'est autre que l'expression du critère (13). L'équation d'équilibre (5) conduit alors à l'équation différentielle suivante :

$$r\sigma'_{rr} + \sigma_{rr} - \sigma_0 + \rho\omega^2 r^2 = 0$$

dont les solutions sont de la forme

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3} + \frac{C}{r} \quad (17)$$

où C est une constante d'intégration. On la détermine grâce à la condition à la limite $\sigma_{rr}(r = r_i) = 0$:

$$C = -\sigma_0 r_i + \frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3}$$

3.2 Charge limite du disque

Le résultat précédent permet de trouver la vitesse $\omega = \omega_\infty$ pour laquelle l'ensemble du disque subit des déformations plastiques. Déterminer ω_∞ .

Lorsque la zone plastique s'étend sur l'ensemble du disque, la solution précédente (15) doit vérifier la condition à la limite $\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$. Ceci conduit à la vitesse limite

$$\rho\omega_\infty = 3\sigma_0 \frac{r_e - r_i}{r_e^3 - r_i^3} = \frac{3\sigma_0}{r_e^2 + r_i r_e + r_i^2} \quad (18)$$

3.3 Champ de contraintes dans la zone 2 et détermination du front de plasticité

Dans le domaine 2 où le comportement reste purement élastique, les contraintes ont toujours la forme (8) et (9) qui fait intervenir deux constantes d'intégration A et B . Pour les déterminer, donner deux conditions sur σ_{rr} en $r = a$ et en $r = r_e$.

La condition $\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$ conduit à

$$-\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8}(3 + \nu) + \frac{A}{r_e^2} + B = 0 \quad (19)$$

La continuité du vecteur contrainte au travers de la surface $r = a$ implique la continuité de σ_{rr} . Par conséquent,

$$\sigma_{rr}^{(2)}(r = a) = \sigma_0\left(1 - \frac{r_i}{a}\right) - \frac{\rho\omega^2 a^2}{3}\left(1 - \left(\frac{r_i}{a}\right)^3\right) = \sigma_{rr}^{(1)}(r = a) = -\frac{\rho\omega^2 a^2}{8}(3 + \nu) + \frac{A}{a^2} + B \quad (20)$$

Ecrire enfin une condition sur $\sigma_{\theta\theta}$ en $r = a$.

Le critère de plasticité est satisfait en $r = a$, i.e.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 = -\frac{1 + 3\nu}{8} + B - \frac{A}{a^2}$$

En déduire une équation portant sur a uniquement et dont l'une des solutions est effectivement la position du front de plasticité a . On ne demande pas de résoudre cette équation.

Retrouver à l'aide de ces équations l'expression de la vitesse limite ω_∞ précédemment définie.

On est amené à résoudre le système suivant dont les inconnues sont (A, B, a) :

$$\begin{cases} \frac{A}{r_e^2} + B = \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8}(3 + \nu) \\ \frac{A}{a^2} + B = \frac{\rho\omega^2 a^2}{3}\left(\frac{1 + 3\nu}{8} + \left(\frac{r_i}{a}\right)^3\right) + \sigma_0\left(1 - \frac{r_i}{a}\right) \\ -\frac{A}{a^2} + B = \sigma_0 + \frac{1 + 3\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 \end{cases} \quad (21)$$

En combinant (21)₂ et (21)₃, on tire

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\sigma_0}{2}ar_i + \frac{\rho\omega^2 a^4}{6}\left(-\frac{1 + 3\nu}{4} + \left(\frac{r_i}{a}\right)^3\right) \\ B &= \sigma_0\left(1 - \frac{r_i}{2a}\right) + \frac{\rho\omega^2 a^2}{6}\left(\frac{1 + 3\nu}{2} + \left(\frac{r_i}{a}\right)^3\right) \end{aligned}$$

En substituant ses expressions dans (21)₁, on obtient l'équation polynomiale de degré 5 que doit vérifier la position a du front de plasticité :

$$a^5 \frac{\rho\omega^2}{3r_e^2} \frac{1 + 3\nu}{4} - a^3 \frac{\rho\omega^2}{6}(1 + 3\nu) - a^2 \frac{r_i}{r_e^2} \left(\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} - \sigma_0\right) + a \left(\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{4}(3 + \nu) - 2\sigma_0\right) + \sigma_0 r_i - \frac{\rho\omega^2}{3} r_i^3 = 0$$

On vérifie que si $a = r_e$ on retrouve l'expression de la vitesse limite ω_∞ donnée par (18). Si on substitue $a = r_i$ dans l'équation précédente, celle-ci se réduit à

$$4\sigma_0(r_i^2 - r_e^2) = \rho\omega^2 \left((1 - \nu)r_i^4 + 2(1 + \nu)r_i^2 r_e^2 - (3 + \nu)r_e^4\right)$$

Le membre de droite se factorise en fait en

$$\rho\omega^2 (r_i^2 - r_e^2) \left((1 - \nu)r_i^2 + (3 + \nu)r_e^2\right)$$

ce qui conduit à $\omega = \omega_e$ trouvée en (14).

3.4 Etude des déformations plastiques

3.4.1 Direction de l'écoulement plastique

Donner la direction d'écoulement plastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ en respectant la loi de normalité pour le critère de Tresca.

En déduire les composantes non nulles du tenseur des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Montrer en particulier que

$$\varepsilon_{rr}^p = 0$$

Dans la zone $r_i < r \leq a$, on se trouve sur une portion de la frontière du domaine d'élasticité donnée par l'équation

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_0$$

La loi de normalité implique alors que l'écoulement plastique se fait selon

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On en déduit en particulier qu'il n'y a pas d'écoulement plastique ε_{rr}^p .

3.4.2 Champ de déplacement dans la zone plastique

En utilisant le fait que $\varepsilon_{rr}^p = 0$, calculer le déplacement $u_r(r)$ dans la zone plastique.

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \underbrace{\varepsilon_{rr}^p}_{=0} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}$$

d'où

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \left(\sigma_0 \left(1 - \nu - \frac{r_i}{r} \right) - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^3 \right) \right)$$

On obtient ainsi la composante de déplacement

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} \sigma_0 r - \frac{\sigma_0 r_i}{E} \log \frac{r}{r_e} - \frac{\rho\omega^2}{3E} \left(\frac{r^3}{3} - r_i^3 \log \frac{r}{r_e} \right) + \frac{D}{E}$$

où D est une constante d'intégration.

Calculer alors $\varepsilon_{\theta\theta}^p$. On déterminera au passage la constante apparue lors de l'intégration précédente.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^e = \frac{u_r}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\nu}{E} \sigma_{rr} \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{r_i}{r} \left(\log \frac{r}{r_e} + \nu \right) \left(\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} - \sigma_0 \right) - \frac{\rho\omega^2 r^2}{9} (1 + 3\nu) + \frac{D}{r} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

A l'interface $r = a$, $\varepsilon_{\theta\theta}$ est continu (pas de glissement à l'interface) et vaut donc $\varepsilon_{\theta\theta}(r = a) = 0$. Cette relation supplémentaire permet de déterminer la constante d'intégration D :

$$D = -r_i \left(\log \frac{a}{r_e} + \nu \right) \left(\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} - \sigma_0 \right) + \frac{\rho\omega^2 a^3}{9} (1 + 3\nu)$$

Finalement, on trouve

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{E} \left(\frac{r_i}{r} \log \frac{r}{a} \left(\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} - \sigma_0 \right) - \frac{\rho\omega^2 r^2}{9} (1 + 3\nu) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \right)$$

Vérifier que $\varepsilon_{\theta\theta}^p \geq 0$.

En effet,

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{E} \left(\frac{r_i}{r} \underbrace{\log \frac{r}{a}}_{\leq 0} \left(\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} - \sigma_0 \right) - \underbrace{\frac{\rho\omega^2 r^2}{9} (1 + 3\nu) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right)}_{\leq 0} \right)$$

et, tant que $\omega \leq \omega_\infty$,

$$\frac{\rho\omega^2 r_i^2}{3} \leq \frac{\sigma_0}{\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^2 + \frac{r_e}{r_i} + 1} \leq \sigma_0$$

ce qui achève la preuve de la positivité de $\varepsilon_{\theta\theta}$.

Calculer enfin ε_{zz}^p et le déplacement u_z dans la zone 1.

$$\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p$$

La déformation axiale totale dans la zone plastique vaut donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{du_z}{dz} = \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^e \\ &= -\frac{1}{E} \left(\nu\sigma_0 \left(2 - \frac{a}{r} \right) + \left(\frac{\rho\omega^2 a^2}{3} - \sigma_0 \right) \frac{r_i}{r} \log \frac{r}{a} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{9} \left(3\nu \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^3 \right) + (1 + 3\nu) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

ce qui permet le calcul le déplacement u_z

$$u_z = -\frac{z}{E} \left(\nu\sigma_0 \left(2 - \frac{a}{r} \right) + \left(\frac{\rho\omega^2 a^2}{3} - \sigma_0 \right) \frac{r_i}{r} \log \frac{r}{a} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{9} \left(3\nu \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^3 \right) + (1 + 3\nu) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \right) \right)$$

où la condition de symétrie $u_z(z = 0) = 0$ a été prise en compte.

3.5 Réponse globale du disque

Tracer le déplacement $u_r(r = r_e)$ en fonction de la vitesse de rotation.

Matthieu, peux-compléter ce bout ?

4 Dimensionnement d'un disque mince non alésé en rotation

Reprendre l'ensemble du problème dans le cas d'un disque mince non alésé ($r_i = 0$).

4.1 Comportement élastique linéarisé et isotrope

Dans le cas du disque non alésé, l'équation différentielle à résoudre pour trouver σ_{rr} est toujours donnée par (10) lorsque le comportement du disque reste purement élastique. Les contraintes sont donc de la forme (8) et (9). L'absence de singularité attendue en $r = 0$ implique que $A = 0$. La

constante B est alors déterminée à l'aide de la condition à la limite $\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$. Finalement, les contraintes sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3 + \nu)}{8}(r_e^2 - r^2) \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)) \quad (24)$$

Les déformations associées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - 3r^2(1 + \nu))$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu))$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu))$$

Les déplacements $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$ et u_z tel que $du_z/dz = \varepsilon_{zz}$ s'en déduisent :

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu))$$

$$u_z = -\nu z \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu))$$

où la condition de symétrie $u_z(z = 0) = 0$ a été utilisée.

A quelles conditions les champs trouvés sont-ils compatibles avec le contexte infinitésimal adopté dans le problème ? Ces conditions se ramènent à

$$\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \ll 1$$

Remarquer que le champ de déplacement précédent conduit à des déformations de cisaillement ε_{rz} non nulles ce qui ne semble pas compatible avec la forme de champ de déformation adoptée jusqu'ici. Qu'en pensez-vous ?

Dessiner la déformée du disque en exagérant son épaisseur pour l'illustration. La figure (??) montre la configuration déformée d'un disque d'épaisseur non négligeable calculée grâce à une méthode numérique dite des éléments finis. Le maillage dessiné correspond à un réseau de lignes matérielles tracées sur la configuration de référence du disque et initialement orthogonales. Comparer cette déformée avec celle trouvée précédemment. Quelles autres remarques vous suggèrent l'observation du champ obtenu numériquement ?

4.2 Comportement élastoplastique

4.2.1 Limite d'élasticité

On applique ici le critère de Tresca pour prévoir l'apparition de la plasticité dans le disque. Les contraintes principales se rangent dans l'ordre suivant :

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$$

En effet,

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{4}(1 - \nu) \geq 0$$

L'expression (23) indique clairement que σ_{rr} est positif. Noter que

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r=0) &= \sigma_{\theta\theta}(r=0) = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)r_e^2}{8} \\ \sigma_{rr}(r=r_e) &= \sigma_{zz} = 0\end{aligned}$$

Le critère de plasticité est satisfait pour la première fois en $r=0$ pour

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)} \quad (25)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité en traction du matériau.

On peut à nouveau constater que l'application du critère de von Mises conduit à la même valeur de ω_e que le critère de Tresca. L'état de contrainte en $r=0$ est en effet equibiaxial.

4.2.2 Régime élastoplastique

Pour des vitesses de rotation $\omega \geq \omega_e$, la plasticité envahit progressivement le disque et on suppose qu'il existe un front de plasticité $0 \leq r = a \leq r_e$ séparant la zone 1, dite zone plastique ($r \leq a$), où la réponse du matériau est élastoplastique, de la zone 2, dite zone élastique ($r \geq a$), où sa réponse est purement élastique.

Dans la zone plastique, l'état de contraintes est obtenu en résolvant les mêmes équations d'équilibre et de compatibilité que dans la section 3.1. En particulier la composante radiale est aussi donnée par l'expression (17). L'absence de singularité attendue en $r=0$ implique que $C=0$. Finalement, dans la zone 1, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_0 - \frac{\rho\omega^2 r^2}{3} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_0\end{aligned}$$

On obtient la vitesse limite ω_∞ pour laquelle l'ensemble du disque est plastifié lorsque $a=r_e$ et que, par conséquent, la composante radiale précédente s'annule en $r=r_e$. Cela donne

$$\rho\omega_\infty^2 = \frac{3\sigma_0}{r_e^2} \quad (26)$$

On peut vérifier que $\omega_e < \omega_\infty$.

Dans la zone élastique, les contraintes sont de la forme (8) et (9) où interviennent les constantes d'intégration A et B . Pour les déterminer, on utilise la condition à la limite en $r=r_e$ et la continuité de σ_{rr} en $r=a$, ce qui conduit aux deux équations

$$\frac{A}{r_e^2} + B = \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8}(3+\nu) \quad (27)$$

$$\frac{A}{a^2} + B = \sigma_0 + \frac{\rho\omega^2 a^2}{24}(1+3\nu) \quad (28)$$

La condition de plasticité en $r=a$ fournit la troisième équation pour la détermination de la position du front plastique¹ :

$$-\frac{A}{a^2} + B = \sigma_0 + \frac{\rho\omega^2 a^2}{8}(1+3\nu)$$

¹Cette condition déjà utilisée à plusieurs reprises mérite en fait une justification plus détaillée. En effet, on prétend que $\lim_{r \rightarrow a} \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \sigma_0$. Comme d'autre part $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$ dans la zone plastique $0 \leq r < a$, elle implique que $\sigma_{\theta\theta}$ est continu en $r=a$. Ceci n'a rien d'évident *a priori*

Les deux dernières équations permettent de trouver

$$A = -\frac{\rho\omega^2 a^4}{24}(1+3\nu), \quad B = \sigma_0 + \frac{\rho\omega^2 a^2}{12}(1+3\nu)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (27) non utilisée jusqu'ici, on obtient l'équation régissant la position du front plastique :

$$\left(\frac{a}{r_e}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{r_e}\right)^2 + 3\frac{3+\nu}{1+3\nu} - \frac{24\sigma_0}{\rho\omega^2 r_e^2(1+3\nu)} = 0 \quad (29)$$

dont la seule racine positive inférieure à r_e est

$$a^2 = r_e^2 \left(1 - \sqrt{1 - 3\frac{3+\nu}{1+3\nu} + \frac{24\sigma_0}{\rho\omega^2 r_e^2(1+3\nu)}}\right)$$

On vérifie que cette expression donne $a = 0$ pour $\omega = \omega_e$ et $a = r_e$ pour $\omega = \omega_\infty$.

4.2.3 Etude des déformations plastiques

Dans la zone plastique et pour $0 < r \leq a$, le critère de plasticité de Tresca s'écrit de manière univoque

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_0$$

La loi de normalité implique alors que l'écoulement plastique se fait selon

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On en déduit en particulier qu'il n'y a pas d'écoulement plastique $\dot{\varepsilon}_{rr}^p$.

Par conséquent,

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \underbrace{\varepsilon_{rr}^p}_{=0} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_0 - \frac{\rho\omega^2 r^3}{9E}$$

puisque la continuité du vecteur-contrainte en $r = a$ nécessite simplement la continuité de σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ et σ_{rz} :

$$[[\sigma_{rr}]] = [[\sigma_{r\theta}]] = [[\sigma_{rz}]] = 0$$

et ne dit rien sur $[[\sigma_{\theta\theta}]]$. En fait, une condition supplémentaire doit être écrite, à savoir la condition de compatibilité du champ de déformation au passage de l'interface $r = a$. Il s'agit de la "version discontinuée" des équations de compatibilité classique. Elle prend le nom de conditions de Hadamard et indique qu'il existe un vecteur $\underline{\mathbf{g}}$ tel que

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}]] = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{g}}) = \begin{bmatrix} g_r & g_\theta/2 & g_z/2 \\ g_\theta/2 & 0 & 0 \\ g_z/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où l'on a pris $\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}_r$, la normale à l'interface considérée. La condition de Hadamard est la formulation mathématique du fait qu'il n'y pas de fissure à l'interface $r = a$, c'est-à-dire ni glissement ni ouverture. Or, en anticipant sur l'étude des déformations plastiques,

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}]] = [[\boldsymbol{\varepsilon}^p]] + [[\boldsymbol{\varepsilon}^e]] = p(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{E} \begin{bmatrix} [[\sigma_{rr}]] - \nu[[\sigma_{\theta\theta}]] & 0 & 0 \\ 0 & [[\sigma_{\theta\theta}]] - \nu[[\sigma_{rr}]] & 0 \\ 0 & 0 & -\nu([[\sigma_{rr}]] + [[\sigma_{\theta\theta}]]) \end{bmatrix}$$

On en déduit que $g_\theta = g_z = 0$ et que

$$\frac{\nu}{E}[[\sigma_{\theta\theta}]] = g_r, \quad p(a) + \frac{1}{E}[[\sigma_{\theta\theta}]] = 0, \quad p(a) + \frac{\nu}{E}[[\sigma_{\theta\theta}]] = 0$$

ce qui donne

$$p(a) = [[p]] = 0, \quad [[\sigma_{\theta\theta}]] = 0, \quad g_r = 0$$

On trouve donc le résultat annoncé.

Comme $\varepsilon_{rr} = du_r/dr$, on tire

$$u_r = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_0 r - \frac{\rho \omega^2 r^3}{9E}$$

où l'on a utilisé la condition $u_r(r = 0) = 0$.

On est alors en mesure de calculer la déformation plastique

$$p = \varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^e = \frac{u_r}{r} - \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr})$$

MAIS CELA DONNE LE CANULAR

$$p = -\frac{\rho \omega^2 r^2}{3E} (1 + 3\nu) < 0 \quad !!!!$$