

## MODELISATION DE LA PROPAGATION DES BANDES DE LUDERS DANS LES ACIERS

La courbe de traction de nombreuses nuances d'aciers (en premier chef les aciers doux) présente un crochet de traction suivi d'un plateau comme sur la figure 1. Le crochet est en général associé à la formation d'une bande de localisation de la déformation. La propagation de la bande le long du fût de l'éprouvette se traduit par le palier sur la courbe globale force/déplacement. Ce scénario est illustré aussi sur la figure 1. Lorsque l'ensemble du fût de l'éprouvette a été traversé par la bande, la déformation redevient homogène et on observe un durcissement sur la courbe correspondant à l'écroutissement du matériau.

L'objet du problème est de donner quelques éléments d'une modélisation mécanique de ce phénomène, associé aux noms de Piobert et Lüders.

### 1 Etude de la déformation homogène de traction et de cisaillement

On considère le fût rectangulaire d'un éprouvette découpée dans une tôle. L'étude est limitée au cas bidimensionnel avec des conditions de contraintes planes ( $\sigma_{i3} = 0$ , la direction 3 étant normale à la tôle). On considère des conditions de sollicitation de traction simple selon la direction 2 ou de cisaillement dans le plan 12.

#### 1.1 Traction simple homogène

Le matériau est décrit par une loi d'élasticité isotrope ( $E, \nu$ ) et par un critère de von Mises. La contrainte équivalente de von Mises vaut :

$$\sigma_{eq} = J_2(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\mathfrak{s}} : \underline{\mathfrak{s}}} \quad (1)$$

où  $\underline{\mathfrak{s}}$  désigne le déviateur des contraintes. La loi d'écroutissement est supposée linéaire et isotrope :

$$R = R_0 + Hp \quad (2)$$

$R$  désigne la limite d'élasticité pour une déformation plastique cumulée  $p$  donnée.  $R_0$  est la limite d'élasticité initiale. Le module plastique est  $H$ . La déformation plastique cumulée est définie par

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\dot{\xi}}^p : \underline{\dot{\xi}}^p} \quad (3)$$

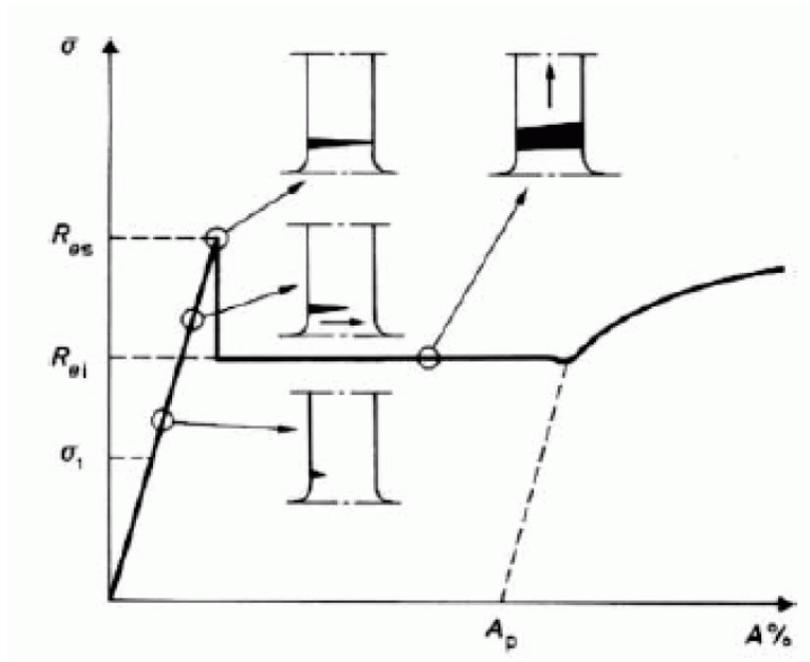


Figure 1: Courbe de traction typique d'un acier à palier. La formation et la propagation d'une bande de Piobert-Lüders le long du fût de l'éprouvette sont illustrées en médaillon. L'éprouvette est découpée dans une tôle.

On admet que la loi de normalité est respectée. Le comportement est supposé élastoplastique, indépendant du temps. L'éprouvette est déformée en traction simple jusqu'à une déformation totale  $\varepsilon_{22}$  donnée. Donner successivement, en fonction de  $\varepsilon_{22}$  et des caractéristiques mécaniques du matériau :

1. la déformation plastique cumulée  $p$  ;
2. la contrainte de traction  $\sigma_{22}$  ;
3. le tenseur des déformations élastiques  $\underline{\xi}^e$  (toutes les composantes) ;
4. les composantes de déformation plastique  $\varepsilon_{11}^p$  et  $\varepsilon_{33}^p$  ;
5. les composantes de déformation totale  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{33}$ .

## 1.2 Cisaillement simple homogène

Un essai de cisaillement simple est réalisé sur une autre éprouvette constituée du même matériau, décrit par la même loi de comportement que précédemment. Le cisaillement imposé, supposé homogène sur tout le fût de l'éprouvette, est de  $\varepsilon_{12}$ . Déterminer successivement, en fonction de  $\varepsilon_{12}$  et des caractéristiques mécaniques du matériau :

1. la déformation plastique cumulée  $p$  ;
2. la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  ;
3. la déformation élastique  $\varepsilon_{12}^e$  ;
4. la déformation plastique  $\varepsilon_{12}^p$ .

## 2 Statique et cinématique d'une bande de Piobert-Lüders

On suppose maintenant qu'une bande de Piobert-Lüders s'est formée et a commencé à se propager. Elle est schématisée par la zone grisée sur la figure 2. La zone plus claire du fût est en traction simple

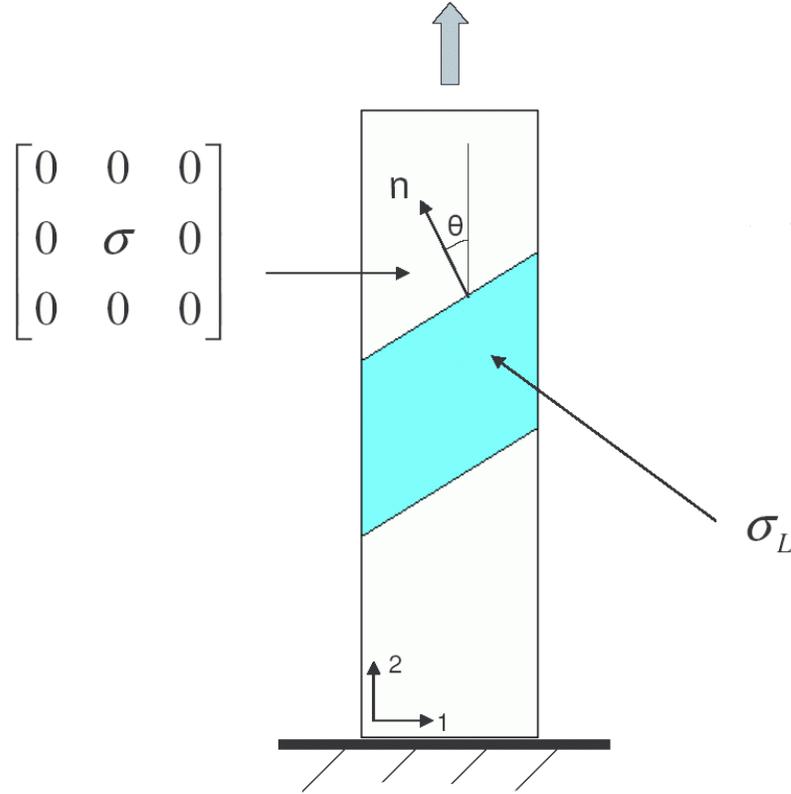


Figure 2: Schématisation mécanique d'une bande de Piobert–Lüders (zone grisée) au sein d'une éprouvette rectangulaire. La bande, à un instant donné, est limitée par deux lignes parallèles de discontinuité possible. Les contraintes sont supposées homogènes dans chaque zone. Elles prennent la valeur  $\underline{\sigma}_L$  au sein de la bande et  $\underline{\sigma}$  en dehors.

dans l'état

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2, \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma_{22} \quad (4)$$

Les états de contraintes sont supposés homogènes dans chaque domaine. La bande est limitée par deux lignes parallèles dont l'orientation est donnée par l'angle  $\theta$  défini sur la figure 2. Les champs de contraintes et de déformations sont *a priori* discontinus au travers de ces lignes.

## 2.1 Etat de contrainte au sein de la bande

On appelle  $\underline{\sigma}_L$  la valeur des contraintes, supposées homogènes, au sein de la bande.

En utilisant les conditions de continuité du vecteur-contrainte à la frontière de la bande et les conditions de bord libre sur les bords latéraux de la bande, montrer que l'état de contrainte au sein de la bande est nécessairement un état de traction simple. Montrer que

$$\underline{\sigma}_L = \underline{\sigma}$$

Par conséquent l'état de contrainte est homogène dans l'ensemble de la plaque.

Exprimer les composantes  $\sigma'_{ij}$  du tenseur des contraintes dans le repère orthonormé  $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{e}_3)$  où  $\underline{m}$  est le vecteur orthogonal à  $\underline{n}$  et contenu dans le plan 1-2. Les frontières de la bande sont donc parallèles à  $\underline{m}$ . Justifier que l'on parle parfois de *bande de cisaillement* à propos de la bande de Piobert–Lüders. Expliquer pourquoi cette dénomination est trompeuse.

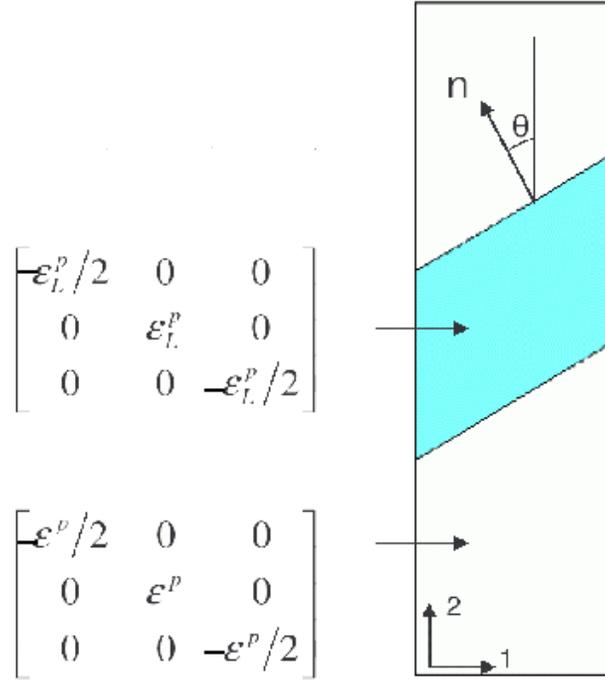


Figure 3: Schématisation mécanique d’une bande de Piobert–Lüders (zone grisée) au sein d’une éprouvette rectangulaire. La bande, à un instant donné, est limitée par deux lignes parallèles de discontinuité possible. Les déformations plastiques sont supposées homogènes dans chaque zone. Elles prennent la valeur  $\varepsilon_L^p$  au sein de la bande et  $\varepsilon^p$  en dehors.

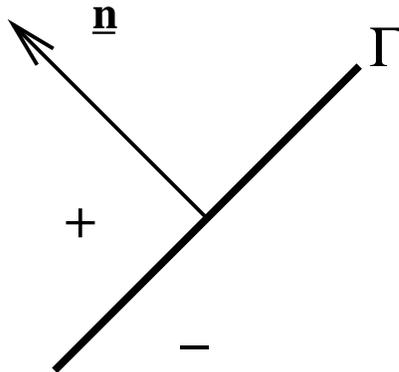
## 2.2 Déformation plastique dans la bande

La déformation au sein de la bande de Piobert–Lüders est en général plus forte que dans le reste de l’éprouvette. On peut représenter ce fait en considérant un champ de déformation homogène dans chaque domaine mais présentant une discontinuité au travers de chaque bord  $\Gamma$  de la bande.

On introduit la notation suivante pour la discontinuité d’une quantité  $f$  à la traversée d’une surface  $\Gamma$  de normale  $\underline{n}$  donnée, en un point  $M \in \Gamma$  :

$$[[f]](M) = f^+(M) - f^-(M) \quad (5)$$

où  $f^+(M)$  (resp.  $f^-(M)$ ) est la limite de  $f(P)$  lorsque le point  $P$  tend vers le point  $M$  en suivant un trajet continu quelconque mais entièrement contenu dans le côté + (resp. -). Le côté + est défini, de manière conventionnelle, comme celui vers lequel pointe le vecteur normal  $\underline{n}$  :



### 2.2.1 Compatibilité à la frontière de la bande (conditions de Hadamard)

On suppose que le déplacement est continu à la traversée de la frontière de la bande. Cela signifie qu'il n'y a pas de fissure à l'interface  $\Gamma$  (ni en ouverture, ni en glissement relatif). Soit  $u'_1$  et  $u'_2$  les composantes de déplacement dans le plan de l'éprouvette, selon le repère  $(\underline{\mathbf{m}}, \underline{\mathbf{n}})$ . Justifier que les composantes suivantes du gradient du déplacement sont continues à l'interface  $\Gamma$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1}$$

Il n'en va pas de même pour les composantes

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2}, \quad \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2}$$

qui peuvent présenter des discontinuités au passage de  $\Gamma$ . En déduire que le saut de déformation au passage de la surface  $\Gamma$  est de la forme<sup>1</sup>

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^- = \llbracket \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \rrbracket = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{g}}) \quad (6)$$

où  $\underline{\mathbf{g}}$  est un vecteur du plan dont les composantes  $g_1, g_2$  sont partiellement indéterminées et caractérisent la discontinuité. Pour établir ce résultat, on ne s'occupera pas, pour simplifier, des conditions de compatibilité selon  $\underline{\mathbf{e}}_3$ .

### 2.2.2 Application à la bande de Piobert–Lüders

On applique les conditions de compatibilité précédentes à la déformation plastique<sup>2</sup> d'une éprouvette rectangulaire en traction simple parcourue par une bande de Piobert–Lüders. La situation est représentée sur la figure 3. La discontinuité de déformation est de la forme

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_L^p = \llbracket \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rrbracket = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{g}}) \quad (7)$$

En substituant la forme des déformations plastiques dans la bande et à l'extérieur de la bande, indiquée sur la figure 3, montrer que la condition précédente ne peut être remplie que pour une orientation très particulière de la bande donnée par

$$\tan^2 \theta = \frac{1}{2} \quad (8)$$

Ce qui correspond à un angle  $\frac{\pi}{2} - \theta = 54.7^\circ$  pour l'orientation de la bande. C'est effectivement l'orientation des bandes de Piobert–Lüders observée dans la pratique, pour les matériaux isotropes.

## 3 Bandes de Piobert–Lüders en cisaillement simple

Reprendre l'analyse précédente pour déterminer l'orientation possible des bandes de Piobert–Lüders dans un échantillon de tôle soumis à du cisaillement simple. On commencera par montrer que la contrainte est nécessairement homogène dans l'éprouvette, même en présence d'une bande de Piobert–Lüders. On appliquera alors la condition de compatibilité (7) pour trouver l'orientation possible des bandes de Piobert–Lüders.

<sup>1</sup>On rappelle la définition du produit tensoriel  $\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}$  de deux vecteurs  $\underline{\mathbf{a}}$  et  $\underline{\mathbf{b}}$ . Il s'agit du tenseur d'ordre 2 dont les composantes de la matrice sont  $a_i b_j$  à partir des composantes  $a_i$  et  $b_j$  de  $\underline{\mathbf{a}}$  et  $\underline{\mathbf{b}}$ .

<sup>2</sup>La condition porte *a priori* sur la déformation totale. Mais, dans le cas présent, la contrainte et donc la déformation élastique sont homogènes dans toute l'éprouvette d'après le résultat de la section 1.1. Le champ de déformation plastique est donc compatible et la condition de Hadamard peut lui être appliquée.

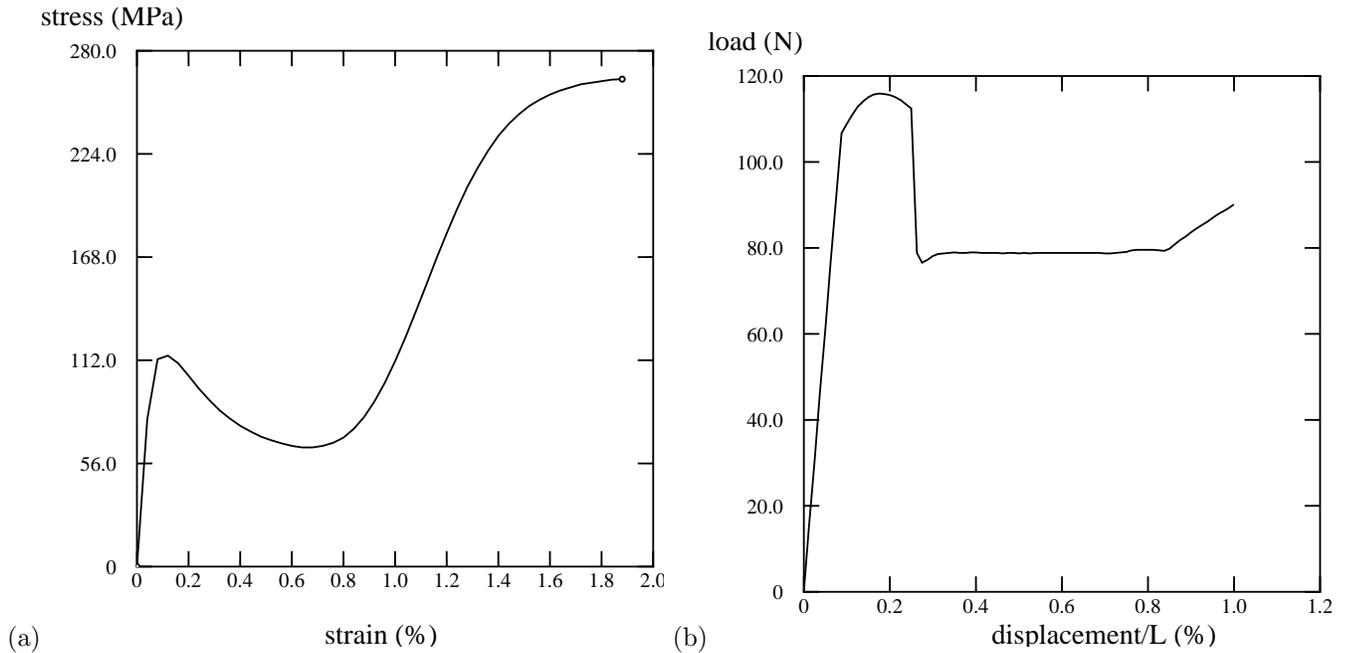


Figure 4: Loi de comportement pour simuler la formation et la propagation des bandes de Piobert–Lüders, (a). Courbe force/déplacement lors de la simulation de la traction simple d’une plaque avec la loi de comportement précédente (b).

## 4 Simulation par éléments finis de la propagation d’une bande de Piobert–Lüders

Il est possible de simuler, par la méthode des éléments finis, la propagation d’une bande de Piobert–Lüders. Pour cela on introduit une loi d’érouissage plus complexe que la loi (2) : la fonction d’érouissage est une fonction présentant un maximum suivi d’un adoucissement, d’un creux et enfin d’une branche ascendante (érouissage). La loi de comportement est illustrée par la courbe de la figure 4(a) obtenue en l’absence de bande de Piobert–Lüders, i.e. lorsque la déformation est homogène.

On applique une vitesse de déplacement verticale imposée en haut du maillage d’une plaque tandis que le bas est fixé ( $u_2 = 0$  en  $x_2 = 0$ ). Au début du calcul, la déformation est homogène. Lorsque la contrainte est maximale (sommet de la courbe de la figure 4(a)), une instabilité se produit : la déformation continue à grandir au sein d’une bande très fine dans le maillage tandis qu’une décharge élastique se produit dans le reste de l’éprouvette (voir la figure 5 à gauche). Cela est dû au fait que la contrainte ne peut que diminuer une fois son maximum atteint. Or, elle peut diminuer de deux façons différentes : en dévalant la branche descendante de la loi de comportement à déformation croissante, où par une décharge élastique. Le “bruit” numérique est suffisant pour déclencher cette bifurcation. On constate ensuite que la bande épaisit, c’est-à-dire que la bande se propage (cf. figure 5 au milieu et à droite). Comment expliquez-vous ce fait ? La courbe force/déplacement reste alors plate jusqu’à ce que la bande ait envahi toute l’éprouvette, après quoi l’érouissage redémarre, comme l’indique la figure 4(b).

Soit  $\sigma_{max}$  le sommet de la première bosse sur la loi de comportement de la figure 4(a). Soit  $p_0$  la déformation plastique pour laquelle  $\sigma_{max}$  est à nouveau atteinte sur la branche ascendante après le creux de la courbe 4(a). Quel est le lien entre  $p_0$  et longueur du plateau sur la courbe 4(b) ?

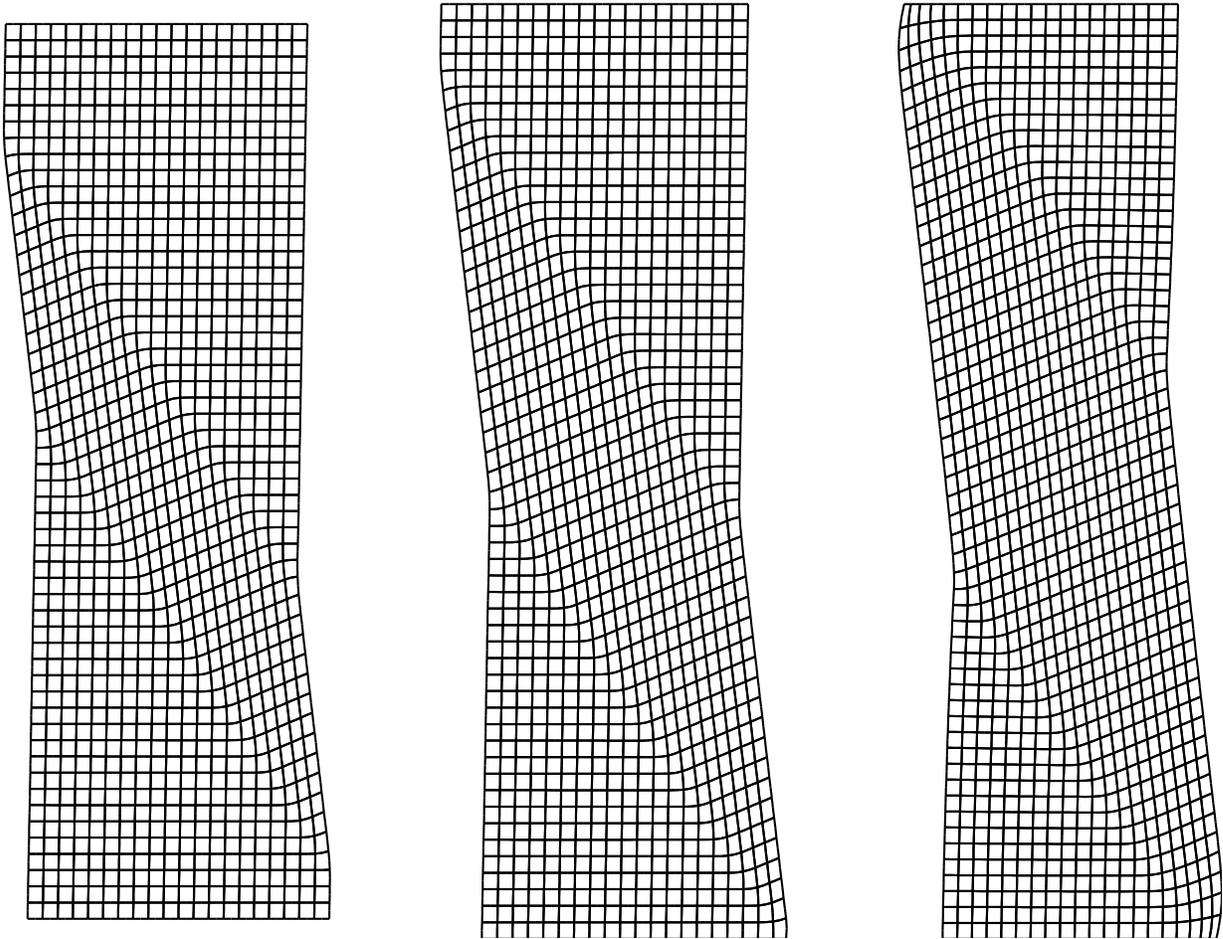


Figure 5: Simulation par éléments finis de la formation et de la propagation d'une bande de Piobert-Lüders dans un matériau élastoplastique avec un critère de von Mises (en contraintes planes).