ECOLE DES MINES DE PARIS

MASTERE COMADIS

8 janvier 2007, 9h-12h

Cours : LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES

TORSION ELASTOPLASTIQUE D'UNE BARRE A SECTION CIRCULAIRE

On étudie le développement de la plasticité au sein d'une barre de section circulaire, d'axe z, comme sur la figure 1(a). Dans le problème, on utilise un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) explicité sur la figure 1(b). Le matériau, homogène, sera considéré successivement, comme élastique, puis comme élastique parfaitement plastique, et enfin comme élastoplastique écrouissable. La question des contraintes résiduelles après torsion élastoplastique est abordée ainsi que la détermination de la limite d'élasticité lorsqu'on inverse le sens de la sollicitation, selon que l'écrouissage est de type isotrope ou cinématique.

1 Comportement élastique et limite d'élasticité

On rappelle la solution du problème de la torsion d'une barre cylindrique au comportement élastique isotrope linéarisé. La section $\mathcal{S}_0$ est fixé (déplacement nul) tandis qu'une rotation d'angle

$$\beta = \alpha l \tag{1}$$

est imposée à l'extrémité $\mathcal{S}_l$. Le chargement est donc caractérisé par α, angle de torsion imposée par unité de longueur. Dans ces conditions, l'analyse du problème, dans le contexte des petites perturbations, fournit les champs de déplacement, de déformation et de contrainte suivants :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \alpha z r \, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha z r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\alpha}{2} r \, (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta), \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r/2 \\ 0 & \alpha r/2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \mu \alpha r (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta), \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \mu r \\ 0 & \alpha \mu r & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

où μ est le module de cisaillement du matériau. La barre est soumise au couple appliqué

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}} = \mathcal{C} \, \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{5}$$

avec

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \tag{6}$$

Le choix du système de coordonnées est tel que, lorsque $\mathcal{C} > 0$, c'est–à–dire $\alpha > 0$, la composante $\sigma_{\theta z} > 0$.

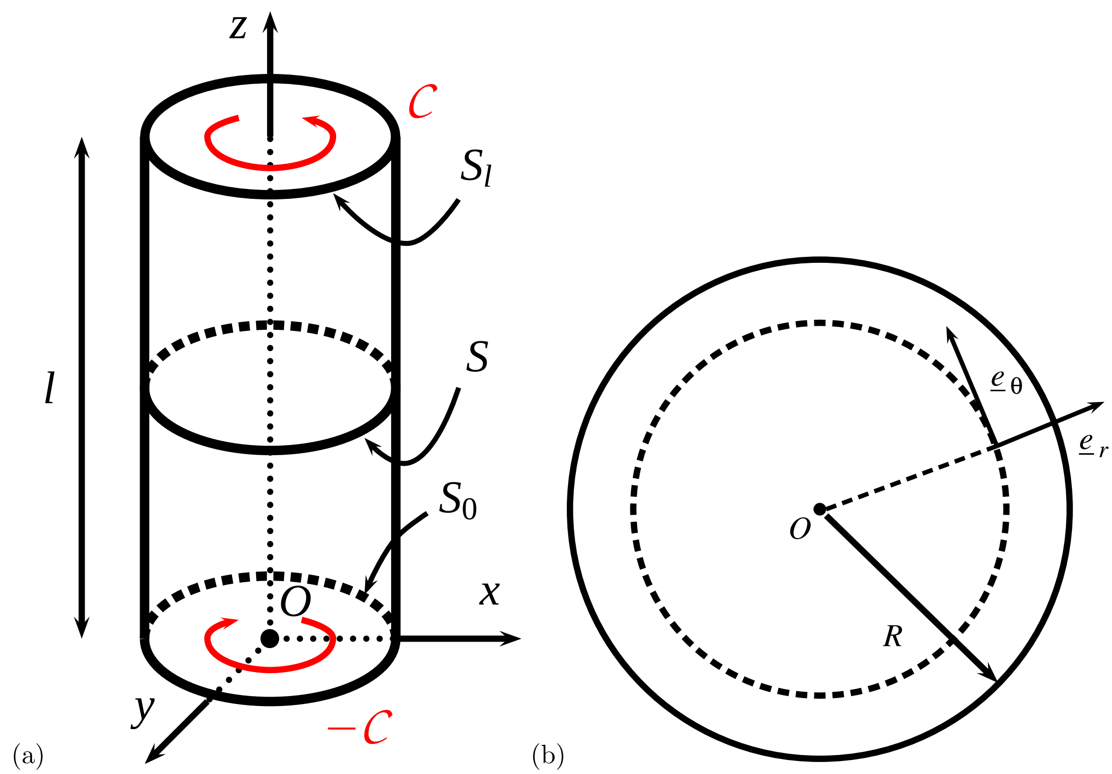

Figure 1: Torsion d'un barre cylindrique de longueur l et de section courante $\mathcal{S}$, disque de rayon R : (a) couple $\mathcal{C}$ appliqué, (b) repère pour les coordonnées cylindriques.

1.1

Justifier que la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est $\sigma_{\theta z}$.

On vérifie que seule cette forme du tenseur des contraintes permet de satisfaire les conditions de vecteur-traction imposé $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}$: nul sur les surface latérales, dirigé selon la direction $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ sur les faces $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_l$.

1.2 Limite d'élasticité

On suppose que le matériau obéit au critère de von Mises et admet une limite d'élasticité σ_0 en traction simple.
A quel endroit de la section, la plasticité va–t-elle commencer ?
Déterminer l'angle linéique limite α_e pour lequel la plasticité commence ?
Donner enfin le couple $\mathcal{C}_e$ correspondant.

L'invariant de von Mises vaut

$$J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}\, 2\sigma_{r\theta}^2} = \sqrt{3}\sigma_{\theta z} = \sqrt{3}\mu|\alpha|r$$

Il est maximal en $r = R$ où la plasticité va donc d'abord apparaître.

Cela se produit lorsque la valeur σ_0 est atteinte, ce qui donne

$$\boxed{\alpha_e = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\mu R}}$$

Le couple appliqué correspondant se calcule de la manière suivante :

$$\underline{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{S}} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_z)\, dS = \int_{\mathcal{S}} r\underline{\boldsymbol{e}}_r \wedge \sigma_{\theta z}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\, dS = \left(2\pi\mu\alpha \int_0^R r^3 dr\right) \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

d'où

$$\mathcal{C} = \mu J\alpha = \frac{\pi}{2}\mu\alpha R^4$$

Le couple limite est donc

$$\boxed{\mathcal{C}_e = \mu J\alpha_e = \frac{\pi}{2}R^3\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}}$$

1.3 Cas du critère de Tresca

Reprendre la question précédente en supposant cette fois–ci que le matériau obéit au critère de Tresca, sachant que la limite d'élasticité en traction du matériau est σ_0.

2 Comportement élastoplastique parfait

Dans le reste du problème, on suppose que le matériau obéit au critère de plasticité de von Mises. La barre est chargée en torsion avec un angle $\alpha > \alpha^e > 0$, et par conséquent un couple $\mathcal{C} > \mathcal{C}^e$. La section du tube est donc divisée en deux zones, indiquées sur la figure 2 :

- **zone élastique** $0 \leq r \leq a$: c'est le disque de rayon $a < R$ au sein duquel la réponse du barreau est purement élastique ;
- **zone plastique** $a \leq r \leq R$: c'est une couronne au sein de laquelle la réponse du barreau est élastoplastique.

On cherche à déterminer les contraintes qui règnent dans chaque zone. La solution est recherchée en supposant que la seule composante non nulle est $\sigma_{\theta z}$.

2.1 Equations d'équilibre

De quelle variable(s) d'espace dépend $\sigma_{\theta z}$?
Pour le voir, on utilisera les équations d'équilibre de la mécanique des milieux continus (en l'absence d'efforts volumiques). La divergence d'un tenseur d'ordre 2 en coordonnées cylindriques est rappelée en annexe.

Les équations d'équilibre indiquent que

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$$

de sorte que $\sigma_{\theta z}(r)$ est une fonction de la variable r seulement.

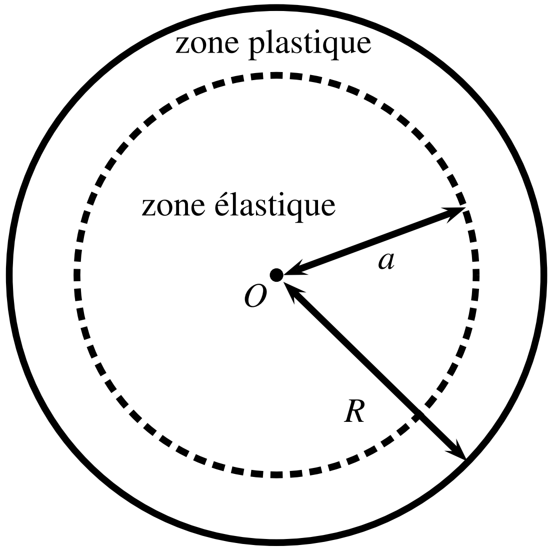

Figure 2: Torsion d'un barre cylindrique en élastoplasticité : partition de la section courante en une zone élastique et une zone élastoplastique.

2.2 Contraintes dans la zone plastique

Déterminer complètement $\sigma_{\theta z}$ dans la zone plastique grâce au critère de plasticité.

L'invariant de von Mises vaut

$$J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{3}|\sigma_{\theta z}| = \sigma_0$$

Pour le chargement $\alpha > \alpha^e > 0$, on a donc

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

2.3 Contraintes dans la zone élastique

Donner les contraintes dans le cœur élastique et déterminer la valeur de la frontière a en fonction des caractéristiques du matériau et du chargement α.
Tracer alors le profil de contrainte le long d'un rayon d'une section courante.

Dans la zone élastique, les contraintes sont toujours de la forme

$$\sigma_{\theta z} = \mu\alpha r$$

En $r = a$, la contrainte atteint la limite d'élasticité :

$$\sigma_{\theta z}(r = a) = \mu\alpha a = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Le rayon de la zone élastique est donc

$$a = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\mu\alpha}$$

Le profil de contrainte est tracé sur la figure 3 pour un certain niveau de chargement correspondant à a/r égal à 43%.

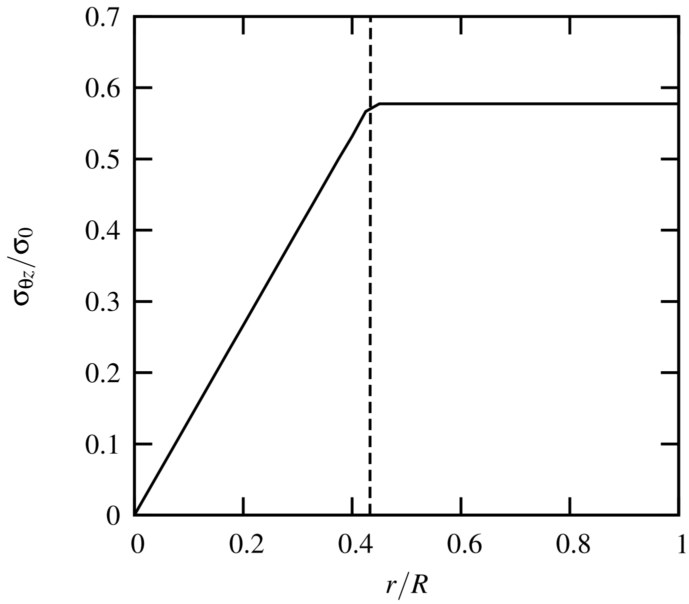

Figure 3: Torsion d'un barre cylindrique en élastoplasticité : profil de contrainte le long d'un rayon, pour un niveau de chargement et un rayon correspondant à a/R égal à 43%.

2.4 Couple en fonction de l'angle

Exprimer le couple $\mathcal{C}$ en fonction de σ_0, R et a, puis en fonction de σ_0, R, μ, α. Tracer alors la courbe du couple en fonction de l'angle imposé $\mathcal{C}(\alpha)$.

Le couple total résulte des contributions des contraintes de la zone élastique et de la zone plastique :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \mu\frac{\pi}{2}\alpha a^4 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}2\pi\int_a^R r^2 dr \\
&= \mu\frac{\pi}{2}\alpha a^4 + \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}}2\pi(R^3 - a^3) \\
&= \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}}2\pi R^3 - \frac{\pi}{54}\frac{\sigma_0^4}{\mu^3\alpha^3}
\end{aligned}
$$

L'évolution du couple en fonction de l'angle appliqué est illustré sur la figure 4

2.5 Charge limite

Montrer que, pour une valeur limite $\mathcal{C}_\infty$ du couple, la plasticité envahit toute la section. La barre ne peut supporter un couple supérieur et se déforme alors à volonté. Donner cette charge limite en fonction de σ_0 et R. Exprimez–la aussi en fonction de $\mathcal{C}_e$.

La courbe du couple en fonction de l'angle admet une asymptote lorsque $\alpha \to \infty$. C'est la charge limite $\mathcal{C}_\infty$:

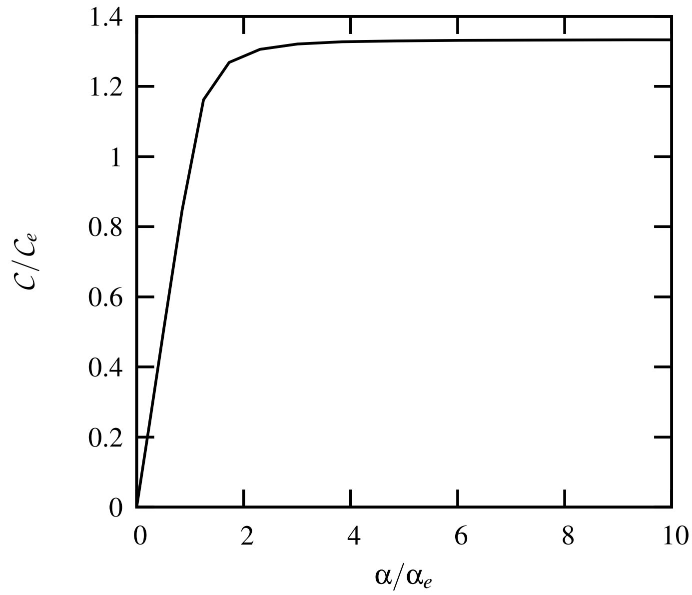

Figure 4: Torsion d'un barre cylindrique en élastoplasticité : couple en fonction de l'angle imposé.

$$\mathcal{C}_\infty = 2\pi R^3 \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\mathcal{C}_e$$

2.6 Déformation plastique

Donner le champ de déformation plastique $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ dans la zone plastique. On commencera par évaluer l'incrément de déformation plastique $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$ en fonction de $\dot{p}$ et du déviateur des contraintes.
Pour aboutir à l'expression finale en fonction de r, α, a, on utilisera le fait que la déformation totale revêt la même forme dans toute la section, à savoir l'expression (3).

On commence par écrire la loi d'écoulement plastique :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{p}\,\underset{\sim}{n} = \dot{p}\,\frac{3}{2}\,\frac{\underset{\sim}{s}}{J_2(\underset{\sim}{\sigma})} = \dot{p}\frac{3}{2}\,\frac{\underset{\sim}{\sigma}}{\sqrt{3}\sigma_{\theta z}}$$

$$[\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p] = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{p}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On évaluer ensuite la déformation élastique

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^e = \frac{1}{2\mu}\underset{\sim}{\sigma}, \quad \varepsilon^e_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{2\mu}$$

Dans la zone plastique, la déformation totale vaut donc

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\alpha}{2}r = \frac{\sigma_0}{2\mu\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}p$$

On peut vérifier que cette expression de p est telle que $p = 0$ en $r = a$. Elle peut donc être réécrite sous la forme :

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}(r - a)$$

2.7 Contraintes résiduelles après une décharge élastique

Parvenu au niveau de charge appliquée $\mathcal{C}_1$, tel que $\mathcal{C}_e < \mathcal{C}_1 < \mathcal{C}_\infty$, on décharge la barre jusqu'à ce que le couple appliqué s'annule $\mathcal{C} = 0$. En supposant que cette décharge est purement élastique et en appliquant le théorème de superposition, calculer les contraintes résiduelles qui existent dans le barreau déchargé. Tracer le profil de contraintes résiduelles le long d'un rayon d'une section courante. Calculer aussi l'angle de torsion résiduelle.

On part d'un état initial caractérisé par le chargement $\mathcal{C}_1$ et la valeur a_1, fixée pendant la décharge. On superpose à cet état un couple supplémentaire égale à $-\mathcal{C}_-$. Les contraintes dues à la réponse purement élastique de la barre à la décharge $-\mathcal{C}_-$ sont ajoutées au champ de contraintes initiale :

- $0 \leq r < a$,

$$\sigma_{\theta z} = \mu \alpha_1 r - \frac{\mathcal{C}_-}{J} r$$

- $a \leq r \leq R$,

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \frac{\mathcal{C}_-}{J} r$$

La décharge complète est obtenue pour $\mathcal{C}_- = \mathcal{C}_1$. Le profil correspondant est tracé sur la figure 5. L'angle de torsion résiduel α_0 est obtenu en soustrayant à α_1 l'angle de torsion provoqué par $-\mathcal{C}_1$ lors d'une réponse élastique de la barre :

$$\alpha_0 = \alpha_1 - \frac{\mathcal{C}_1}{\mu J}$$

2.8 Limite d'élasticité pour une torsion en sens inverse

Après la décharge, on applique un couple de signe opposé au couple appliqué lors de la première charge. Calculer la valeur $\mathcal{C}_{-e}$ du couple pour lequel la barre entre à nouveau dans un régime plastique. Donner en particulier cette limite d'élasticité lorsque le couple atteint lors de la première charge est très proche de la charge limite $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_\infty$.
Justifier aussi l'hypothèse faite à la question 2.7.

Lorsqu'un couple $-\mathcal{C}_-$ est superposé à l'état initial $\mathcal{C}_1$, la contrainte locale minimale est atteinte en $r = R$:

$$\sigma_{\theta z}(R) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \frac{\mathcal{C}_-}{J} R$$

La limite d'élasticité est atteinte à cet endroit lorsque

$$\sqrt{3}\sigma_{\theta z} = \sigma_0 - \sqrt{3}\frac{\mathcal{C}_-}{J} R = -\sigma_0$$

ce qui donne

$$\mathcal{C}_- = \frac{2\sigma_0 J}{\sqrt{3}R} = \frac{\pi \sigma_0 R^3}{\sqrt{3}} = 2\mathcal{C}_e$$

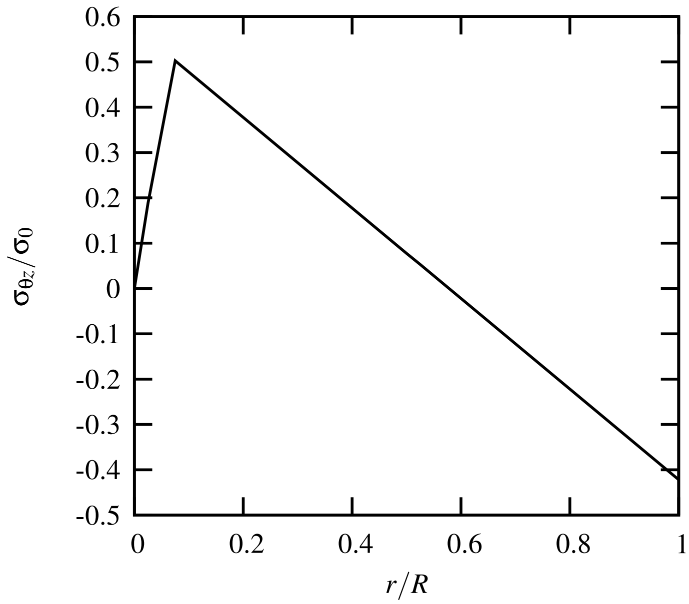

Figure 5: Contraintes résiduelles dans une barre cylindrique élastoplastique ayant subi une torsion.

La limite d'élasticité pour la torsion en sens inverse est donc

$$\mathcal{C}_{-e} = \mathcal{C}_1 - 2\mathcal{C}_e$$

Lorsque $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_\infty$, cette expression devient

$$\boxed{\mathcal{C}_{-e} = -\frac{2}{3}\mathcal{C}_e}$$

Remarquer que cette valeur est plus grande que $-\mathcal{C}_e$ qui est la limite d'élasticité de la barre sollicitée en torsion dans le sens négatif à partir d'un état naturel. La barre prédéformée plastifie plus tôt que la barre vierge. Cette valeur reste toutefois négative de sorte que l'hypothèse de décharge élastique faite au paragraphe 2.7 est vérifiée.
La courbe globale du couple en fonction de l'angle est donnée pour un cycle de déformation sur la figure 6. On voit en particulier que la charge limite pour la torsion dans le sens opposé est l'opposé de la charge limite monotone $\mathcal{C}_\infty$.

3 Comportement élastoplastique écrouissable

On reprend le problème précédent en tenant compte de l'écrouissage du matériau.

3.1 Ecrouissage isotrope linéaire

La fonction de charge a cette fois–ci la forme

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, R) = J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) - R$$

où est la variable d'écrouissage isotrope

$$R = \sigma_0 + Hp$$

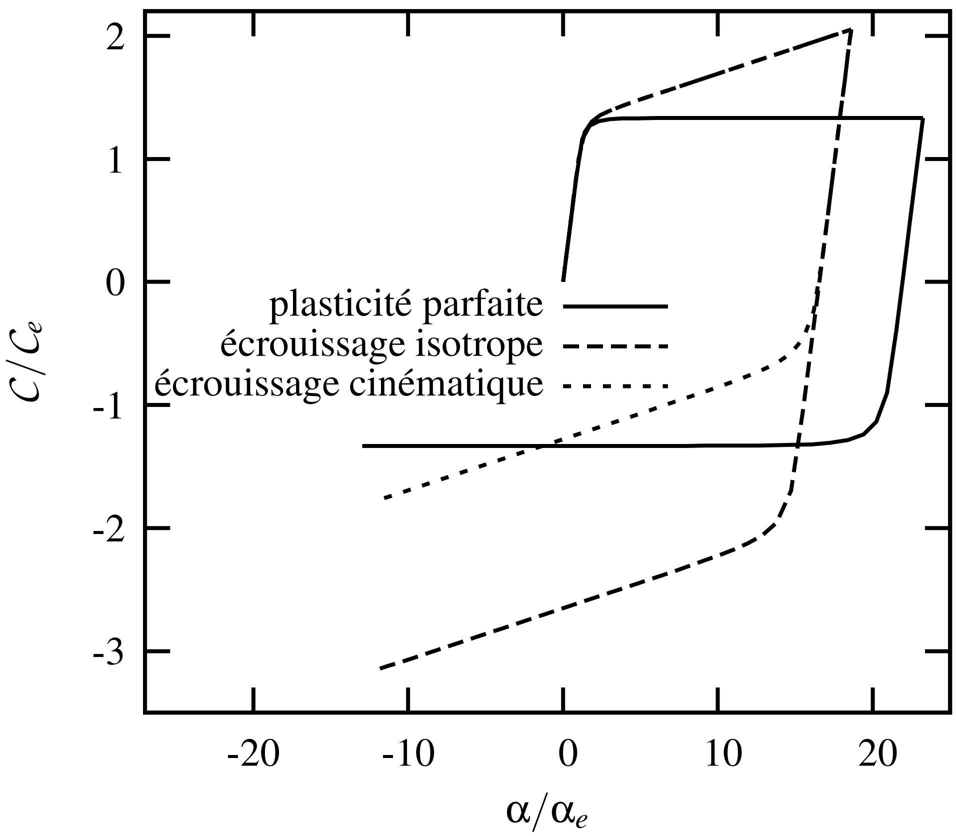

Figure 6: Cycle de torsion sur une barre élastoplastique constituée de différents matériaux : élastique parfaitement plastique ou écrouissable à écrouissage isotrope ou cinématique.

La limite d'élasticité initiale en traction est σ_0. Le module d'écrouissage est H et p est la déformation plastique cumulée.

Pour une torsion d'angle $\alpha > \alpha_e$, donner le champ de contraintes dans la barre, ainsi que le champ de déformation plastique.
Justifier qu'il n'existe pas de charge limite avec ce type de comportement.
Prévoir enfin la limite d'élasticité lorsque, après avoir atteint une valeur maximale $\mathcal{C}_1$, le sens de la charge est inversé.
Confirmer que pour ce type d'écrouissage, la décharge reste purement élastique.

La contrainte de cisaillement dans la zone plastique $a \leq r \leq R$ vaut :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0 + Hp}{\sqrt{3}}$$

La déformation plastique se déduit de la déformation totale et de la déformation élastique :

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon^e_{\theta z} + \varepsilon^p_{\theta z} = \frac{\alpha}{2}r = \frac{\sigma_0 + Hp}{2\mu\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}p$$

L'expression est telle que $p(r = a) = 0$. Finalement,

$$p = \sqrt{3}\alpha(r - a)\frac{1}{3 + \frac{H}{\mu}}$$

On retrouve le cas de la plasticité parfaite en prenant $H = 0$.
Après avoir atteint l'état caractérisé par $\mathcal{C}_1, \alpha_1, a_1$, on superpose le couple $-\mathcal{C}_-$. Le champ de contraintes devient :

- pour $0 \leq r \leq a$,

$$\sigma_{\theta z} = \mu\alpha_1 r - \frac{\mathcal{C}_-}{J}r$$

- pour $a \leq r \leq R$,

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0 + Hp}{\sqrt{3}} - \frac{\mathcal{C}_-}{J}r$$

La contrainte minimale est en $r = R$. C'est là que la plasticité peut redémarrer en continuant de charger dans le sens négatif. La limite d'élasticité en ce point est $-(\sigma_0 + Hp_1)$. Ainsi

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0 + Hp}{\sqrt{3}} - \frac{\mathcal{C}_-}{J}R = -\frac{\sigma_0 + Hp_1}{\sqrt{3}}$$

Cette limite d'élasticité est donc atteinte pour

$$\mathcal{C}_- = 2\frac{J}{R}\frac{\sigma_0 + Hp_1}{\sqrt{3}}$$

ce qui correspond au couple total $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_-$. On retrouve la valeur obtenue dans le cas parfaitement plastique en prenant $H = 0$.

3.2 Ecrouissage cinématique linéaire

Le matériau possède maintenant une contrainte interne

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{X}} = \frac{2}{3} H \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

où H est le module d'écrouissage cinématique. Dans la suite, on note X la composante

$$X = X_{\theta z} = \frac{2}{3} H \varepsilon^p_{\theta z}$$

Le critère de plasticité est

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}) = J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}) - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}})} - \sigma_0$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}$ est le déviateur de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. Selon la règle de normalité, la loi d'écoulement plastique s'écrit

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}}{J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}})}$$

Du point de vue des notations, la matrice associée à $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} - X \\ 0 & \sigma_{\theta z} - X & 0 \end{bmatrix}$$

Expliciter $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}})$ en fonction de $\sigma_{\theta z}$ et X.
Expliciter alors la matrice $[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]$ en fonction de p et exprimer en particulier $\varepsilon^p_{\theta z}$.
Exprimer ensuite X en fonction de p.
Muni de tous ces éléments, donner les contraintes dans la zone plastique.
Donner enfin la limite d'élasticité de la barre en torsion en sens inverse de la première charge $\mathcal{C}_1$.
Dire dans quelles conditions la plasticité peut reprendre pendant la décharge.

On a d'abord

$$J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}) = \sqrt{3} |\sigma_{\theta z} - X|$$

puis

$$[\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p] = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si bien que

$$\varepsilon^p_{\theta z} = \frac{\sqrt{3}}{2} p, \quad \text{et} \quad X = \frac{Hp}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, les contraintes dans la zone plastique sont

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + X = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_0 + Hp)$$

Les contraintes peuvent augmenter sans limite en raison de l'écrouissage linéaire. Le couple associé n'a donc pas de limite.

Lorsque l'on superpose à l'état $\mathcal{C}_1, \alpha_1, X_1(r)$ le couple $-\mathcal{C}_-$, on obtient la distribution de contrainte suivante :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_0 + Hp) - \frac{\mathcal{C}_-}{J} r$$

La plasticité peut reprendre en $r = R$. En fin de décharge et lors de la torsion avec un couple négatif, on a $\sigma_{\theta z} < X_1$ et la plasticité redémarre lorsque

$$\sqrt{3}(X_1(R) - \sigma_{\theta z}(R)) = \sigma_0$$

d'où

$$\frac{\mathcal{C}_-}{J} R = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{Hp_1}{\sqrt{3}} - X_1$$

$$\mathcal{C}_- = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{J}{R}$$

et la limite d'élasticité de la barre en torsion dans le sens opposé à la première charge est

$$\mathcal{C}_{-e} = \mathcal{C}_1 - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{J}{R}$$

Si $\mathcal{C}_1$ est assez grand pour que $\mathcal{C}_{-e} > 0$, on voit que cette limite d'élasticité peut être franchie lors de la décharge. Un cycle de torsion sur un tel matériau à écrouissage cinématique linéaire est illustré sur la figure 6 et comparé au cas de l'écrouissage isotrope linéaire. Les deux matériaux sont indiscernables pendant la première charge. Ils se distinguent par leur limite d'élasticité pour la torsion en sens inverse.

4 Annexe : divergence en coordonnées cylindriques

La divergence d'un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ d'ordre 2 en coordonnées cylindriques a pour composantes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T_{ij}(r, \theta, z) \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned} \tag{7}$$