

ECOLE DES MINES DE PARIS

MASTERE COMADIS

9 janvier 2008, 13h30–16h30

Cours : LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES

CYCLAGE THERMIQUE ET CONTRAINTES RESIDUELLES DANS LES COMPOSITES A MATRICE METALLIQUE

Le matériau de l'étude est un composite à matrice métallique en titane à renforts particuliers en carbure de silicium. Le titane a un comportement thermoélastoplastique. Ses caractéristiques thermoélastiques sont

$$E = 110000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique. On donne aussi les constantes de Lamé correspondantes :

$$\lambda = 63642 \text{ MPa}, \quad \mu = 42308 \text{ MPa}$$

Ces paramètres sont supposés ne pas dépendre de la température, pour simplifier.

La première partie du problème concerne le cyclage thermique du titane seul. La seconde partie a pour objectif le calcul des contraintes résiduelles dans le composite à la suite de son élaboration à chaud.

Dans la suite du problème, on donnera les résultats sous forme littérale puis on effectuera systématiquement l'application numérique.

1 Cyclage thermique d'un métal

On considère une éprouvette cylindrique massive en titane prise entre deux mors dont la distance est maintenue constante pendant tout l'essai. L'éprouvette est chauffée, par induction, entre l'ambiante T_0 et une température visée T . On suppose que la température est uniforme à chaque instant, égale à la consigne imposée. La longueur totale de l'éprouvette ne peut pas varier pendant l'essai. L'éprouvette ne peut pas se désolidariser des mors, capables de supporter et transmettre les efforts de compression comme de traction.

Dans ces conditions, la réponse du matériau, supposé isotrope, est purement uniaxiale. La déformation totale se décompose en une partie élastique, une partie thermique et une partie, plastique :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^p \quad (1)$$

La déformation thermique est proportionnelle à l'écart de température :

$$\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T, \quad \Delta T = T - T_0 \quad (2)$$

La contrainte axiale est donnée par la loi d'élasticité uniaxiale :

$$\sigma = E \varepsilon^e \quad (3)$$

Le critère de plasticité utilisé est décrit par la fonction

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_0$$

La contrainte interne X est proportionnelle à la déformation plastique :

$$X = H \varepsilon^p \quad (4)$$

Les paramètres de plasticité sont

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 100 \text{ MPa} \\ H &= 10000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

1.1 Limite d'élasticité

Justifier que des contraintes apparaissent dans l'éprouvette lorsqu'on la chauffe. Calculer pour quel écart de température $\Delta T_1 = T_1 - T_0$ la limite d'élasticité du matériau est atteinte.

La déformation totale est constamment nulle :

$$\varepsilon = 0 = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \quad (5)$$

Lorsque la température $\Delta T > 0$ augmente, des contraintes de compression se développent $\sigma < 0$. La limite d'élasticité est atteinte lorsque $\sigma = -\sigma_0$, i.e. lorsque

$$\Delta T_1 = \frac{\sigma_0}{E\alpha} \quad (6)$$

A.N. $\Delta T_1 = 91 \text{ K}$.

1.2 Longueur résiduelle de l'éprouvette

L'éprouvette est chauffée de l'ambiante jusqu'à une température T_2 telle que $\Delta T_2 > \Delta T_1$ précédent. Puis l'éprouvette est refroidie et détachée du montage. On constate qu'elle n'a plus sa longueur initiale. Calculer cette déformation plastique résiduelle en supposant qu'aucune plasticité supplémentaire n'a eu lieu au refroidissement. Calculer au passage la contrainte maximale rencontrée lors de ce chargement thermique.

Pour l'application numérique on prendra $\Delta T_2 = 150 \text{ K}$.

Sous charge plastique la contrainte de compression vaut :

$$\sigma - X = -\sigma_0 \implies \sigma = H\varepsilon^p - \sigma_0$$

Pour calculer la déformation plastique, on écrit que la déformation totale reste nulle :

$$0 = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T_2 + \varepsilon^p$$

d'où

$$\varepsilon^p = \frac{\sigma_0 - E\alpha\Delta T_2}{E + H} \quad (7)$$

Si l'on suppose que le refroidissement n'est accompagné d'aucune déformation plastique supplémentaire, cette déformation ε^p représente la déformation résiduelle de l'éprouvette lorsque la contrainte est relâchée.

Pour $\Delta T_2 = 150 \text{ K}$, cela donne

$$\varepsilon^p = -0.0542\%, \quad \sigma^{max} = H\varepsilon^p - \sigma_0 = 105 \text{ MPa}$$

Cette déformation plastique est négative, l'éprouvette est donc plus courte qu'initialement.

1.3 Cyclage thermique

Déterminer l'écart de température maximal ΔT_2^{max} pour lequel le matériau se comporte effectivement de manière élastique lors du refroidissement.

On impose alors un chauffage $\Delta T_3 > \Delta T_2^{max}$. Calculer la déformation plastique et la contrainte au retour à la température ambiante.

On cycle alors entre l'ambiante et T_3 . Montrer qu'il existe un cycle stabilisé σ - ε^p . Trace la courbe σ - ε^p pour le chargement complet (premier et deuxième cycles de chauffage).

Pour le tracé et les applications numériques, on prendra $\Delta T_3 = 600$ K, ce qui est réaliste pour un disque de turbine en titane.

Le comportement du matériau reste élastique lors du refroidissement tant que :

$$\sigma - X < \sigma_0 \quad (8)$$

Au retour à la température ambiante, la contrainte est donnée par

$$0 = \sigma/E + \varepsilon^p$$

En utilisant l'expression (7) trouvée pour la déformation plastique, on obtient la condition

$$\Delta T_2 < \frac{2\sigma_0}{E\alpha}$$

La valeur numérique est $\Delta T_2^{max} = 182$ K.

Pour un chauffage $\Delta T_3 > \Delta T_2^{max}$, la plasticité reprend lors du refroidissement. Au retour à la température ambiante, la condition de charge plastique implique que

$$\sigma = \sigma_0 + X$$

à combiner avec

$$\sigma/E + \varepsilon^p = 0$$

d'autre part. On obtient donc la déformation résiduelle au refroidissement et l'état de contrainte qui s'avère, bien logiquement, être de traction :

$$\varepsilon^p = -\frac{\sigma_0}{E + H}, \quad \sigma = \frac{E\sigma_0}{E + H} \quad (9)$$

Ces valeurs s'avèrent être indépendantes de l'écart de température imposé ΔT_3 pourvu que cet écart soit plus grand que ΔT_2^{max} . On trouve :

$$\varepsilon^p = -0.0833\%, \quad \sigma = 91.66 \text{ MPa}$$

Pour tracer le cycle il faut calculer la contrainte et la déformation maximales atteintes, grâce à l'expression (7) en utilisant ΔT_3 . On trouve

$$\varepsilon^p = -0.00375, \quad \sigma^{max} = -138 \text{ MPa}$$

Le cycle complet est représenté sur la figure 1.

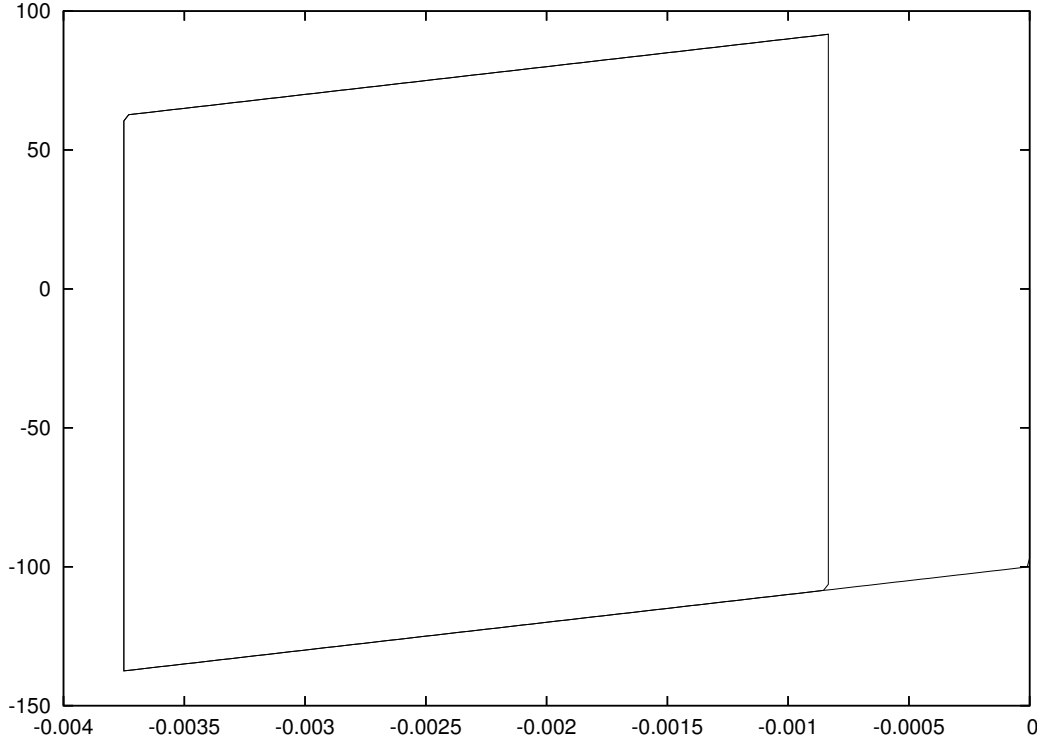


FIG. 1 – Cycle de chauffage sur une barre en titane coincée à ces extrémités. La contrainte σ en MPa est représentée en fonction de la déformation plastique ε_p .

2 Contraintes résiduelles dans les composites à matrice métallique

Les composites SiC–Titane sont élaborés à chaud et le polycristal de titane se solidifie autour des particules de SiC. Lors du refroidissement, la contraction thermique est moindre dans les particules que dans la matrice ce qui engendre des contraintes autour des particules. On considère comme état initial, l'état atteint par le matériau vers $T_0 = 600^\circ\text{C}$. On suppose que cet état est naturel, i.e. sans contraintes en raison de la relaxation totale qui a lieu aux températures supérieures : $\underline{\varepsilon} = \underline{\sigma} = 0$. Le matériau est alors refroidi jusqu'à la température ambiante $T_1 = 20^\circ\text{C}$.

La géométrie du composite est simplifiée de la manière suivante : une boule de titane, de rayon r_1 , contenant une boule de SiC concentrique, de rayon r_0 , comme sur la figure 2. Soit f_v la fraction volumique de SiC dans la composite. Exprimer f_v en fonction de r_0 et r_1 .

Pour simplifier, la particule est supposée rigide. Seule la matrice peut se déformer avec un comportement thermoélastoplastique, supposé indépendant de la température entre 600°C et l'ambiante, ce qui représente aussi une

simplification notable. Les coefficients de Lamé de la matrice sont notés λ, μ et α est le coefficient de dilatation de la matrice (celui de la particule étant supposé nul). La matrice possède une limite d'élasticité σ_0 elle—aussi prise indépendante de la température. L'écroutissement de la matrice est ici négligé.

On adopte un système de coordonnées sphériques de base $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$ comme sur la figure 2.

La fraction volumique de particules pour le motif de boules concentriques retenu est lié au rapport des volumes des boules :

$$f_v = \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^3 \quad (10)$$

2.1 Réponse élastique du matériau

On abaisse la température depuis l'état initial T_0 , d'une quantité $\Delta T = T - T_0 < 0$ supposée ici suffisamment faible pour que la limite d'élasticité ne soit pas franchie au cours de ce refroidissement. Trouver le champ de déplacements et les contraintes associés à ce refroidissement en fonction de ΔT et des caractéristiques thermoélastiques du matériau. On introduira aussi le module de compressibilité κ du matériau :

$$3\kappa = 3\lambda + 2\mu \quad (11)$$

Indications (au cas où) : On rappelle que la déformation totale se décompose en une partie élastique et une partie thermique :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} \quad (12)$$

La déformation élastique est reliée à la contrainte par la loi de Hooke isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{trace } \underline{\underline{\epsilon}}^e) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}^e \quad (13)$$

où $\underline{\underline{1}}$ désigne la matrice identité. La déformation thermique est isotrope de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{th}} = \alpha \underline{\underline{1}} \quad (14)$$

Etant données les symétries du problème, le seul déplacement possible est radial, de la forme :

$$\underline{\underline{u}} = u(r) \underline{e}_r \quad (15)$$

La déformation totale prend la forme :

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u' = du/dr & 0 & 0 \\ 0 & u/r & 0 \\ 0 & 0 & u/r \end{bmatrix} \quad (16)$$

Justifier au passage que les contraintes prennent la forme :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Pour trouver finalement l'équation différentielle régissant le déplacement u , vous aurez besoin de l'équation d'équilibre local $\text{div } \underline{\sigma} = 0$ en coordonnées sphériques. En fait, une seule composante est utile, à savoir :

$$\sigma'_{rr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (18)$$

en prenant déjà en compte la forme (17) des contraintes.

La loi de Hooke s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\text{th}}))\underline{1} + 2\mu(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\text{th}}) \quad (19)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda(u' + \frac{2u}{r} - 3\alpha\Delta T) + 2\mu(u' - \alpha\Delta T) \\ &= (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda\frac{u}{r} - 3\kappa\alpha\Delta T \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda(u' + \frac{2u}{r} - 3\alpha\Delta T) + 2\mu(\frac{u}{r} - \alpha\Delta T) \quad (21)$$

Par suite, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sigma'_{rr} - \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = (\lambda + 2\mu)(u'' + 2\left(\frac{u}{r}\right)') = 0$$

d'où l'équation différentielle

$$u' + 2\frac{u}{r} = Cste$$

dont les solutions sont de la forme

$$u(r) = \frac{a}{r^2} + br \quad (22)$$

où a et b sont deux constantes à déterminer. Les deux conditions aux limites à prendre en compte sont :

- La particule étant rigide, on peut adopter $u(r = r_0) = 0$, ce qui fournit

$$a = -br_0^3$$

- Le composite est libre d'effort extérieur de sorte que $\sigma_{rr}(r = r_1) = 0$, ce qui donne

$$\sigma_{rr}(r = r_1) = 3\kappa(b - \alpha\Delta T) + 4\mu b \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3 = 0$$

et finalement

$$b = \frac{3\kappa\alpha\Delta T}{3\kappa + 4\mu(r_0/r_1)^3} \quad (23)$$

$$a = -\frac{3\kappa\alpha\Delta Tr_0^3}{3\kappa + 4\mu(r_0/r_1)^3} \quad (24)$$

Remarquer que b est du signe de ΔT et a du signe opposé.

2.2 Critère de plasticité

Lorsque la matrice a pour limite d'élasticité σ_0 , déterminer pour quel refroidissement ΔT la plasticité apparaît dans la matrice et à quel endroit. On prendra successivement le critère de Tresca et de von Mises pour décrire la limite d'élasticité en multiaxial.

On donnera l'application numérique pour une fraction volumique de particules $f_v = 1.8\%$ et pour $f_v = 15\%$.

Le critère de Tresca fait intervenir la différence $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$. Le critère de von Mises fait appel au second invariant qui vaut ici :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| \quad (25)$$

Les deux critères portent donc sur la même quantité critique $|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|$ et n'ont pas besoin d'être distingués ici. Cette différence de contraintes s'évalue par exemple à partir de l'équation d'équilibre (18) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{r}{2}\sigma'_{rr} = \frac{r}{2}((\lambda + 2\mu)u'' + 2\lambda(u/r)') \\ &= \frac{6\mu}{r^3}a \end{aligned} \quad (26)$$

Cette différence est donc positive pour $\Delta T < 0$.

La limite d'élasticité est donc atteinte lorsque

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_0$$

ce qui se produit pour la première fois là où cette différence est la plus grande, à savoir en $r = r_0$.

L'écart de température critique est alors :

$$\Delta T = -\frac{\sigma_0}{6\alpha\mu} \frac{3\kappa + 4\mu(r_0/r_1)^3}{3\kappa} \quad (27)$$

L'application numérique donne $\Delta T \simeq -40$ K pour $f_v = 1.8\%$, et $\Delta T \simeq -43$ K pour $f_v = 15\%$. La plasticité commence donc très tôt lors du refroidissement.

2.3 Evolution du front de plasticité au cours du refroidissement

Lorsque le refroidissement se poursuit au-delà de la limite détectée précédemment, la plasticité gagne une zone de plus en plus grande de la matrice. Il existe un front de plasticité caractérisé par le rayon $r = c$, en-deçà duquel l'écoulement plastique se poursuit, et au-delà duquel le comportement de la matrice reste élastique.

Calculer le champ de contraintes dans la zone plastique.

Calculer le champ de déplacement et le champ de contraintes dans la zone élastique.

Donner la forme du champ de déplacement dans la zone plastique. Donner enfin les équations permettant de déterminer les constantes d'intégration pour le champ de déplacement et la position c du front à chaque étape du refroidissement.

Dans la zone plastique $r_0 \leq r \leq c$, la différence des contraintes $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ est toujours égale à σ_0 . Lorsque ce résultat est introduit dans l'équation d'équilibre (18), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\sigma'_{rr} - 2\frac{\sigma_0}{r} = 0 \quad (28)$$

ce qui fournit la forme des contraintes :

$$\sigma_{rr} = 2\sigma_0(\log \frac{r}{c} + d) \quad (29)$$

où c est la position du front et d une constante à déterminer.

Dans la zone élastique $c \leq r \leq r_1$, le déplacement est toujours de la forme (22). De même, l'équation (26) y est encore valable, qui donne l'expression de la différence des contraintes dans le domaine élastique. A la frontière $r = c$, cette différence prend la valeur σ_0 :

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}(r = c) = 6\mu \frac{a}{c^3} = \sigma_0$$

ce qui fournit a . D'autre part, la contrainte radiale doit s'annuler en $r = r_1$:

$$\sigma_{rr}(r = r_1) = 3\kappa(b - \alpha\Delta T) - 4\mu\frac{a}{r_1^3} = 0$$

ce qui donne b :

$$a = \frac{\sigma_0}{6\mu}c^3 \quad (30)$$

$$b = \alpha\Delta T + \frac{2\sigma_0}{9\kappa} \left(\frac{c}{r_1} \right)^3 \quad (31)$$

La contrainte σ_{rr} dans la zone élastique vaut :

$$\sigma_{rr} = 3\kappa(b - \alpha\Delta T) - 4\mu\frac{a}{r^3} \quad (32)$$

Cette expression doit coïncider avec (29) en $r = c$ ce qui permet de trouver la constante d et donc le champ de contraintes au complet :

$$2\sigma_0d = 3\kappa(b - \alpha\Delta T) - 4\mu\frac{a}{c^3}$$

Pour accéder à l'équation donnant la position du front c , il faut aller plus loin et déterminer le déplacement dans la zone plastique. Pour cela, on utilise le fait que la plasticité ne concerne que la partie déviatorique des contraintes et déformations. Les traces des déformations et contraintes sont reliées par la loi de Hooke :

$$\text{trace } \boldsymbol{\sigma} = 3\kappa \text{trace } (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}) = 3\kappa \text{trace } \boldsymbol{\varepsilon} - 9\kappa\alpha\Delta T$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$3\sigma_{rr} + 2\sigma_0 = 3\kappa(u' + \frac{2u}{r}) - 9\kappa\alpha\Delta T$$

i.e.

$$3\kappa(u' + \frac{2u}{r}) = 9\kappa\alpha\Delta T + 2\sigma_0(1 + 3d) + 6\sigma_0 \log \frac{r}{c}$$

La solution est de la forme :

$$u(r) = r(A \log \frac{r}{c} + B) + \frac{C}{r^2}$$

La constante A est donnée par

$$A = \frac{2\sigma_0}{3\kappa} \quad (33)$$

Les constantes A , B et d sont liées par

$$A + 3B = 3\alpha\Delta T + \frac{2\sigma_0}{3\kappa}(1 + 3d) \quad (34)$$

Il reste encore deux équations à trouver pour clore le système. L'une d'elles est

$$u(r = r_0) = 0$$

L'autre est la condition de continuité du déplacement à l'interface entre la zone élastique et la zone plastique :

$$\frac{C}{c^2} + Bc = \frac{a}{c^2} + bc \quad (35)$$

2.4 Etat limite

Déterminer l'écart de température pour lequel la totalité de la matrice devient plastique. Dans ce cas limite, les équations de la question précédente se simplifient et on aboutit à une expression simple de l'écart de température limite.

Donner la valeur numérique pour $f_v = 1.8\%$ et $f_v = 15\%$.

L'état limite est atteint lorsque $c = r_1$. Dans ce cas, la contrainte σ_{rr} donnée par (29) doit être nulle en $r = r_1$, de sorte que $d = 0$. Dès lors, les constantes A et B définies par (33) et (34) deviennent :

$$A = \frac{2\sigma_0}{2\kappa}, \quad B = \alpha\Delta T$$

Quant à C , elle est à la limite toujours donnée par (35) :

$$C = a + (b - B)r_1^3 = \left(\frac{\sigma_0}{6\mu} + \frac{2\sigma_0}{9\kappa}\right)r_1^3$$

Il reste une seule équation à exploiter indiquant que

$$u(r = r_0) = A \log \frac{r_0}{r_1} + B + \frac{C}{r^3} = 0$$

ce qui permet d'exprimer l'écart de température associé à cette plastification complète de la matrice :

$$\alpha\Delta T = \frac{2\sigma_0}{3\kappa} \log \frac{r_1}{r_0} - \sigma_0 \left(\frac{2}{9\kappa} + \frac{1}{6\mu} \right) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^3 \quad (36)$$

Avec $f_v = 1.8\%$ et $f_v = 15\%$, on trouve respectivement $\Delta T = -3421$ K et $\Delta T = -378$ K. Lorsque l'état limite est atteint, la matrice se déforme ensuite à volonté, ce qui signifie la ruine de la structure. L'écroutissage viendrait en réalité limiter cet effet. Il faut bien sûr éviter la plastification complète.

2.5 Direction d'écoulement plastique

Donner, dans la zone plastique, la direction d'écoulement plastique en admettant que la règle de normalité est valide et en adoptant le critère de von Mises. Que constatez-vous ?

Indiquer enfin comment on pourrait calculer l'incrément de déformation plastique en chaque point, en fonction de l'incrément de température $\Delta \dot{T}$.

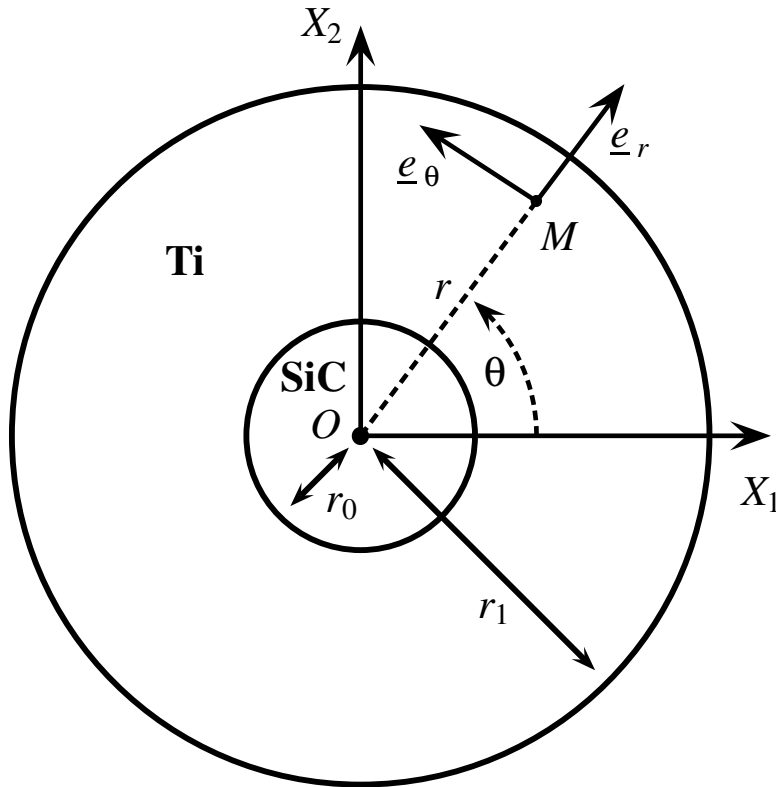


FIG. 2 – Géométrie simplifiée du composite à matrice métallique.