

Effet bilame et mécanique des microsystemes

Les composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents sont très fréquents dans les systèmes électromécaniques ou microélectroniques. La connaissance de leurs propriétés mécaniques est essentielle afin de leur garantir une durée de vie suffisante et d'éviter l'apparition de défauts. Ces composants sont souvent le siège de contraintes d'origine thermique dues à la différence de propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés. On envisage ici le cas élémentaire du bilame constitué de deux couches possédant des coefficients de dilatation distincts. L'objet du problème est de mettre en évidence l'effet bilame de manière quantitative et d'en déduire ensuite quelques conséquences dans le domaine des composants électroniques (microprocesseurs, etc.).

1 Comportement d'un bicouche axisymétrique

On considère un disque, de rayon R , composé de deux couches de matériaux différents. La géométrie du bicouche est décrite sur la figure 1. La couche inférieure constitue le substrat, d'épaisseur h_s . Il est recouvert d'une couche ou film d'épaisseur h_f . L'épaisseur totale du disque est $h = h_s + h_f$. Conformément au système de coordonnées cylindriques indiqué sur la figure 1, l'interface entre les deux matériaux est à la cote $z = h_s$. L'interface est supposée parfaite¹, c'est-à-dire que, dans les conditions de chargement du problème, aucune fissure ne peut se former à l'interface. Aucun glissement relatif n'est possible entre les deux couches. L'ensemble du composant est de géométrie axisymétrique.

Le substrat est constitué d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young E_s , coefficient de Poisson ν_s , coefficient de dilatation thermique α^s). La couche supérieure est constituée d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young E_f , coefficient de Poisson ν_f , coefficient de dilatation thermique α^f). Chaque matériau est supposé dans son état naturel lorsqu'il est à la température de référence T_0 .

L'objectif du problème est de déterminer la forme que prend le bicouche lorsqu'on le porte à la température T , supposée telle que l'on reste dans le contexte infinitésimal. Dans tout le problème, on se place délibérément dans l'hypothèse des petites perturbations.

On adopte la méthode des contraintes et l'on recherche si un champ de contraintes internes de la forme

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^s = \sigma_{rr}^s(z) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^s(z) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h_s \quad (1)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^f = \sigma_{rr}^f(z) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^f(z) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad \text{pour } h_s \leq z \leq h \quad (2)$$

peut s'établir dans le bicouche lorsqu'il est porté à la température T . Seules deux composantes non nulles des contraintes sont donc recherchées, avec en outre une dépendance par rapport à la seule variable z . Les contraintes revêtent la même forme dans le substrat et le film mais sont représentées *a priori* par des fonctions différentes caractérisées par les exposants s et f , respectivement.

Aucun chargement mécanique extérieur n'est appliqué au composant.

¹ Les deux couches métalliques peuvent être soudées, brasées ou colaminées.

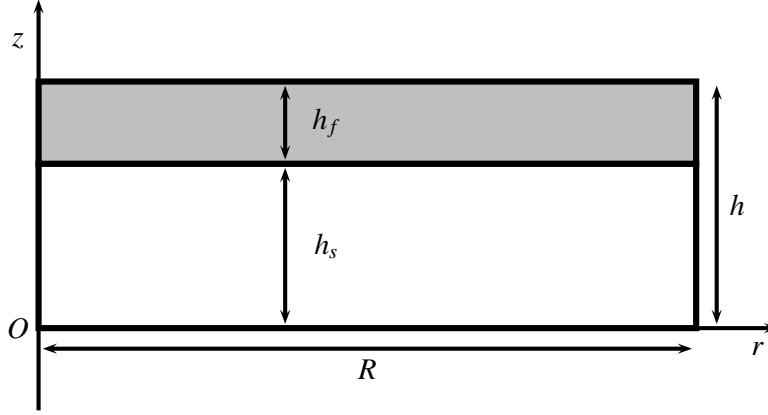


FIG. 1 – Section initiale d'un disque bicouche.

1.1 Etat de contraintes équi-biaxiales

Montrer que, dans ces conditions,

$$\sigma_{rr}(z) = \sigma_{\theta\theta}(z) \quad (3)$$

Justifier par ailleurs que l'on prenne $\sigma_{zz} = 0$.

C'est une conséquence de la première équation d'équilibre local écrite en coordonnées cylindriques pour des composantes fonctions de z uniquement. La troisième équation d'équilibre indique que $\partial\sigma_{zz}/\partial z = 0$. La contrainte σ_{zz} est donc constante dans chaque couche. Elle doit s'annuler en $z = 0, h$ puisque ces surfaces sont libres d'effort.

1.2 Déformations des couches

Calculer indépendamment dans chaque couche les déformations élastiques puis totales en fonction des contraintes introduites précédemment.

La loi d'élasticité isotrope linéarisée fournit, indépendamment dans chaque couche, l'expression des déformations élastiques en fonction des contraintes :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{trace } \underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} \quad (4)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{rr}^e = \varepsilon_{\theta\theta}^e = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{rr}, \quad \varepsilon_{zz}^e = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{rr} \quad (5)$$

Par souci de concision, on n'a pas mis l'exposant s ou f caractéristique de chaque couche mais il y a bien deux jeux d'équations du type précédent. La déformation totale s'obtient en ajoutant la déformation élastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_0)\underline{\underline{1}} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{rr} + \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{rr} + \alpha(T - T_0) \quad (7)$$

1.3 Déplacements

Trouver, indépendamment dans chaque couche, la forme précise du champ de déplacements, à un mouvement de corps rigide infinitésimal près, à savoir les deux composantes :

$$\underline{u} = u_r(r, z)\underline{e}_r + u_z(r, z)\underline{e}_z \quad (8)$$

On ne cherchera pas, pour l'instant, à identifier les constantes qui pourraient apparaître lors du processus d'intégration.

Il est apparu dans la question précédente que $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}$. On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_r}{r} \quad (9)$$

dont la résolution fournit :

$$u_r(r, z) = A(z)r \quad (10)$$

Pour trouver la forme du déplacement axial u_z , on part de la composante de déformation ε_{zz} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= -\frac{2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{rr} - \alpha(T - T_0)) + \alpha(T - T_0) \\ &= -\frac{2\nu}{1-\nu}\varepsilon_{rr} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0) \\ &= -\frac{2\nu}{1-\nu}A(z) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0) \end{aligned} \quad (11)$$

qui s'intègre en

$$u_z = -\frac{2\nu}{1-\nu} \int A(z)dz + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)z + B(r) \quad (12)$$

La composante de cisaillement est nulle de sorte que

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{dA}{dz}r + \frac{dB}{dr} = 0 \quad (13)$$

Cette dernière équation différentielle fournit

$$A(z) = Az + C, \quad B(r) = -\frac{1}{2}Ar^2 + B \quad (14)$$

On aboutit à l'expression suivante des déplacements

$$u_r = (Az + C)r, \quad u_z = -\frac{2\nu}{1-\nu}\left(\frac{A}{2}z + C\right)z + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)z - \frac{A}{2}r^2 + B \quad (15)$$

où les constantes d'intégrations A, B, C restent à déterminer. Il faut remarquer que ces 3 constantes prennent *a priori* des valeurs différentes dans chaque couche. Pour obtenir les déplacements généraux, il faut ajouter une rotation infinitésimale autour de l'axe de symétrie, la translation le long de l'axe de symétrie étant prise en charge par la constante B .

1.4 Contraintes dans chaque couche

Montrer que les contraintes ont la forme suivante :

$$\sigma_{rr}^s = \frac{E_s}{1 - \nu_s}(A^s z + C^s - \alpha_s(T - T_0)), \quad \sigma_{rr}^f = \frac{E_f}{1 - \nu_f}(A^f z + C^f - \alpha_f(T - T_0)) \quad (16)$$

où A^s, A^f, C^s, C^f sont des constantes à déterminer dans la suite. Justifier que, finalement :

$$A^s = A^f, \quad C^s = C^f$$

On notera A et C ces constantes dans la suite. Calculer le saut des contraintes à la traversée de l'interface entre les deux matériaux. Une telle discontinuité est-elle acceptable pour la solution du problème posé ?

On a vu que, dans chaque couche :

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{rr} = \varepsilon_{rr} - \alpha(T - T_0) = Az + C - \alpha(T - T_0) \quad (17)$$

d'où

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1 - \nu}(Az + C - \alpha(T - T_0)) \quad (18)$$

où toutes les constantes et les coefficients matériaux doivent être indexés par le numéro de la couche.

L'interface ne présente pas de fissure si bien que les déplacements doivent y être continus. La continuité de u_r en $z = h_s$ implique que :

$$(A^s h_s + C^s)r = (A^f h_s + C^f)r, \quad \forall r \quad (19)$$

La continuité $u_z^s(r, h_s) = u_z^f(r, h_s), \forall r$ implique que

$$\frac{\partial u_z^s}{\partial r}(r, h_s) = \sigma_{rr}^f(r, h_s) - \sigma_{rr}^s(r, h_s) = \frac{\partial u_z^f}{\partial r}(r, h_s) \implies A_s r = A_f r \quad (20)$$

Les résultats annoncés en découlent : $A^s = A^f = A, C^s = C^f = C$.

La discontinuité des contraintes à l'interface s'écrit :

$$[\![\sigma_{rr}]\!] = [\![\sigma_{\theta\theta}]\!] = \left(\frac{E_f}{1 - \nu_f} - \frac{E_s}{1 - \nu_s}\right)(Az + C) - \left(\frac{E_f}{1 - \nu_f}\alpha_f - \frac{E_s}{1 - \nu_s}\alpha_s\right)(T - T_0) \quad (21)$$

Une discontinuité de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ est tout à fait licite puisque seules les composantes du vecteur-contrainte doivent être continues à la traversée de la surface de normale $\underline{e}_z$, à savoir les composantes $\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zz}$ qui sont nulles dans les deux couches.

1.5 Torseur des efforts résultant

Calculer le torseur des efforts résultant sur la surface située en $r = R$ et d'épaisseur infinitésimale $Rd\theta$, en fonction de A et C et des caractéristiques du bicouche. Etablir alors le système linéaire permettant de déterminer finalement A et C .

La détermination explicite de A et C est repoussée à la partie suivante du problème.

Indiquer enfin dans quelles circonstances la démarche adoptée jusqu'ici conduit effectivement à une solution satisfaisante au problème posé.

On calcule la résultante (linéique) des efforts sur la ligne d'équation $z = R, \theta = 0$:

$$\begin{aligned} R_r &= \int_{z=0}^h \sigma_{rr} dz = \int_0^{h_s} \frac{E_s}{1-\nu_s} (Az + C - \alpha_s(T - T_0)) dz + \int_{h_s}^h \frac{E_f}{1-\nu_f} (Az + C - \alpha_f(T - T_0)) dz \\ &= \frac{E_s}{1-\nu_s} \left(\frac{A}{2} h_s^2 + C h_s - \alpha_s(T - T_0) h_s \right) + \frac{E_f}{1-\nu_f} \left(\frac{A}{2} (h^2 - h_s^2) + C h_f - \alpha_f(T - T_0) h_f \right) \end{aligned} \quad (22)$$

et le moment (linéique) des forces sur cette ligne, dont la seule composante non nulle est le moment par rapport à $\underline{e}_\theta$:

$$\begin{aligned} M_\theta &= \int_{z=0}^h \sigma_{rr} z dz = \int_0^{h_s} \frac{E_s}{1-\nu_s} (Az^2 + Cz - \alpha_s(T - T_0)z) dz + \int_{h_s}^h \frac{E_f}{1-\nu_f} (Az^2 + Cz - \alpha_f(T - T_0)z) dz \\ &= \frac{E_s}{1-\nu_s} \left(\frac{A}{3} h_s^3 + \frac{1}{2} (C - \alpha_s(T - T_0)) h_s^2 \right) + \frac{E_f}{1-\nu_f} \left(\frac{A}{3} (h^3 - h_s^3) + \frac{1}{2} (C - \alpha_f(T - T_0)) (h^2 - h_s^2) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Comme aucun effort extérieur n'est appliqué au composant, ces deux résultantes s'annulent. Cela fournit un système de deux équations d'inconnues A et C :

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} \frac{h_s^2}{2} + \frac{E_f}{1-\nu_f} \frac{h^2 - h_s^2}{2} \right) A + \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} h_s + \frac{E_f}{1-\nu_f} h_f \right) C &= \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} h_s \alpha_s + \frac{E_f}{1-\nu_f} h_f \alpha_f \right) (T - T_0) \quad (24) \\ \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} \frac{h_s^3}{3} + \frac{E_f}{1-\nu_f} \frac{h^3 - h_s^3}{3} \right) A + \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} \frac{h_s^2}{2} + \frac{E_f}{1-\nu_f} \frac{h^2 - h_s^2}{2} \right) C &= \left(\frac{E_s}{1-\nu_s} \frac{h_s^2}{2} \alpha_s + \frac{E_f}{1-\nu_f} \frac{h^2 - h_s^2}{2} \alpha_f \right) (T - T_0) \quad (25) \end{aligned}$$

La démarche proposée a permis de déterminer un champ de contraintes et un champ de déplacements satisfaisant les équations de champs et remplissant les conditions aux limites au moins au sens de Saint-Venant. En effet, la solution en contrainte ne permet pas de garantir que le vecteur-contrainte soit nul sur la surface $r = R$ mais assure la nullité du torseur résultant. Le principe de Saint-Venant indique alors que la solution trouvée est satisfaisante assez loin du bord $r = R$, ce qui est assuré dans presque toute la pièce dans le cas d'un disque aplati tel que

$$\frac{h}{R} \ll 1$$

1.6 Comparaison avec un modèle numérique

Le problème peut aussi être résolu de manière numérique pour des valeurs particulières des caractéristiques du composant, par exemple grâce à la méthode des éléments finis. La déformée et le champ de contraintes obtenus numériquement sont donnés sur la figure 2 dans le cas d'un disque bilame constitué d'une couche d'invar (alliage de fer et de nickel) et d'une couche de fer d'épaisseur identique. Le bilame a été chauffé de 100°C par rapport à la température ambiante, température à laquelle le bilame est un disque parfait sans contraintes internes. Commenter la qualité de la solution trouvée précédemment.

Le champ de contraintes observé semble effectivement indépendant de r , sauf près du bord libre $r = R$. Les profils semblent linéaires dans chaque couche.

La méthode proposée ne permet pas de préciser l'effort de bord visible sur la simulation numérique. On voit que, près du bord, l'invariance des contraintes vis-à-vis de r n'est plus de mise. On montre en fait que les contraintes σ_{zz} et σ_{rz} se développent et présentent une singularité au point où l'interface rencontre le bord (Freund and Suresh, 2003).

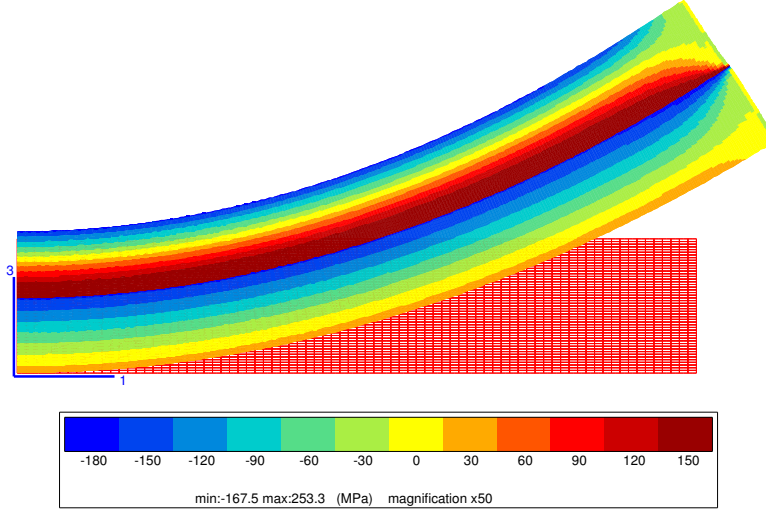


FIG. 2 – Etats initial et déformé (fortement amplifié) de la section d'un bilame constitué d'une couche d'invar (haut) et d'une couche de fer (bas) de même épaisseur. Le champ de contrainte σ_{rr} dans le bilame est donné sous forme d'isovaleurs dont le code de couleur est fourni.

2 Elastoplasticité d'un bilame

La solution établie dans la partie précédente ne dépend plus que de deux paramètres, solutions du système linéaire mis en évidence au paragraphe 1.5 et que l'on donne ici explicitement :

$$A = 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_f - \alpha_s) (T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \Delta^{-1} \quad (26)$$

$$\Delta = 1 + 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + 6 \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4 \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \quad (27)$$

$$C = \left(\alpha_s + (6\alpha_s - 2\alpha_f) \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + (9\alpha_s - 3\alpha_f) \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4\alpha_s \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \alpha_f \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \right) (T - T_0) \Delta^{-1} \quad (28)$$

La notation suivante pour le module d'élasticité biaxiale a été adoptée :

$$M_s := \frac{E_s}{1 - \nu_s}, \quad M_f := \frac{E_f}{1 - \nu_f} \quad (29)$$

Plusieurs applications sont envisagées dans la suite concernant les bilames et les couches minces sur un substrat, configuration fréquente en microélectronique.

2.1 Elasticité d'un bilame d'invar et de fer

On considère, comme au paragraphe 1.6, un disque bicouche constitué d'une couche inférieure en fer et d'une couche supérieure en invar. L'invar est un alliage de fer et de nickel aux propriétés remarquables élaboré par le métallurgiste Guillaume en 1897 (35–38% de nickel en poids, cf. (Béranger et al., 1996)). Il possède le coefficient de dilatation le plus faible parmi les métaux et alliages industriels, près de 20 fois plus faible que le fer et 10 fois plus faible que le nickel purs, à température ambiante. En outre, son coefficient de dilatation varie peu sur une large gamme de

températures (jusqu'à 100 à 200°C selon les compositions). Pour ces raisons, l'invar est utilisé comme matériau de structure des méthaniers géants qui sillonnent les mers avec leur cargaison de gaz cryogénique. Il est aussi utilisé dans les bilames métalliques souvent en association avec le laiton. Pour construire un bilame, on associe généralement un métal avec un faible coefficient de dilatation avec un métal à fort coefficient de dilatation.

On considère ici un bilame de fer et d'invar dont les caractéristiques thermoélastiques sont données dans le tableau 1 et supposées ne pas varier avec la température dans le domaine de température considéré. La géométrie étudiée est telle que $h_s = h_f = h/2$. Comme les résultats en contraintes et déformations ne dépendent pas explicitement des valeurs de h_f et h_s mais seulement du rapport de ces longueurs, on ne donne pas ici l'épaisseur réelle du composant. Le bilame initialement dans son état naturel est soumis à un écart de température $T - T_0 = 100^\circ\text{C}$.

Tracer les profils de déformations ε_{rr} et ε_{zz} , d'une part, et de contrainte σ_{rr} , d'autre part, le long de l'axe de symétrie $r = 0$, en fonction de la cote relative z/h .

Pour expliciter les fonctions en jeu, on tirera profit du fait que dans le cas du fer et de l'invar :

$$\frac{M_f}{M_s} = 1$$

Indiquer enfin l'endroit du bilame où la contrainte est la plus forte.

Dans le cas particulier du couple laiton/invar, on a

$$\Delta = 33, \quad A = \frac{8}{11}(\alpha_f - \alpha_s)\frac{T - T_0}{h_s}, \quad C = \frac{T - T_0}{11}(13\alpha_s - 2\alpha_f)$$

Remarquer que, dans le cas présent, $C > 0$, $A < 0$.

Pour tester la validité du contexte infinitésimal, on calcule le gradient du champ de déplacement déterminé au paragraphe 1.3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= Az + C, & \frac{\partial u_r}{\partial z} &= Ar, & \frac{\partial u_z}{\partial r} &= -Ar \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{2\nu}{1-\nu}(Az + C) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0) \end{aligned}$$

Des conditions suffisantes pour le respect du contexte infinitésimal sont :

$$|\alpha_{s,f}(T - T_0)| \ll 1 \implies |Az| \leq |Ah| \ll 1, |C| \ll 1$$

$$|(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)|\frac{R}{h_s} \ll 1 \implies |Ar| \leq |AR| \ll 1$$

La première condition est remplie dans le cas du bilame laiton/invar étudié. La deuxième condition donne une limite supérieure au rayon du disque bicouche en fonction de son épaisseur. Sur le plan de base du composant, i.e. en $z = 0$, les déplacements valent :

$$u_r = Cr, \quad u_z = -\frac{A}{2}r^2$$

Le déplacement radial est linéaire avec une pente positive tandis que le déplacement axial imprime au plan $z = 0$ une courbure positive A . Suffisamment loin du bord du disque et *a fortiori* sur l'axe $r = 0$, les déformations sont les suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = Az + C, \quad \varepsilon_{zz}^{f,s} = -\frac{2\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}(Az + C) + \frac{1+\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}\alpha_{f,s}(T - T_0)$$

Quant aux contraintes, on trouve :

$$\frac{\sigma_{rr}^f}{2M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11} \left(8 \frac{z}{h_s} - 13 \right), \quad \frac{\sigma_{rr}^s}{M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11} \left(8 \frac{z}{h_s} - 2 \right)$$

Les profils de déplacements, déformations et contraintes dans le bilame laiton/invar considéré sont données sur la figure 3. Remarquer que la base du composant s'allonge radialement et se courbe avec la concavité tournée vers le haut. La déformation ε_{rr} est linéaire sur toute l'épaisseur du composant et continue à l'interface. Au contraire, la composante ε_{zz} et les contraintes présentent une discontinuité au passage de l'interface.

Le profil de contraintes étant linéaire par morceaux, il suffit, pour trouver la contrainte maximale, de calculer la valeur de la contrainte successivement en $z/h_s = 0$; $z/h_s = 1^-$; $z/h_s = 1^+$; $z/h_s = 2$, ce qui donne :

$$\frac{\sigma_{rr}}{M_s(T - T_0)(\alpha_s - \alpha_f)} = \frac{2}{11}; \quad -\frac{6}{11}; \quad \frac{10}{11}; \quad -\frac{6}{11}$$

La contrainte est donc maximale à l'interface du côté de l'invar. Noter la valeur obtenue de 253 MPa calculée à cet endroit, qui risque fort d'outrepasser la limite d'élasticité de l'invar. Il est donc probable que, porté à cette température, le bilame sera le siège de déformations plastiques et qu'une courbure résiduelle plastique persistera après le retour à la température ambiante.

2.2 Limite d'élasticité du bilame

On suppose que le substrat de fer a une limite d'élasticité σ_0 . Il obéit au critère de Tresca et présente un comportement élastoplastique parfait (sans écrouissage).

A quelle température et à quel endroit la plasticité commence-t-elle dans le bilame ?

2.3 Profil de contrainte et de déformation plastique

Donner le profil de contrainte dans le bilame à un instant ultérieur.

Comment calcule-t-on directement la déformation plastique en chaque point ?

2.4 Analyse limite

A quelle température le fer est-il complètement plastifié ?

3 Relaxation d'un bilame viscoélastique

On reprend le bilame fer-invar précédent mais on considère le fer comme étant un matériau viscoélastique. Sa loi de comportement est telle que

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}^e + \underline{\xi}^v \quad (30)$$

avec

$$\dot{\underline{\xi}}^v = \dot{\nu} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad f(\underline{\sigma}) = J_2(\underline{\sigma}) \quad (31)$$

où J_2 est le second invariant des contraintes. Le multiplicateur viscoplastique vaut :

$$\dot{\nu} = \frac{J_2(\underline{\sigma})}{\eta} \quad (32)$$

correspondant à une viscosité linéaire η .

Une variation de température quasi-instantanée est imposée au bilame, au cours de laquelle la réponse du matériau est supposée purement élastique. On maintient alors le bilame à cette température. Calculer la relaxation des contraintes dans le bilame. Quel est l'état du bilame au bout d'un temps suffisamment long ?

4 La formule de Stoney

On se place à nouveau dans le cadre de l'élasticité linéaire.

4.1 Cas d'un film mince

Donner l'expression simplifiée de la courbure c que prend le composant quand il est chauffé, dans le cas d'un film mince sur un substrat, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{h_f}{h_s} \ll 1 \quad (33)$$

Pour cela, on développera les expressions (26) à (28) à l'ordre 1.

Indiquer quelle condition supplémentaire sur les caractéristiques du bicouche conduit à l'expression suivante donnant la courbure c qu'adopte le bicouche lorsqu'il est chauffé :

$$c = \frac{6M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \quad (34)$$

C'est la formule dite de Stoney (1909) constamment utilisée dans la recherche/développement en microsystemes et microélectronique (MEMS²) pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe (4.4).

L'expression (15) du déplacement u_z montre une dépendance en r^2 responsable de la courbure que prennent les disques d'équation $z = Cste$. La courbe est donnée par le coefficient de cette dépendance quadratique :

$$c = -A \quad (35)$$

Le développement au premier ordre en h_f/h_s de l'expression (26) conduit à l'état de courbure suivant :

$$c \simeq 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \left(1 + 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s}\right)^{-1} \quad (36)$$

La formule de Stoney est alors obtenue lorsque

$$M_f h_f \ll M_s h_s \quad (37)$$

Cette condition combine les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques des couches.

² Micro-Electro-Mechanical Systems

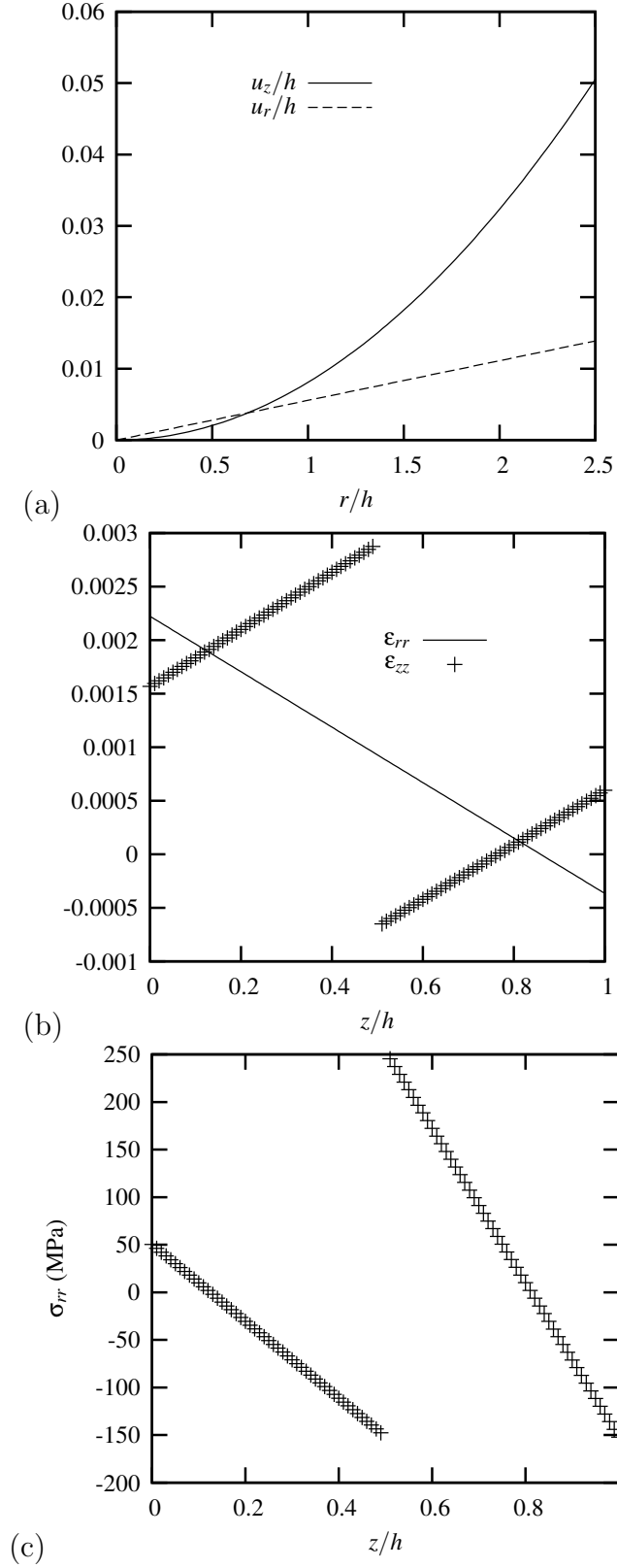


FIG. 3 – Bilame moitié laiton, moitié invar chauffé de 100°C : (a) déplacements de la base du composant $z = 0$, (b) déformations et (c) contraintes le long de l'axe de symétrie $r = 0$.

4.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat

En se plaçant dans les hypothèses de Stoney, i.e. lorsque la condition (33) et la condition supplémentaire requise au paragraphe précédent sont satisfaites, établir la forme simplifiée des contraintes dans le substrat et le film.

Calculer alors les contraintes moyennes dans le film et dans le substrat :

$$\bar{\sigma}_{rr}^f = \frac{1}{h_f} \int_{h_s}^h \sigma_{rr}^f dz, \quad \bar{\sigma}_{rr}^s = \frac{1}{h_s} \int_0^{h_s} \sigma_{rr}^s dz \quad (38)$$

Vérifier que l'équilibre requis de ces contraintes moyennes est satisfait par les expressions trouvées.

Montrer que, dans tout bicouche constitué d'un substrat et d'un film mince, le plan neutre, associé à une contrainte nulle, se situe toujours au tiers de l'épaisseur du substrat, c'est-à-dire en

$$z = \frac{h_s}{3} \quad (39)$$

Les conditions (33) et (37) étant requises, on peut adopter l'expression (34) pour A et la suivante pour C en développant (28) au premier ordre :

$$C \simeq (\alpha_s + (6\alpha_s - 2\alpha_f) \frac{M_f h_f}{M_s h_s}) (1 - 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s}) (T - T_0) \simeq (\alpha_s + 2(\alpha_s - \alpha_f) \frac{M_f h_f}{M_s h_s}) (T - T_0) \quad (40)$$

Les contraintes sont données par les relations (16) dans chaque couche. Avec les développements limités précédents, les contraintes dans le film valent :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^f}{M_f} &= Az + C - \alpha^s (T - T_0) \simeq (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) (1 + 2 \frac{M_f h_f}{M_s h_s} - 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} z) \\ &\simeq (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \end{aligned} \quad (41)$$

Le premier terme, constant, domine dans le film.

Dans le substrat, la contrainte est d'un ordre de grandeur inférieure :

$$\frac{\sigma_{rr}^s}{M_s} = Az + C - \alpha^s (T - T_0) \simeq (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (2 - 6 \frac{z}{h_s}) \quad (42)$$

Les valeurs moyennes s'en déduisent :

$$\bar{\sigma}_{rr}^f = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f \simeq M_f (\alpha_s - \alpha_f) (T - T_0) \quad (43)$$

C'est une relation remarquable puisqu'elle ne dépend que des propriétés thermoélastiques du film et du désaccord de dilatation entre le film et le substrat.

Dans le substrat, on obtient :

$$\frac{\bar{\sigma}_{rr}^s}{M_s} \simeq \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (\alpha_f - \alpha_s) (T - T_0) \quad (44)$$

La résultante en $r = R$ est nulle, comme il se doit :

$$h_s \bar{\sigma}_{rr}^s + h_f \bar{\sigma}_{rr}^f = 0 \quad (45)$$

Au vu des contraintes quasi-constantes régnant dans le film mince, la fibre neutre est à rechercher dans le substrat :

$$\sigma_{rr}^s = 0 \implies z \simeq \frac{1}{A}(\alpha_f - \alpha_s) \frac{M_f}{M_s} \frac{h_f}{h_s} (T - T_0) = \frac{h_s}{3} \quad (46)$$

La fibre neutre est donc située au tiers de la hauteur du substrat, indépendamment des propriétés thermoélastiques du bilame, respectant toutefois les hypothèses de Stoney.

4.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium

Un wafer de silicium est constitué d'un substrat monocristallin de silicium sur lequel les différentes couches métalliques ou autres sont déposées pour fabriquer des composants électroniques. On étudie ici les contraintes qui se développent dans un film d'aluminium d'1 μm d'épaisseur déposé sur un substrat de silicium de 500 μm d'épaisseur. Le dépôt s'effectue à une température de 50°C. A la fin du dépôt, le substrat et le film sont supposés être dans leur état naturel. A cette température, le composant est un disque parfait de rayon égal à 200 mm. Il est ensuite refroidi jusqu'à la température ambiante de 20°C.

Calculer successivement la courbure résiduelle du composant, et les contraintes moyennes dans le film et le substrat. Commenter.

La contrainte trouvée dans le film est relativement proche de la limite d'élasticité de l'aluminium massif. On fait remarquer toutefois que les métaux sous forme de films minces ont en général une limite d'élasticité significativement plus importante qu'à l'état massif.

On traitera le silicium comme un matériau isotrope avec les propriétés indiquées dans le tableau 1, propriétés supposées constantes dans le domaine de température concerné. On y trouvera aussi les autres caractéristiques des matériaux nécessaires au calcul, elles aussi supposées indépendantes de la température.

Les hypothèses de Stoney sont remplies dans le cas du composant considéré :

$$\frac{h_f}{h_s} = 2 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{M_f h_f}{M_s h_s} = 1.1 \cdot 10^{-3} \quad (47)$$

de sorte que les formules établies dans ces conditions peuvent être utilisées. La courbure est donnée par la relation (34) :

$$c = 8.3 \cdot 10^{-3} \text{m}^{-1}, \quad \frac{1}{c} = 120 \text{m} \quad (48)$$

La courbure est positive, ce qui correspond à une interface de concavité tournée vers le haut. Le rayon de courbure de 120 m est infiniment plus grand que la taille du composant. Cette courbure est toutefois tout à fait mesurable, par exemple grâce à des méthodes optiques dont la résolution est typiquement de 15 μm . La mesure de la courbure du composant permet d'accéder grâce aux calculs précédents à une estimation de la contrainte dans le film. La formule (43) donne :

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f = 63 \text{MPa} \quad (49)$$

Il s'agit d'une contrainte de traction. En effet, le coefficient de dilatation de l'aluminium est plus élevé que celui du silicium et l'écart entre la température d'élaboration et la température ambiante est de -30°C . La contrainte moyenne dans le substrat n'est que de -0.13 MPa en raison de sa grande épaisseur. La limite d'élasticité de l'aluminium massif et de ses alliages varie de 50 à 150 MPa . Toutefois, elle est beaucoup plus élevée dans les films minces en raison de leur microstructure spécifique.

4.4 Contraintes d'épitaxie

Les déformations d'origine thermique ne sont pas les seules causes du développement de contraintes au sein d'un revêtement sur un substrat. En microélectronique, les couches déposées sont souvent en épitaxie avec le substrat, c'est-à-dire que les rangées d'atomes du substrat se prolongent exactement en les rangées atomiques de la couche. C'est le cas par exemple des dépôts de silicium-germanium sur un substrat de silicium monocristallin. Toutefois, le paramètre cristallin³ $a_{SiGe} = 0.5476\text{ nm}$ (pour 80% de silicium et 20% de germanium dans le composé binaire) du silicium-germanium est légèrement plus grand que le paramètre du silicium $a_{Si} = 0.5431\text{ nm}$ en raison de l'implantation des atomes de germanium. Pour que les rangées atomiques se prolongent du substrat au film, il faut donc que les plans atomiques du film se rapprochent légèrement. Les contraintes naissent justement de l'écart entre la valeur du paramètre cristallin *in situ* et la valeur d'équilibre sans contrainte (à savoir a_{Si} pour le silicium et a_{SiGe} pour le silicium-germanium). Si le film n'était pas contraint de croître en épitaxie avec le substrat, il se déformerait librement de la quantité :

$$\varepsilon_{rr}^{*f} = \varepsilon_{\theta\theta}^{*f} = \frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \quad (50)$$

par rapport au substrat de silicium. La déformation totale dans le film est donc la somme d'une déformation élastique et de la déformation libre d'épitaxie :

$$\varepsilon_{rr}^f = \varepsilon_{rr}^{ef} + \varepsilon_{rr}^{*f} \quad (51)$$

Le substrat de silicium, quant à lui, est tel que

$$\varepsilon_{rr}^{*s} = 0 \quad (52)$$

En utilisant une analogie avec le problème précédent des contraintes d'origine thermique dans un film mince sur un substrat, calculer les contraintes dans le film et la courbure du composant. Pour le silicium-germanium considéré, on prendra $M_f = 170\text{ GPa}$. Les caractéristiques géométriques du dépôt sont : $h_f = 100\text{ nm}$, $h_s = 1\text{ mm}$.

La déformation libre d'épitaxie s'apparente à la dilatation thermique et on a l'analogie suivante :

$$\frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \equiv \alpha_f(T - T_0), \quad \text{et} \quad 0 \equiv \alpha_s(T - T_0)$$

Ce désaccord paramétrique vaut 0.83%. L'épitaxie entre le film et le substrat oblige le film à accommoder élastiquement complètement la déformation imposée par le substrat. Le contexte

³ Le paramètre cristallin est la plus petite distance inter-réticulaire, c'est-à-dire entre plans atomiques.

matériau	E (GPa)	ν	α ($\times 10^{-6} \text{K}^{-1}$)
aluminium	70	0.33	23
invar	210	0.33	1.2
fer	210	0.33	19
silicium	150	0.17	3

TAB. 1 – Propriétés thermoélastiques à 20°C de quelques matériaux.

est tout à fait semblable au cas du film mince siège de déformations thermiques sur un substrat. Les formules (34) et (43) s'appliquent de la façon suivante :

$$\bar{\sigma}_{rr}^f = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f \simeq M_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -1403 \text{MPa}$$

$$c = \frac{6M_f}{M_s h_s^2} h_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -5.6310^{-3} \text{m}^{-1}$$

ce qui donne un rayon de courbure de -177 m. Noter les contraintes considérables de compression qui règnent dans le film après élaboration, dues à des déformations élastiques proches du %. Il y a en fait si peu de défauts cristallins dans ces couches nanométriques que de telles contraintes peuvent exister sans provoquer de déformation plastique.

Références

- Béranger G., Duffaut F., Morlet J., and Thiers J.F. (1996). *The iron–nickel alloys : A hundred years after the discovery of invar*. SOS Free Stock.
- Freund L.B. and Suresh S. (2003). *Thin Film Materials*. Cambridge University Press.

* * *