

ECOLE DES MINES DE PARIS

MASTERE COMADIS

10 janvier 2002, 9h-10h30

Cours : COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX

COMPORTEMENT MECANIQUE DES MOUSSES DE NICKEL

Les mousses de nickel sont des matériaux métalliques à porosité très élevée. Le vide représente plus de 95% du volume du matériau présenté sur la figure 1. Elles sont utilisées dans les batteries rechargeables des téléphones et ordinateurs portables. Leur résistance mécanique est importante lors du procédé de fabrication des électrodes de la batterie.

L'objectif du problème est de déterminer quelques propriétés mécaniques de la mousse en fonction de celles du matériau de base qu'est le nickel grâce à un modèle très simple de la structure des cellules de la mousse. La partie 3 peut être traitée indépendamment des deux autres. On reste dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations.

1 Comportement élastique de la mousse

1.1 Densité relative

Pour comparer les mousses entre elles, on utilise la notion de densité relative

$$\Phi = \frac{\rho^*}{\rho} \quad (1)$$

où ρ est la densité du nickel en kg.m^{-3} , et ρ^* celle de la mousse elle-même.

Un modèle simplifié de la structure de la mousse consiste à la considérer comme un assemblage quasi-périodique de cellules élémentaires dont une idéalisation est montrée sur la figure 2. En comparant les figures 1 et 2, on convient que le modèle est très simpliste. Toutefois il s'avère capable de décrire correctement la dépendance des propriétés de la mousse en fonction de sa densité relative.

En se basant sur le schéma simplifié 2, justifier que

$$\Phi \propto \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (2)$$

où t est la largeur des brins et l la longueur des brins. Le signe \propto signifie *proportionnel à*.

1.2 Mécanisme de flexion

L'un des mécanismes principaux de la déformation des mousses est la flexion des brins des cellules. Pour simplifier, on va négliger tout autre mécanisme car la flexion est prépondérante. On étudie d'abord la flexion d'une poutre élémentaire comme sur la figure 4. La poutre est de longueur l mais on ne considère par symétrie que la moitié $l/2$. Les axes de coordonnées x_1 et x_2 sont donnés sur la figure et l'origine des coordonnées est le point O . On considère des conditions de contraintes planes.

On applique sur la section de poutre passant par A un moment M . On suppose que la réponse de la poutre est purement élastique. Justifier que le tenseur des contraintes est uniaxial, σ_{11} étant la seule composante non nulle et que le profil de σ_{11} est linéaire dans la section :

$$\sigma_{11} = kx_2 \quad (3)$$

En reliant le moment M aux contraintes locales, déterminer k en fonction de M et du moment d'inertie I de la poutre :

$$I = \frac{t^4}{12} \quad (4)$$

$$k = M/I$$

Calculer ensuite les composantes $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ du tenseur des déformations dans le cas de l'élasticité isotrope (module d'Young du nickel E et coefficient de Poisson ν). En déduire que les déplacements u_1 et u_2 en chaque point de la poutre, ont la forme suivante, en tenant compte des conditions aux limites en O et en A :

$$u_1 = \frac{Mx_1x_2}{EI}, \quad u_2 = -\frac{\nu M}{2EI}x_2^2 + \frac{M}{2EI} \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x_1^2 \right) \quad (5)$$

Calculer enfin la flèche de la poutre définie comme le déplacement vertical du point O

$$\delta = u_2(x_1 = 0, x_2 = 0) \quad (6)$$

$$\delta = \frac{M}{2EI} \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

1.3 Module d'Young de la mousse

Pour relier le comportement de la mousse à celui des brins élémentaires en flexion, on définit la contrainte macroscopique uniaxiale au sein de la mousse par

$$\sigma^* = \frac{F}{l^2} \quad (7)$$

où F est la force transmise aux poutres élémentaires comme sur la figure 3. Le moment vu alors par les brins qui se déforme est proportionnel à Fl :

$$M \propto F \frac{l}{2} \quad (8)$$

On peut alors définir la déformation de la poutre à l'aide de la flèche d'une poutre élémentaire :

$$\varepsilon^* = \frac{2\delta}{l} \quad (9)$$

Définissez le module d'Young de la mousse E^* et justifier qu'il est relié au module d'Young du nickel par une expression de la forme :

$$\frac{E^*}{E} \propto \left(\frac{t}{l}\right)^4 \propto \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \quad (10)$$

Cette relation montre que le module d'Young d'une mousse varie essentiellement avec le carré de sa densité relative.

$$E^* = \sigma^*/\varepsilon^* = F/(2\delta l) = \frac{8EI}{l^4}, \quad \frac{E^*}{E} \propto \frac{2}{3} \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2$$

2 Comportement élastoplastique écrouissable

Le nickel présente un comportement élastoplastique écrouissable qui peut être décrit par un critère f de von Mises et une loi d'écrouissage isotrope linéaire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (11)$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}}) - R = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} - R, \quad R = R_0 + Hp \quad (12)$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (13)$$

2.1 Poutre élastoplastique écrouissable en flexion

On reprend l'analyse de la poutre en flexion simple dans le cas où le matériau est élastoplastique écrouissable suivant les lois de comportement ci-dessus. On rappelle que l'état de contrainte reste purement uniaxial.

2.1.1

Exprimer p en fonction ε_{11}^p pour un chargement uniaxial et monotone. $p = |\varepsilon_{11}^p|$

2.1.2

Pour quel moment appliqué $M = M_e$ la poutre commence-t-elle à se déformer plastiquement? Par où la plasticité commence-t-elle à se développer? $M_e = 2R_0I/t$

2.1.3

Lorsque la charge augmente au-delà de M_e , la plasticité envahit peu à peu la poutre. On distingue alors un cœur élastique $|x_2| \leq a$ et une zone plastique $|x_2| \geq a$ comme sur la figure 5.

Donner le champ de contrainte dans les deux zones en fonction de R_0, a, H, E et x_2 . On supposera pour cela que ε_{11} reste linéaire en x_2 , c'est-à-dire que les sections droites restent droites.

$$\begin{aligned} |x_2| \leq a, \quad \sigma &= \frac{R_0}{E} x_2 \\ |x_2| \geq a, \quad \sigma &= R_0 + Hp, \quad \varepsilon_{11} = \frac{R_0}{Ea} x_2 \\ \sigma &= \frac{R_0}{1 + \frac{H}{E}} \left(1 + \frac{H}{E} \frac{x_2}{a} \right) \end{aligned}$$

2.2 Relation entre M et a

Donner la relation entre le moment appliqué $M > M_e$ et la profondeur de la zone plastique a .

$$M = 2tR_0 \left(-\frac{a^2}{6(1 + H/E)} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{1}{1 + H/E} \left(\frac{1}{2} + \frac{H}{Ea} \frac{t}{6} \right) \right)$$

Montrer que la poutre élastoplastique à écrouissage linéaire est capable d'accommoder n'importe quel moment appliqué. Au contraire, donner la charge limite M_∞ lorsque le matériau est parfaitement plastique ($H = 0$).

$$M_\infty = tR_0 \left(\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{3} \right)$$

Donner une expression approchée de M en fonction de R_0, H, E, a et t lorsque a s'approche de 0.

$$M \simeq \frac{R_0 t^3}{4} \frac{1}{1 + H/E} \left(1 + \frac{H}{E} \frac{t}{3a} \right)$$

2.3 Déformation plastique de la poutre

Donner ε_{11} et ε_{22} dans la zone élastique de la poutre chargée.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{R_0}{E} \frac{x_2}{a} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu R_0}{E} \frac{x_2}{a} \end{aligned}$$

Donner successivement $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}^p, \varepsilon_{22}^p, \varepsilon_{22}$ dans la zone plastique de la poutre sous charge $M > M_e$. On rappelle que la composante ε_{11} est linéaire en x_2 dans toute la section de la poutre. On utilisera le fait que $\varepsilon_{22}^p = -\varepsilon_{11}^p/2$ que l'on justifiera.

$$\varepsilon_{11} = \frac{R_0 x_2}{E a}, \varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{11} - \sigma_{11}/E = \frac{R_0}{E + H} \left(\frac{x_2}{a} - 1 \right)$$

$$\varepsilon_{22}^p = -\frac{\varepsilon_{11}^p}{2}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} + \varepsilon_{22}^p = -\frac{\nu R_0}{E} - \frac{R_0}{E + H} \left(\frac{x_2}{a} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu H}{E} \right)$$

2.4 Flèche résiduelle de la poutre à la décharge

On appelle flèche le déplacement du point O dans la direction 2 :

$\delta = u_2(x_1 = 0, x_2 = 0)$. On rappelle les conditions aux limites considérées ici :

$$u_2(x_1 = l/2, x_2 = 0) = u_1(x_1 = l/2, x_2 = 0) = 0 \quad (14)$$

Exprimer les composantes u_1 et u_2 dans la zone élastique de la poutre en s'inspirant des résultats trouvés au paragraphe 1.2.

Calculer alors δ pour $M > M_e$ imposé, en fonction de R_0, E, a et l .

Il suffit d'utiliser le champ dans la zone élastique :

$$u_1 = \frac{R_0 x_1 x_2}{E a}$$

$$u_2 = -\frac{\nu R_0 x_2^2}{2E a} + \frac{R_0}{2Ea} \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x_1^2 \right)$$

On s'intéresse à la flèche résiduelle lorsque la charge M est relâchée. En raison de la déformation plastique de la poutre lors de la charge, il subsiste une flèche δ^p à la décharge, liée à la courbure plastique de la poutre. Pour déterminer δ^p , on suppose que la décharge est élastique, hypothèse qui doit être vérifiée *a posteriori*. On utilise alors le principe de superposition en disant que le champ de déplacement u_2 final à la décharge est égal à la somme du déplacement obtenu en charge maximale M et du déplacement dû à la réponse élastique de la poutre à l'application du moment $-M$:

$$u_2^{final}(x_1, x_2) = u_2^{charge}(x_1, x_2) + u_2^{decharge}(x_1, x_2) \quad (15)$$

La composante u_2^{charge} a été calculée ci-dessus, et $u_2^{decharge}$ se déduit du résultat du paragraphe 1.2. Il s'ensuit :

$$\delta^p = u_2^{final}(x_1 = 0, x_2 = 0) \quad (16)$$

Exprimer δ^p en fonction de R_0, a, M, E, l et du moment d'inertie I .

$$u_2^{final} = \frac{R_0}{2Ea} \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 - x_1^2 \right) - \frac{\nu R_0}{2Ea} x_2^2 + \frac{\nu M}{2EI} x_2^2 + \frac{M}{2EI} \left(x_1^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)$$

$$\delta^p = \left(\frac{R_0}{2Ea} - \frac{M}{2EI} \right) \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

Exprimer ensuite δ^p en fonction de R_0, M, E, I, l, H en éliminant a de l'équation précédente dans le cas particulier où a est proche de 0 (utiliser le résultat du paragraphe 2.2).

$$\text{on utilise } M = \frac{t^3 R_0}{4} \frac{1}{1 + H/E} \left(1 + \frac{H}{E} \frac{t}{3a} \right)$$

$$\frac{\delta^p}{(l/2)^2} = \frac{M}{2HI} - \frac{3R_0}{2Ht}$$

2.5 Comportement élastoplastique uniaxial de la mousse

Soit $\varepsilon^*, \varepsilon^{*e}$ et ε^{*p} les déformations uniaxiales macroscopiques de la mousse métallique. La partie plastique peut être définie à l'aide de la flèche résiduelle δ^p d'une poutre élémentaire de la cellule de la figure 3

$$\varepsilon^{*p} \propto \frac{2\delta^p}{l} \quad (17)$$

De même la contrainte macroscopique vaut

$$\sigma^* \propto \frac{F}{l^2} \quad (18)$$

F étant la force appliquée ($M \propto Fl/2$). En développant ce modèle micromécanique simplifié de la mousse, basé sur la flexion des poutres, montrer que l'on peut définir une limite d'élasticité R_0^* et un module plastique H^* de la mousse, tels que

$$\frac{R_0^*}{R_0} \propto \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

$$\frac{H^*}{H} \propto \frac{2}{3} \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{F}{l^2} = \frac{2M}{l^3} = \frac{4HI}{l^3} \left(\frac{\delta^p}{(l/2)^2} + \frac{3R_0}{2Ht} \right)$$

$$R_0^*/R_0 = 6Il/l^4 t = \frac{1}{2} (t/l)^3, \quad H^*/H = 2I/l^4 = \frac{1}{6} (t/l)^4$$

3 Fluage des mousses métalliques

A haute température, le comportement du nickel devient viscoplastique. Il peut être décrit de manière simplifiée par la loi de Norton de la forme :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\rho} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f = J_2(\sigma) \quad (21)$$

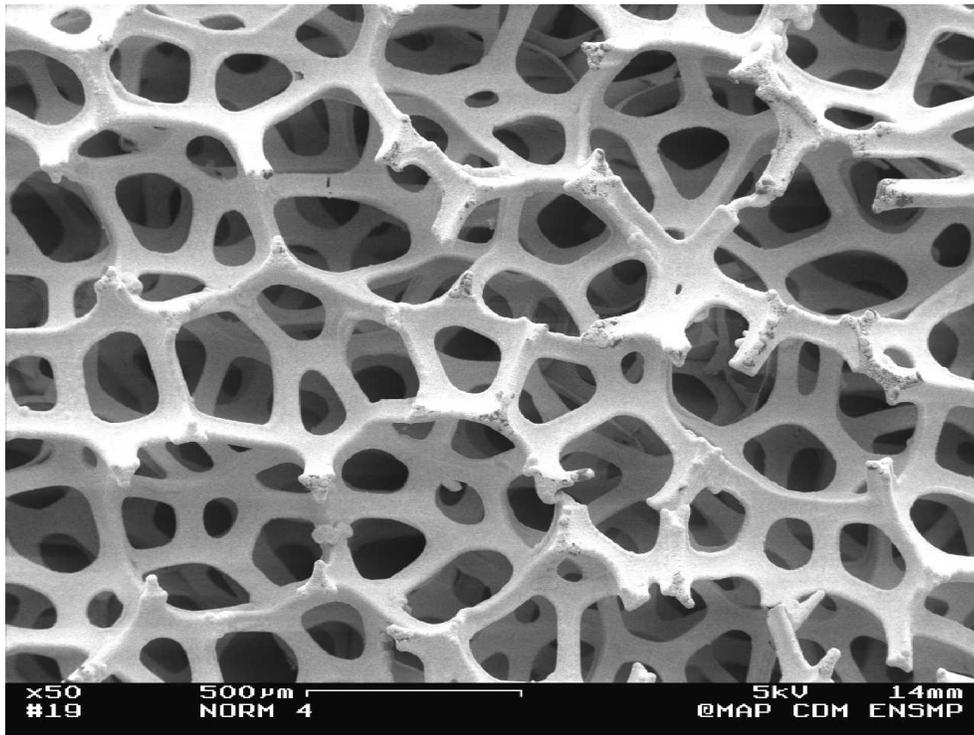


Figure 1: Microstructure d'une mousse de nickel vue au microscope électronique à balayage

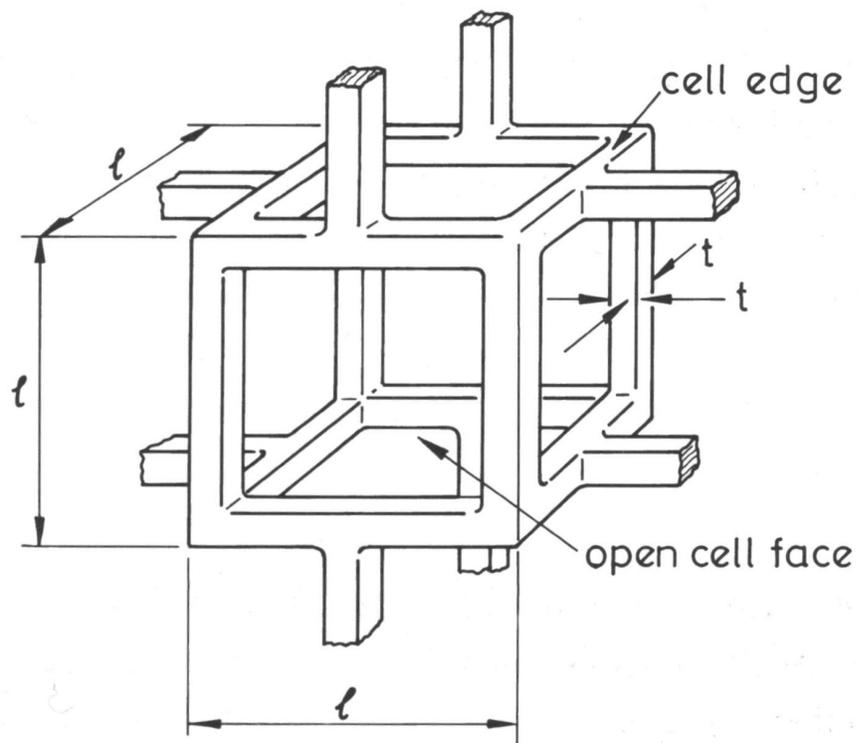


Figure 2: Modèle simplifié de cellule élémentaire de mousse montrant les caractéristiques géométriques l et t .

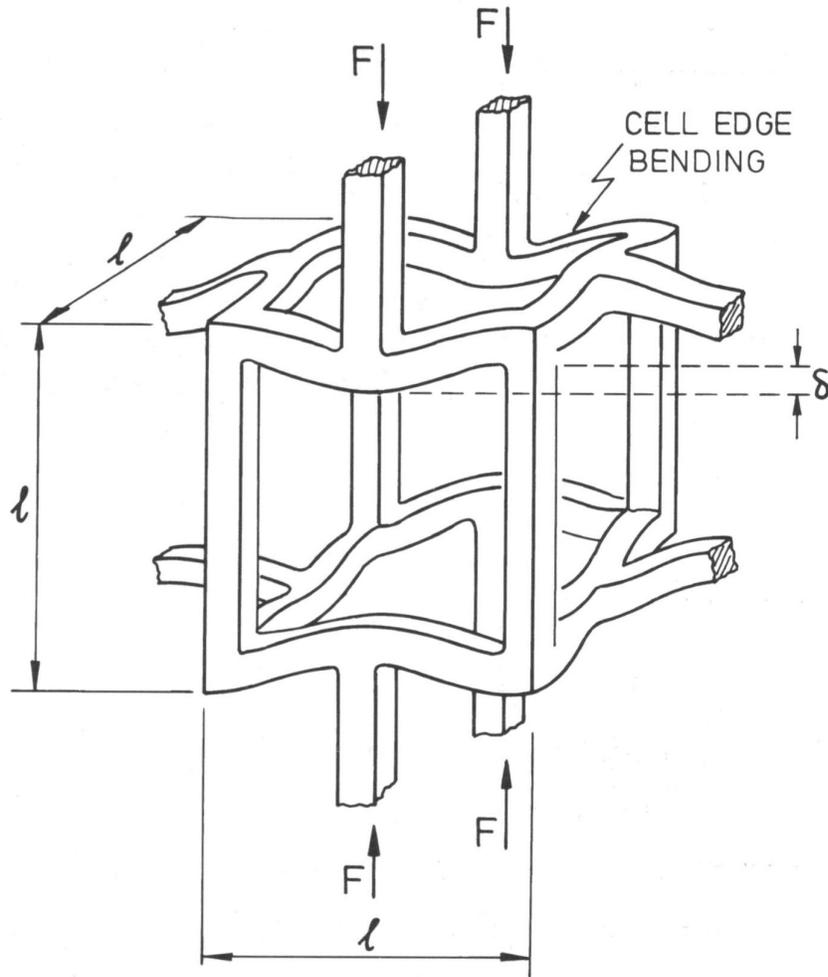


Figure 3: Déformation de la cellule élémentaire lors de l'application d'une charge uniaxiale F .

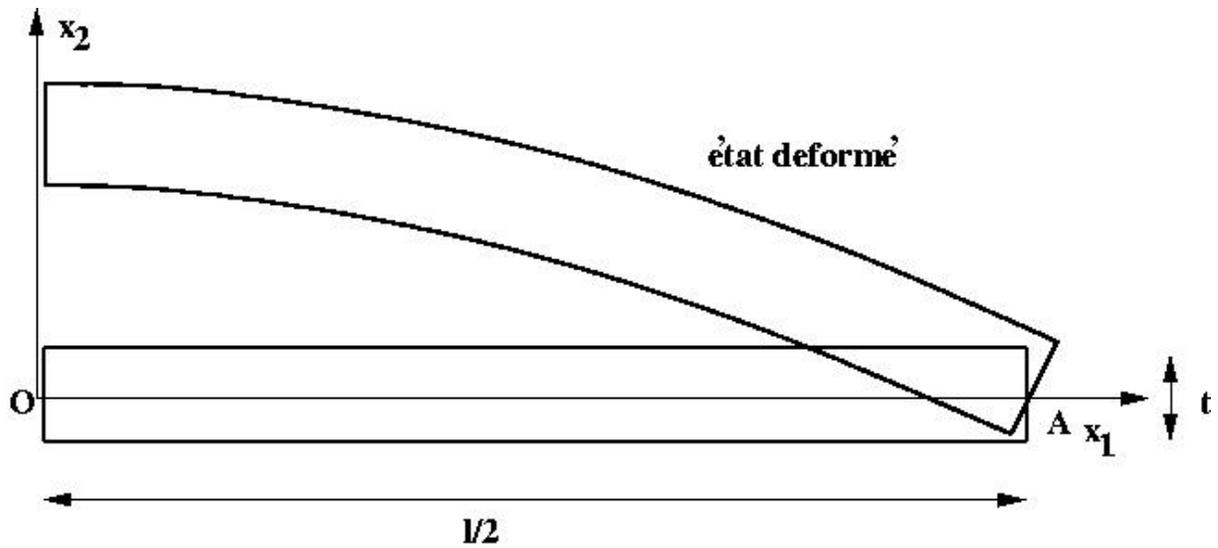


Figure 4: Flexion simple d'une poutre de longueur $l/2$, de section carrée de côté t . On suppose que le point A est fixe mais libre de tourner. Le plan (O, x_2) est un plan de symétrie.

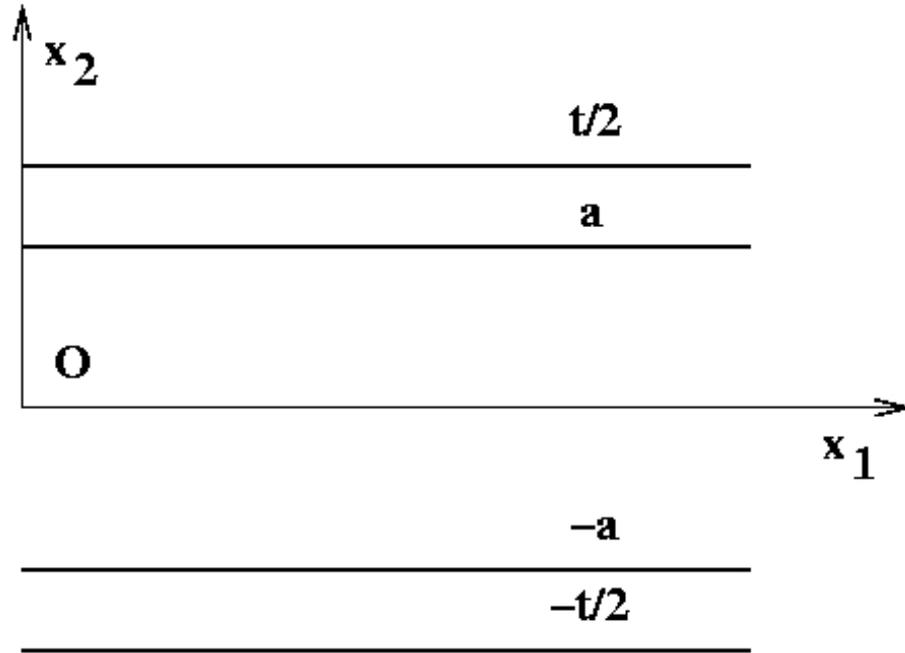


Figure 5: Flexion simple d'une poutre élastoplastique : cœur élastique pour $x_2 \in [-a; a]$, et zone plastique pour $|x_2| > a$.

$$\dot{p} = \left(\frac{J_2(\underline{\sigma})}{K} \right)^n \quad (22)$$

On voit qu'on n'a pas introduit de seuil et que l'élasticité est négligée pour simplifier.

3.1 Comportement uniaxial d'un brin

Donner l'évolution de $\dot{\epsilon}_{11}$ en fonction de σ_{11} pour une chargement uniaxial dans la direction 1.

$$\dot{\epsilon}_{11} = \left(\frac{|\sigma_{11}|}{K} \right)^n \text{signe}\sigma_{11}$$

3.2 Poutre viscoplastique

On reprend l'étude du comportement de la poutre en flexion simple abordé aux paragraphes 1 et 2, dans le cas d'une réponse purement viscoplastique de la poutre. Pour de faibles déformations, la section de la poutre reste plane. La vitesse de déformation prend donc la forme

$$\dot{\epsilon}_{11}(x_1, x_2) = \dot{\alpha}x_2 \quad (23)$$

Relier $\dot{\alpha}$ au moment appliqué

$$M = 2t \int_0^{t/2} \sigma_{11}x_2 dx_2 \quad (24)$$

Calculer aussi $\dot{\varepsilon}_{22}$.

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{M}{tK} \frac{2n+1}{2n} \right)^n \left(\frac{2}{t} \right)^{2n+1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = -\dot{\varepsilon}_{11}/2$$

En déduire les vitesses $\dot{u}_1(x_1, x_2)$ et $\dot{u}_2(x_1, x_2)$, puis la flèche $\dot{\delta} = \dot{u}_2(x_1 = 0, x_2 = 0)$. Les conditions aux limites sont les mêmes qu'au paragraphe 1.2.

$$\dot{u}_2 = -\frac{\dot{\alpha}}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)$$

$$\dot{\delta} = \dot{u}_2(x_1 = x_2 = 0) = \frac{\dot{\alpha}}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{t} \right)^{2n+1} \left(\frac{M}{tK} \frac{2n+1}{2n} \right)^n$$

3.3 Loi de comportement viscoplastique de la mousse

En supposant que la flexion des brins est le mécanisme principal de déformation de la mousse viscoplastique, montrer que la loi de fluage de la mousse prend la forme :

$$\dot{\varepsilon} \propto \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{K} \frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right)^{\frac{3n+1}{2}} \quad (25)$$

Vérifier qu'il s'agit aussi d'une loi de Norton de coefficients n^* et K^* que vous exprimerez en fonction des coefficients n et K du nickel.

$$n/n^* = 1, \quad K^*/K = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^{\frac{3n+1}{2n}}$$