



Figure 1: Aube de turbine monocristalline multiperforée (source SNECMA). La hauteur de la pièce est de 12 cm. Les trous sont destinés à laisser circuler un flux d'air froid pour refroidir l'aube qui reçoit le flux des gaz de combustion.

ECOLE DES MINES DE PARIS

MASTERE COMADIS

7 janvier 2004, 9h-12h

Cours : LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES

**COMPORTEMENT MECANIQUE D'UNE AUBE DE TURBINE
MONOCRISTALLINE**

Les parties 2 , 3, 4 et 5 sont indépendantes, mais une bonne compréhension de la partie 2 est utile.

1 Introduction

1.1 Aubes de turbines et monocristaux

Les aubes de turbines de la partie chaude des moteurs d'avion, c'est-à-dire situées directement en sortie de la chambre de combustion, sont soumises à de sévères sollicitations thermo-mécaniques. La rotation du disque de turbine est à l'origine d'une force centrifuge qui engendrent des contraintes

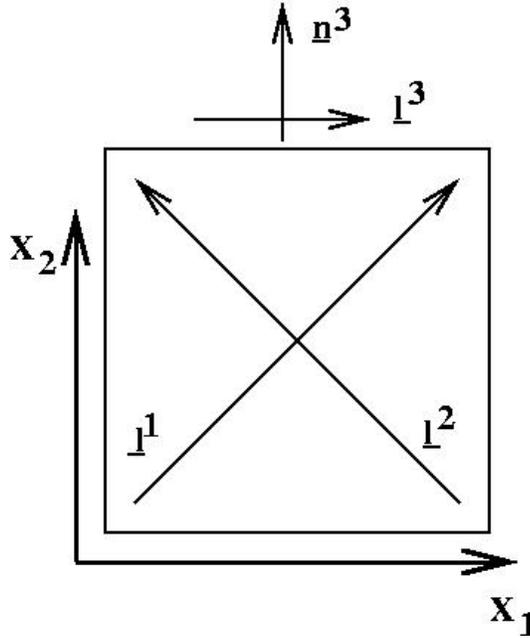


Figure 2: Monocristal plan représenté par un carré avec les directions $\underline{l}_1, \underline{l}_2$ et le vecteur normal \underline{n}_3 caractérisant les systèmes de glissement. Le repère cartésien de travail est désigné par les axes X_1 et X_2 .

radiales importantes dans l’aube. Les températures subies par l’aube peuvent atteindre 1000°C localement. A cette température le matériau est viscoplastique. La force centrifuge induit donc des déformations de type fluage dans la pièce. D’autre part, l’aube est refroidie grâce à un flux d’air plus froid circulant dans un réseau complexe de microcanalisations dans la pièce. Il existe donc un gradient important de température entre l’intérieur et l’extérieur de la paroi de l’aube. En conséquence, l’état de contrainte local devient complexe et fortement multiaxial. Chaque vol ou mission de l’avion constitue un cycle de vie, de charge et de décharge conduisant donc à des sollicitations de type fatigue.

Les alliages métalliques les mieux adaptés pour faire face à de telles conditions sont les superalliages à base de nickel, dont les éléments principaux sont le nickel et l’aluminium. Pour l’application aube de turbine, la structure monocristalline s’est avérée la mieux adaptée pour résister au fluage. L’aube présentée sur la figure 1 est un monocristal (i.e. un grain unique) cubique à faces centrées. Les atomes sont donc arrangés selon un réseau cristallin cubique. La déformation plastique est due au glissement de plans particuliers les uns par rapport aux autres, dans des directions spécifiques. Il en résulte un comportement très anisotrope qu’il est important de caractériser et de modéliser afin de dimensionner correctement cette pièce-clé du moteur.

L’objectif du problème est d’étudier la réponse élastoplastique d’un monocristal simplifié (monocristal plan) à diverses sollicitations représentatives de ce que voit une aube de turbine. On analysera successivement la traction, le cisaillement, les chargements multiaxiaux, la fatigue, le fluage et enfin la rupture.

1.2 Définition du monocristal plan et notations

Les vecteurs sont soulignés et les tenseurs d’ordre 2 ont un tilde \sim en dessous.

On distingue deux repères : le repère de travail (X_1, X_2) associé à la pièce étudiée et un repère dit cristallographique attaché à deux directions orthogonales particulières 1 et 2 du monocristal. Sur la figure 2, le monocristal plan est représenté par un carré sur lequel on a tracé quelques directions

privilégées. On suppose dans la suite que les directions 1 et 2 du monocristal coïncident respectivement avec les directions X_1 et X_2 . En conséquence toutes les composantes de vecteurs et de tenseurs seront données dans ce repère commun.

Un système de glissement est caractérisé par la donnée d'un plan de glissement de normale \underline{n} et d'une direction de glissement \underline{l} . Dans le cas du monocristal plan, on tiendra compte des 3 systèmes de glissement suivants :

$$\underline{n}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{l}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{n}^2 = \underline{l}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{l}^2 = \underline{n}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{n}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{l}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

On définit ensuite la notion de *cission résolue* τ^s sur le système s , comme la contrainte s'appliquant sur le plan de glissement dans la direction de glissement :

$$\tau^s = \underline{l}^s \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}^s) = \underline{l}^s \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}^s = l_i^s \sigma_{ij} n_j^s \quad (4)$$

Le tenseur des contraintes est noté $\underline{\sigma}$. On fait la convention de sommation sur les indices répétés.

Pour être bien sûr que cette notion est comprise, voici le calcul de τ^1 pour un état de contrainte particulier :

$$\tau^1 = \underline{l}^1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2\sigma & 0 \\ 2\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{n}^1 = \frac{\sigma}{2} \quad (5)$$

On utilisera aussi la notion de produit tensoriel \otimes . Le produit tensoriel de deux vecteurs \underline{a} et \underline{b} est le tenseur d'ordre deux dont la matrice associée a pour composantes $a_i b_j$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2 Comportement élastoplastique du monocristal plan

Le critère de plasticité permettant de dire si un système de glissement s s'active ou non est appelée *loi de Schmid*. Le système s est dit activé plastiquement si la cission résolue τ^s atteint une valeur critique τ_c^s . La fonction de charge s'écrit donc pour le système s :

$$f^s(\underline{\sigma}) = |\tau^s| - \tau_c^s \quad (7)$$

On suppose que la cission résolue critique initiale est identique pour les 3 systèmes considérés.

2.1 Limite d'élasticité en traction simple

On réalise un essai de traction dans une direction \underline{t} faisant un angle θ avec la direction X_1 :

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donner les composantes du tenseur des contraintes dans le repère (X_1, X_2) .

On pourra utiliser le fait que le tenseur de contrainte de traction dans une direction \underline{t} est défini comme :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{t} \otimes \underline{t} \quad (9)$$

où σ est la contrainte dans la direction de traction.

Montrer alors que la cission résolue sur le système s s'écrit

$$\tau^s = \sigma (\underline{t} \cdot \underline{l}^s) (\underline{t} \cdot \underline{n}^s) \quad (10)$$

Quels sont les systèmes actifs en traction selon l'angle θ ? Calculer alors la limite d'élasticité σ_Y en fonction de θ et de τ_c .

Pour quelle(s) orientation(s) la limite d'élasticité est-elle la plus forte?

2.2 Surface de charge en traction/compression/cisaillement

On soumet le monocristal à l'état de contraintes de traction/cisaillement combinés suivant :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tracer la surface limite du domaine d'élasticité dans le plan $(\sigma_{22}, \sigma_{12})$. Pour cela on tracera la frontière de ce domaine pour chaque système de glissement indépendant. Le domaine d'élasticité du monocristal est alors l'intersection des domaines d'élasticité pour chaque système.

2.3 Surface de charge en traction/compression biaxiale

On soumet le monocristal à l'état de contraintes de traction/compression biaxiale suivant :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Déterminer et tracer le domaine d'élasticité du monocristal dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$. Justifier que le domaine obtenu est non borné.

2.4 Loi de normalité pour le monocristal

On suppose que l'incrément de déformation plastique associé à chaque mécanisme suit la loi de normalité :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{ps} = \dot{\gamma}^s \frac{\partial f^s}{\partial \underline{\sigma}} \quad (13)$$

c'est-à-dire en composantes

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{ps} = \dot{\gamma}^s \frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

Montrer alors que

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \sum_{s=1}^3 \underline{\dot{\epsilon}}^{ps} = \sum_{s=1}^3 \frac{\dot{\gamma}^s}{2} (\underline{l}^s \otimes \underline{n}^s + \underline{n}^s \otimes \underline{l}^s) \text{signe}(\tau^s) \quad (15)$$

La fonction *signe* vaut 1 (respectivement -1 ou 0) si la quantité entre parenthèse est positive (respectivement négative ou nulle). Justifier que chaque $\underline{\dot{\epsilon}}^{ps}$ correspond à une déformation de cisaillement.

2.5 Réponse du monocristal en cisaillement simple

On suppose ensuite que le matériau se déforme en durcissant avec un écrouissage linéaire de la forme :

$$\tau_c^s = \tau_c^0 + H\gamma^s \quad (16)$$

où H est le module plastique caractéristique du matériau.

Calculer la réponse du matériau pour un chargement de cisaillement imposé :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} \neq 0 \quad (17)$$

Pour cela, on calculera d'abord le multiplicateur plastique $\dot{\gamma}^s$ en fonction de $\dot{\sigma}_{12}$. On tracera ensuite la courbe σ_{12} en fonction de ε_{12} . On introduira au passage le module de cisaillement élastique μ .

2.6 Cône des normales

Dans le cas parfaitement plastique ($H = 0$), on considère un chargement en contraintes tel que

$$\sigma_{22} = 2\sigma_{12} \quad (18)$$

Quels sont les systèmes potentiellement actifs ?

Montrer que même si l'on connaît l'incrément de déformation plastique totale $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$, les incréments de glissement $\dot{\gamma}^s$ restent indéterminés. Combien de systèmes sont nécessaires (et suffisants) pour accommoder toute déformation $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$ plane ($\dot{\varepsilon}_{i3}^p = 0$).

Dans le cas écrouissable ($H \neq 0$), pour une vitesse de chargement $\dot{\sigma}_{22} = 2\dot{\sigma}_{12}$ donnée, calculer $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$ en supposant que tous les systèmes potentiels sont actifs. Quelle est alors la relation entre $\dot{\varepsilon}_{22}^p$ et $\dot{\varepsilon}_{12}^p$.

3 Comportement en fatigue oligocyclique

Pour modéliser le comportement cyclique, on introduit une variable d'écrouissage cinématique x^s dans le critère :

$$f^s(\underline{\sigma}, x^s) = |\tau^s - x^s| - \tau_c^s \quad (19)$$

avec $\tau_c^s = \tau_c^0$ ($H = 0$). On adopte une loi d'évolution non linéaire :

$$\dot{x}^s = \dot{\gamma}^s(c - d \text{signe}(\tau^s - x^s) x^s) \quad (20)$$

La fonction *signe* est définie par :

$$\begin{aligned} \text{signe}(\tau^s - x^s) &= 1, & \text{si } \tau^s - x^s > 0 \\ \text{signe}(\tau^s - x^s) &= -1, & \text{si } \tau^s - x^s < 0 \\ \text{signe}(\tau^s - x^s) &= 0, & \text{si } \tau^s - x^s = 0 \end{aligned}$$

3.1 Ecrouissage cinématique non linéaire et loi de normalité

Appliquer à nouveau la règle de normalité et montrer que

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \sum_{s=1}^3 \dot{\varepsilon}^{ps} = \sum_{s=1}^3 \frac{\dot{\gamma}^s}{2} (\underline{l}^s \otimes \underline{n}^s + \underline{n}^s \otimes \underline{l}^s) \text{signe}(\tau^s - x^s) \quad (21)$$

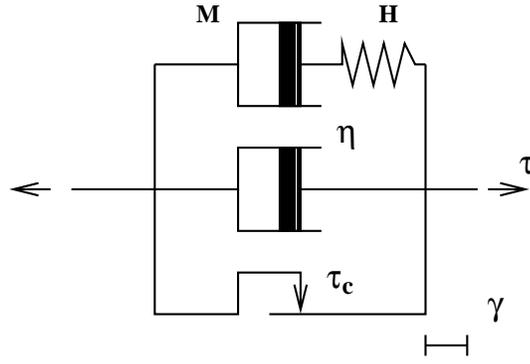


Figure 3: Modèle rhéologique pour le comportement en fluage.

3.2 Calcul d'un cycle de déformation

3.2.1 Première charge

Pour un chargement de cisaillement simple ($\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} \neq 0$), calculer x^s puis τ^s en fonction γ^s pour le(s) système(s) actif(s) dans ce cas. Il faut pour cela intégrer l'équation (20) pour γ^s allant de 0 à γ_1^s donné.

Quelle est la valeur asymptotique de τ^s lorsque γ^s devient grand.

3.2.2 Changement de direction

Arrivé à un état $\sigma_{12} = \sigma_{12}^1, \tau^s = \tau_1^s, \gamma^s = \gamma_1^s > 0$ donné, on inverse le signe de la vitesse de déformation imposée pour aller jusqu'à $\gamma_2^s = -\gamma_1^s$. Après une décharge élastique, le monocristal plastifie à nouveau. Pour quelle valeur de $\tau^s < \tau_1^s$?

Intégrer alors à nouveau l'équation (20) pour obtenir x_2^s et τ_2^s en fonction de γ_1^s et γ_2^s .

4 Comportement en fluage

Pour modéliser la réponse en fluage observée pour le monocristal, on est obligé d'enrichir encore le modèle précédent. On propose pour cela le modèle rhéologique de la figure 3 pour relier la cission résolue τ^s et la vitesse de glissement $\dot{\gamma}^s$. Le montage comporte deux pistons M et η , un patin τ_c et un ressort H . On suppose que les constantes H, M et η sont les mêmes pour les 3 systèmes de glissement.

4.1 Loi d'évolution de la contrainte interne x^s

On appelle x^s la contrainte dans la branche du montage comportant le ressort H . Donner la relation entre τ^s, x^s et τ_c, γ^s , puis la loi d'évolution \dot{x}^s en fonction de $\dot{\gamma}^s$ et de x^s .

4.2 Essai de fluage

Donner l'évolution de la contrainte interne x^s et de la déformation γ^s en fonction du temps pour un essai de fluage à $\tau^s = \tau_0$ imposé.

5 Fissure dans un monocristal

On admet qu'après un grand nombre de cycles de chargement une fissure est apparue dans le monocristal. On peut l'assimiler à une fissure rectiligne de taille $2a$ dans une plaque infinie comme sur la figure 4. L'orientation du cristal par rapport aux axes (X_1, X_2) est la même que dans le reste du problème. On envisage les phénomènes de plasticité pouvant se produire en pointe de fissure et la possible rupture du monocristal.

5.1 Plasticité en pointe de fissure

Dans le cadre de l'élasticité isotrope, le champ de contraintes en pointe de fissure est donné par les expressions suivantes dans le repère cartésien orthonormé (X_1, X_2) :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0\end{aligned}$$

en fonction de la distance r du point considéré à la pointe de fissure et de l'angle polaire θ avec la direction X_1 (cf. figure 4). K_I est le facteur d'intensité de contrainte lié au chargement σ .

Déterminer l'endroit (angle θ) où la plasticité peut s'activer pour chaque système de glissement en acceptant que le champ de contraintes précédant reste valable.

Estimer la taille de la zone plastique.

5.2 Rupture par clivage

La rupture finale de la pièce peut s'effectuer par clivage sur les plans cristallographiques de normal \mathbf{n}^3 . Calculer la contrainte normale sur ces plans près de la pointe de la fissure. A quel endroit (pour quel angle θ), la rupture par clivage va-t-elle s'amorcer ?

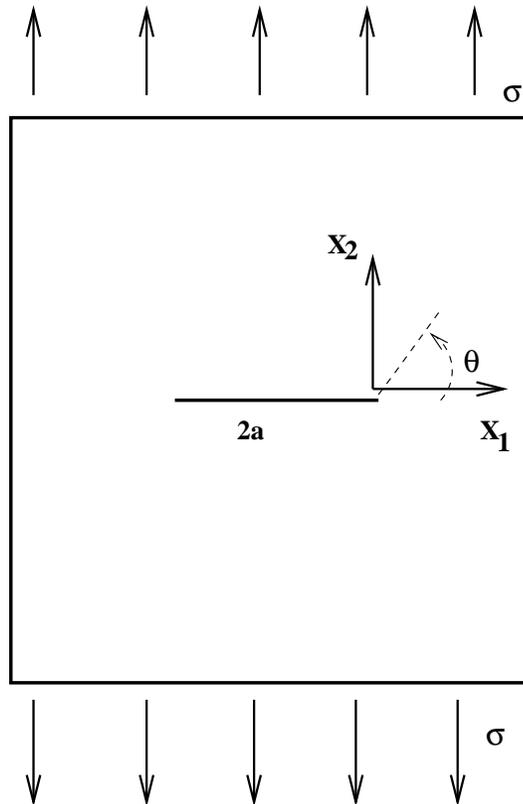


Figure 4: Fissure droite dans une plaque infinie monocristalline.