

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Физико – Механический Факультет

Кафедра “Механика и Процессы Управления”

Диссертация на соискание ученой степени магистра

Тема: Феноменологическое описание и численное моделирование процессов накопления повреждений в квази-хрупких материалах

выполнил
студент: Ястребов В.А.
группа: 6055 / 1

Научный руководитель: доцент, к.ф. - м. н. Семенов А.С.

Санкт-Петербург
Июнь 2007

Аннотация

Диссертационная работа является продолжением бакалаврской дипломной работы и посвящена проблемам механики склерономного и реономного накопления повреждений в локальном подходе.

Основные цели работы:

1. Развитие критериев и моделей механики континуальных повреждений.
2. Развитие конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR и пакета анализа определяющих уравнений CES.
3. Применение законов механики повреждений для конечно-элементного решения ряда инженерных задач, в частности задачи о вытягивании профилированного арматурного стержня из бетонного блока - одной из важнейших задач механики железобетона.

Работа разделена на три основные части:

1. Законы механики континуальных повреждений

В этой части проводится обзор современного состояния механики континуальных повреждений (МКП), описываются различные модели поврежденности, обсуждаются некоторые вопросы нелокальной теории, приводится общее термодинамическое описание.

Также в этой части подробно описываются существующие критерии определения важнейшей переменной МКП - эквивалентной меры деформированного состояния (ЭМДС). Автором предлагается новая ЭМДС, учитывающая анизотропию прочностных свойств с наперед заданным коэффициентом.

Автор развивает модель реономного накопления повреждений Ноэля Шаламэля введением экспоненциального закона поврежденности. Более того, на основе модели Шаламэля строится новая модель стареющего упруго-повреждаемого материала с реономным накоплением повреждений. Новая модель, наряду с более точным описанием поведения материала при нестационарном нагружении, релаксации и трех стадиях ползучести, позволяет решать задачи на статическую и динамическую усталость.

2. Численные методы механики континуальных повреждений

Основное внимание в этой части уделено проблемам численного решения задач МКП. Подробно исследован метод Рикса продолжения по параметру. В дополнение к стандартному алгоритму метода реализован корректор решения вблизи точек смены знака определителя касательной матрицы жесткости.

В данной части детально рассматривается реализация метода Рикса в пакете Constitutive Equation Studio (CES) и конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR, созданных и развиваемых под руководством А. С. Семенова. Наряду с методом Рикса, в пакет CES были интегрированы законы связной упруго - поврежденности и некоторые ЭМДС.

Кроме того в данной части приводятся аналитические выражения для касательных матриц жесткости, необходимые для использования этих законов и мер методом Рикса.

Для описания поведения материала на основе созданной модели стареющего упруго - повреждаемого материала с нестационарным накоплением повреждений была написана программа, решающая задачи ползучести, релаксации, нестационарного нагружения, динамической и статической усталости в случае одноосного нагружения.

3. Инженерные приложения механики континуальных повреждений

В конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR с введенными определяющими соотношениями МКП, различными законами поврежденности и ЭМДС смоделированы три классических эксперимента: Нуру - Мохаммеда, Шлангена и Балаторе. Сравнение результатов с натурными и численными экспериментов других авторов показало хорошее совпадение, как в качественном прогнозе областей накопления повреждений и роста трещин, так и в количественной зависимости силы нагружения от перемещений.

Наряду с экспериментами, ставшими классическими, по заданию В.В. Белова - заведующего кафедрой “Строительные конструкции и материалы” моделируются задачи о вытягивании анкера и профилированного арматурного стержня из бетонного блока, решение которых методами механики повреждений редко встречается в литературе. Качественно и количественно результаты совпадают с экспериментами.

В последней главе данной части обсуждаются вопросы применимости локального подхода, проводятся тесты на гипер-чувствительность решения к конечно-элементной сетке, числу инкрементов и числу элементов.

В приложении к работе содержится реферат “История бетона и железобетона” и техника безопасности.

Часть результатов данной дипломной работы докладывалась на Международной Научной Конференции Аспирантов и Студентов “Процессы Управления и Устойчивость 2007”, секция “Математические методы в механике и физике”.

По данной работе получен грант правительства Санкт-Петербурга и Комитета по Науке и Высшей Школе “Модель вязко-упруго-повреждаемого материала и ее применение в расчетах бетонных и железобетонных конструкций”.

Работа содержит: 140 страниц основного текста, 34 страницы текста приложений, 95 рисунков.

Диплом был набран в пакете LaTeX, все программы были написаны на языке C++, графики и рисунки создавались в пакетах SigmaPlots, MS Excel, расчеты методом конечных элементов проводились в пакете PANTOCRATOR, анализ определяющих уравнений материала проводился в пакете CES.

Благодарности

Я благодарен своим научным руководителям Борису Евгеньевичу Мельникову и Артему Семеновичу Семенову за неоценимую помощь и поддержку, оказанную мне не только при написании бакалаврской и дипломной работы, статей, но и во всех других вопросах. За полученные гранты, работу в Техническом Университете Дрездена, за помощь в поиске работы. За внимание и доброе отношение. Большое спасибо.

Я благодарен всем преподавателям кафедры “Механика и Процессы Управления” за доброе отношение ко всем студентам и за отличное образование, которое я получил благодаря им. Особенное спасибо хочется сказать Владимиру Александровичу Пальмову и Виктору Ниловичу Наумову за то, что они привили во мне любовь к науке. Я всегда с благодарностью буду вспоминать лекции Виктора Алексеевича Пупырева и Павла Андреевича Жилина.

Спасибо Ирине Юрьевне Пушевой за то, что она открыла мне дверь в науку.

Я выражаю искреннюю благодарность всем преподавателям других кафедр, проводивших занятия у нашей группы, особенно хочется отметить Сергея Николаевича Колгатина, Александра Николаевича Васильева и Георгия Алексеевича Смирнова, светлая ему память.

Я также благодарен своему руководителю по месту работы Владиславу Юрьевичу Голятину и директору “Корнинг СНГ” Александру Викторовичу Доценко за понимание и поддержку.

Отдельное спасибо Jacky Mazars и Noël Challamel за предоставление статей, необходимых в написании диплома и предложения помощи.

Оглавление

Аннотация	i
Благодарности	iii
1 Введение	1
I Законы механики континуальных повреждений	5
2 Уравнения механики деформируемого твердого тела	7
2.1 Термодинамическое описание	7
2.2 Определяющие параметры	10
2.3 Функция свободной энергии Гельмгольца	13
2.3.1 Свободная энергия для упруго-повреждаемого материала	14
3 Законы поврежденности	17
3.1 Введение в механику повреждений	17
3.2 Эквивалентная мера деформированного состояния	18
3.3 Законы поврежденности	33
3.3.1 Основные понятия и предположения	33
3.3.2 Уравнение равновесия	37
3.3.3 Законы эволюции	39
3.3.4 Соответствие констант для различных законов поврежденности	48
4 Реономные законы поврежденности	51
4.1 Развитие модели Шаламеля реономного накопления повреждений	51
4.2 Анализ модели Шаламеля	54
4.3 Модель стареющего материала с реономным накоплением повреждений	58
4.4 Анализ модели стареющего материала с реономным накоплением поврежденности	63
4.5 Валидация модели на экспериментальных данных	70
4.6 Преимущества и недостатки модели	75
II Численные методы механики континуальных повреждений	77
5 Метод Рикса	79
5.1 Основы метода Рикса	79
5.2 Реализация метода Рикса в Constitutive Equation Studio	86
5.3 Касательная матрица жесткости	88
5.4 Реализация метода Рикса в PANTOCRATOR	98

III	Инженерные приложения механики континуальных повреждений	101
6	Классические задачи механики континуальных повреждений	105
6.1	Задача о сдвиге тонкой пластины с двумя надрезами	105
6.2	Задача о четырехточечном изгибе балки с одним надрезом	110
6.3	Задача о четырехточечном изгибе балки с двумя надрезами	113
7	Инженерные задачи механики континуальных повреждений	119
7.1	Задача о вытягивании анкера из бетонного блока	119
7.2	Задача о вытягивании профилированного арматурного стержня из бетонного блока	123
7.2.1	Постановка задачи	123
7.2.2	Численный эксперимент	123
8	Недостатки локального подхода	131
9	Заключение	139
A	История бетона и железобетона	147
A.1	История римского строительства	148
A.2	Строительные материалы в Риме	150
A.3	Опус цементум – римский бетон	151
A.4	Эволюция римского бетона	153
A.5	Известь	156
A.6	Физико-химические свойства	158
A.7	Рецепты римского бетона	161
A.8	Формование бетона	164
A.9	Сооружения из римского бетона	166
A.9.1	Римские дороги	166
A.9.2	Водопроводы и акведуки	169
A.9.3	Бани - термы	171
A.10	История бетона в Новое время	173
B	Техника безопасности	177
B.1	Учет психофизиологических факторов	177
B.2	Требования к микроклиматическим условиям	178
B.3	Требования к освещённости	178
B.4	Требования к уровню шума	179
B.5	Требования электробезопасности	180
B.6	Требования пожарной безопасности	180

Список иллюстраций

3.1	Линии равного уровня ЭМДС для энергетической меры деформации ($\nu = 0.1$; $\nu = 0.2$; $\nu = 0.3$; $\nu = 0.4$.)	29
3.2	Линии равного уровня ЭМДС для модифицированной энергетической меры деформации ($\nu = 0.1$; $\nu = 0.2$; $\nu = 0.3$; $\nu = 0.4$.)	29
3.3	Линии равного уровня ЭМДС поверхности для меры Мазарса	30
3.4	Линии равного уровня ЭМДС для обобщенной меры Мазарса ($p = 2$)	30
3.5	Линии равного уровня ЭМДС для обобщенной меры Мазарса ($p = 3$)	31
3.6	Линии равного уровня ЭМДС для меры дэ Ри и Пирлингса ($\kappa = 5$; $\kappa = 10$; $\kappa = 15$)	31
3.7	Экспериментальные поверхности разрушения для различных образцов при $\tilde{\sigma}_3 = 0$	32
3.8	Экспериментальные поверхности разрушения в сравнении с различными ЭМДС	32
3.9	Поясняющая иллюстрация к определению ПОЭ	35
3.10	Различные области в поврежденном теле	37
3.11	Типичная кривая деформирования квази-хрупкого материала	41
3.12	Эволюция поврежденности по билинейному закону	43
3.13	Кривая деформирования по билинейному закону	43
3.14	Эволюция поврежденности по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию гладкости ($\alpha = 4.5$, $\beta = -0.5$, $\alpha = 9$, $\beta = -1$) и не удовлетворяющих ($\alpha = 2$, $\beta = 2$)	44
3.15	Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию гладкости ($\alpha = 4.5$, $\beta = -0.5$, $\alpha = 9$, $\beta = -1$) и не удовлетворяющих ($\alpha = 2$, $\beta = 2$)	45
3.16	Эволюция поврежденности по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию отрицательности производной ($(\alpha = 20$, $\beta = -1)$, $(\alpha = 5$, $\beta = 0.5)$ и $(\alpha = 2$, $\beta = 2)$)	45
3.17	Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию отрицательности производной ($(\alpha = 20$, $\beta = -1)$, $(\alpha = 5$, $\beta = 0.5)$ и $(\alpha = 2$, $\beta = 2)$)	46
3.18	Эволюция поврежденности по закону Мазарса для различных констант ($(\alpha = 0.5$, $\beta = 100)$, $(\alpha = 0.5$, $\beta = 300)$, $(\alpha = 0.5$, $\beta = 500)$)	47
3.19	Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант ($(\alpha = 0.5$, $\beta = 100)$, $(\alpha = 0.5$, $\beta = 300)$, $(\alpha = 0.5$, $\beta = 500)$)	47
3.20	Эволюция поврежденности по закону Мазарса для различных констант ($(\alpha = 0.95$, $\beta = 100)$, $(\alpha = 0.95$, $\beta = 300)$, $(\alpha = 0.95$, $\beta = 500)$)	48
3.21	Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант ($(\alpha = 0.95$, $\beta = 100)$, $(\alpha = 0.95$, $\beta = 300)$, $(\alpha = 0.95$, $\beta = 500)$)	48
3.22	Кривые деформирования по закону Мазарса и закону Гирса для экспериментально определенных констант	50
4.1	Линейный и экспоненциальный законы поврежденности	54

4.2	Кривые деформирования для двух скоростей прикладываемых пилообразных изменений перемещений	55
4.3	Кривые деформирования для пилообразного изменений нагрузки (мягкое нагружение)	56
4.4	Кривые деформирования для пилообразного изменений нагрузки (жесткое нагружение)	56
4.5	Кривые ползучести: зависимость деформаций от времени для прикладываемых нагрузок	57
4.6	Кривые релаксации: зависимость напряжений от времени при постоянных деформациях	57
4.7	Прикладываемая нагрузка	58
4.8	Кривые деформирования соответствующие прикладываемым нагрузкам и равновесная кривая	58
4.9	Кривые деформирования при мягком нагружении	64
4.10	Кривые ползучести при различных значениях прикладываемых сил ($\eta^* = 0.5; 1.0$)	65
4.11	Кривые эволюции поврежденности при ползучести	65
4.12	Усталостные кривые эволюции повреждений при синусоидальном нагружении	66
4.13	Кривые деформирования при жестком нагружении, меняющемся по пилообразному закону	66
4.14	Кривые релаксации для различных значений деформации	67
4.15	Кривые эволюции поврежденности при релаксации	67
4.16	Усталостная эволюция повреждений для различных амплитуд деформации	68
4.17	Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\epsilon_0^* = 0.005$	68
4.18	Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\epsilon_0^* = 0.010$	69
4.19	Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\epsilon_0^* = 0.020$	69
4.20	Пояснительная иллюстрация к определению первичной ползучести	71
4.21	Сопоставление модели СВП (линейный закон старения) с экспериментальными данными	72
4.22	Пояснительная иллюстрация к линейно-экспоненциальному закону старения	72
5.1	Поясняющая иллюстрация к методу Рикса	85
5.2	Поясняющая иллюстрация к реализации метода корректора особой точки	95
5.3	Проверка работы предиктора на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$) для различной длины дуги (шага)	96
5.4	Проверка работы предиктора на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$) для различной длины дуги (увеличенный фрагмент)	96
5.5	Проверка работы предиктора и корректора особой точки на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$)	97
5.6	Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$) в случае двусосного растяжения	97
5.7	Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$) и четырех критериях ЭМДС в случае двусосного растяжения	97
5.8	Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2; \beta = 2; k_0 = 0.001; k_c = 0.01$) и четырех критериях ЭМДС в случае трехосного растяжения	98
6.1	Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Десмората	105
6.2	Экспериментальный рост трещин в тесте Десмората для $\gamma_1 = U_0/U_1$ (слева) и $\gamma_2 < \gamma_1$ (справа)	106

6.3	Компоненты тензора поврежденности, численный эксперимент Десмората [44]	107
6.4	Поля поврежденности (слева) и поля вертикальных деформаций (справа) в тесте Десмората для различных U_0 и U_1	108
6.5	Поля поврежденности (слева) и поля вертикальных деформаций (справа) в задаче Десмората для различных конечно-элементных сеток	109
6.6	Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Шлангена (толщина образца 100 мм)	110
6.7	Экспериментальный рост трещины в тесте Шлангена	111
6.8	Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Шлангена для различных инкрементов нагружения	112
6.9	Поля поврежденности для различных инкрементов нагрузки, слева - численный эксперимент Гирса, Борста и Пирлингса [47], справа - численный эксперимент Бажанта [36]	112
6.10	Результаты численного решения задачи об изгибе SEN балки в PANTOCRATOR и экспериментальные данные Шлангена из работы [49]	113
6.11	Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Бажанта (толщина образца 100 мм)	114
6.12	Экспериментальный рост трещины в тесте Балаторе	114
6.13	Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для различных инкрементов нагружения при $\kappa = 25$	116
6.14	Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для $U_0 = 0.08$ мм $\kappa = 15$	116
6.15	Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для различных инкрементов нагружения при $k_0 = 0.001$; $\alpha = 0.9$; $\beta = 100$; $\kappa = 15$	117
6.16	Поля поврежденности для различных инкрементов нагрузки, численный эксперимент Гирса, Борста и Пирлингса [47]	117
6.17	Результаты численного решения задачи об изгибе DEN балки в PANTOCRATOR и экспериментальные данные Балаторе	118
7.1	Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте о вытягивании анкера	119
7.2	Распределение главных деформаций в численном эксперименте Бажанта [36] (a), (b) и (c) соответственно при нагрузках $U = 0.2$; 0.3 ; 0.35 мм	120
7.3	Распределение полей поврежденности в численном эксперименте в PANTOCRATOR при нагрузках $U = 0.05$; 0.10 ; 0.15 ; 0.20 ; 0.25 ; 0.40 мм	121
7.4	Поле радиальных деформаций при $U = 0.25$ мм - развитие первой трещины, и поле осевых деформаций при $U = 0.4$ мм - развитие второй трещины	122
7.5	Результаты численного решения задачи о вытягивании анкера в PANTOCRATOR и результаты эксперимента	122
7.6	Постановка задачи о вытягивании профилированного арматурного стержня из бетонного блока и схема результатов натурного эксперимента	124
7.7	Граничные условия и конечно-элементная сетка для задачи о вытягивании стержневой арматуры из бетонного блока	125
7.8	Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для несквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм	126
7.9	Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для несквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм	126
7.10	Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм	127
7.11	Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для сквозной арматуры с шагом $d = 4$ мм	128
7.12	Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для сквозной арматуры с шагами $d = 10$ мм и $d = 4$ мм	129

7.13	Поля поврежденности для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм при $U = 0.06$ мм и различных величинах прикладываемых давлений: (а) - $p = 1$ МПа, (б) - $p = 5$ МПа, (с) - $p = 10$ МПа	129
7.14	Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм при различных внешних давлениях . . .	130
8.1	Схема теста о растяжении пластины с двумя разрезами	132
8.2	Конечно-элементная сетка в задаче о растяжении пластины с двумя надрезами	132
8.3	Локализация поврежденности и гипер-чувствительность к сетке	133
8.4	Изменение решения при изменении числа конечных элементов	134
8.5	Графики зависимости напряжений от максимальных деформаций при одноосном растяжении для различного числа инкрементов	135
8.6	Локализация поврежденности в одном элементе	136
A.1	Виды каменной опалубки, слева направо: opus incertum, opus reticulatum, opus tectacium, opus mixtum	165
A.2	Слева - Аппиева дорога, справа - улица в Помпеи	169
A.3	Слева - акведук Пон-де-Гард, Франция, справа - римский акведук в Сеговии	171
A.4	Реконструкция терм Каракаллы (слева), Диоклетиана (справа)	172
A.5	Виадук Мийо, Франция	176
A.6	Виадук Мийо, Франция	176

Глава 1

Введение

Данная дипломная работа посвящена исследованию склерономного и реономного¹ накопления повреждений в квази-хрупких материалах. Термин квази-хрупкий материал означает, что в материале практически не накапливаются остаточные деформации вплоть до разрушения, а в зоне следующей за разрушением материал имеет широкую зону разупрочнения, в отличие от чисто хрупкого материала, не имеющего этой зоны. К таким материалам относятся морской лед, горные породы, композиты с керамической матрицей и бетоны.

В зависимости от материала в области предшествующей пиковой нагрузке (пределу прочности) и в пост пиковой области в квази-хрупком материале накапливаются и увеличиваются в размерах микродефекты: микропоры и микротрещины. Развитие этих дефектов влияет на физико-механические свойства материала. В 1958 году Л.М. Качанов [11] впервые ввел термин “сплошность” и определил его как меру трещиноватости материала. В 1959 году Ю.Н. Работнов [22] заменил термин сплошность на “поврежденность” (англ. damage), который используются во всем мире для обозначения меры деградации материала и по сей день.

Продолжателями концепции континуальной поврежденности стали J. Lemaitre, G. Pijaudier-Cabot, J. Mazars, J.-L. Chaboche во Франции, J.H.P. de Vree, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, R. de Borst в Голандии, S. Murakami, N. Ohno в Японии, Z.P. Bazant, G.Z. Voyiadjis в США и С.А. Шестериков, В.В. Новожилов, А.А. Вакуленко, Н.Ф. Морозов, В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев в России и многие другие. Со временем образовалась целая область механики - механика континуальных повреждений. Причиной такого образования стало то, что при учете связности накопления повреждений и напряженно-деформированного состояния требовалось дополнить определяющие параметры мерой поврежденности и на основе термодинамических законов изменить определяющее соотношение связи напряжений и деформаций.

Постепенно помимо изотропной модели поврежденности была подробно разработана теория анизотропной поврежденности [44], [24], [69], оперирующая в зависимости от модели не скалярной величиной поврежденности, а тензором поврежденности второго, четвертого и высших рангов. Появляется множество моделей связной

¹Реономное накопление повреждений - здесь, процесс накопления повреждений с течением времени при постоянных нагрузках или при достаточно малых скоростях деформирования, т.е. без учета динамических слагаемых в уравнении равновесия

упруго-пластично-поврежденности [47], [53], [56] и большие работы объединяющие в одном термодинамическом описании вязкие, упругие и пластические анизотропные свойства материалов в нелокальном подходе [69].

В процессе своего развития локальная механика континуальных повреждений и теория пластичности столкнулись с уже известной проблемой. Аналитические, экспериментальные и численные исследования показали неприменимость локального подхода при значительном разупрочнении материала. При потере касательной матрицей жесткости материала положительной определенности, уравнения равновесия теряют свойство эллиптичности и постановка краевой задачи становится некорректной [54]. С численной точки зрения это проявляется в гипер чувствительности к размеру и ориентации конечно-элементной сетки в МКЭ, и в физически неприемлимой локализации поврежденности в зоне шириной в один элемент, что приводит к практически нулевой энергии диссипации. А соответствующие диаграммы “сила - перемещение” при достаточно мелкой конечно-элементной сетке в пост пиковой зоне имеют зону резкого падения силы, что не соответствует экспериментам [36], [45].

С физической точки зрения локальная теория, основанная на предположении, что состояние каждой точки в каждый момент времени зависит только от внутренних переменных и определяющих параметров и истории их изменения в этой же точке тела. В действительности, это предположение не всегда выполняется, в частности в задачах сильной локализации деформаций и разупрочнения [?]. В связи с этим был сделан вывод - требуется учет внутреннего масштаба структуры материала.

Было предложено и разработано множество методов решения возникшей проблемы, сначала, в основном для пластичности, далее модели развивались и применялись в механике повреждений.

- Модель связанных трещин - Баренблат (1959) и Дагдейл (1960)
- Модель фиктивных трещины - Хиллерборг (1976)

Другой класс моделей, учитывающих внутренний масштаб материала - **нелокальные модели поврежденности**:

- Пижаудиер - Шабот и Бажанг (1987, 1988)
- Твергард, Нидлман (1995)
- Сан, Фам (1996)
- Семенов (1999)
- Жирасек и Бажан (2002)
- Семенов, Мельников, Носиков (2002)

С развитием нелокальных моделей появлялись **градиентные модели**

- Айфантис (1992)
- дэ Борст и Мюхлхаус (1992)

- Флик и Хатчинсон (1997) и др.

Также существуют модели Cosserat Continuum, модели вязко-пластической регуляризации, микро-плоскостные модели [36], применяется метод связанных частиц для моделирования разрушения (CSL - Confinement Shear Lattice) [42] и другие.

В данной работе используется локальная изотропная модель поврежденности - проблемы локализации, гипер чувствительности к конечно-элементной сетке и размерам элементов решается путем построения регулярных сеток, ограничения размера конечного элемента размером, используемым авторами в нелокальных подходах для определения внутреннего масштаба микроструктуры, а также за счет варьирования числа инкрементов в фазе накопления повреждений. Такая техника также применяется, но она требует достаточно больших усилий и индивидуального подхода к каждой конкретной задаче [54].

Еще одной проблемой использования механики повреждений в КЭ пакетах является проблема решения системы конечно-элементных нелинейных уравнений [30]. Сложность заключается в том, что при потере касательной матрицей жесткости положительной определенности широко используемые методы равношагового продолжения по параметру нагрузки неприменимы для описания процессов накопления повреждений в области разупрочнения. Требуется использование других методов продолжения по параметру, инкремент нагрузки в которых меняется в зависимости от вида связи внешних и внутренних сил. К таким методам относится, например, метода Рикса (длины дуги, Arc-length). Этот метод и был подробно описан, незначительно модифицирован и интегрирован в пакет CES.

Наряду со стационарным накоплением повреждений для промышленности важен расчет на долговечность. С квази-хрупкими материалами, работающими при невысокой температуре, статического анализа прочности бывает вполне достаточно, но если дело касается конструкций, работающих при достаточно высокой температуре - части электростанций, химических заводов и других конструкций из квази-хрупких материалов, то простого статического расчета недостаточно. При развитии деформаций ползучести за счет накопления необратимых повреждений в квази-хрупких материалах - первая фаза ползучести - уменьшения роста скорости деформации - сменяется второй фазой постоянной скорости ползучести, а по прошествии некоторого времени, зависящего от внешних условий, нагрузок и свойств материала, вторая фаза может смениться третьей фазой или неустойчивой фазой ускоренного роста ползучести, ведущей к разрушению. Существует множество моделей, достаточно хорошо описывающих первые две стадии, но с точным прогнозированием третьей стадии - зачастую наиболее важной для прогнозирования времени жизни - есть сложности.

Изначально Л.М. Качанов ввел поврежденность именно для описания поведения хрупкого материала при ползучести. Затем поврежденность была введена в определяющие уравнения для описания множества процессов, что дало большой толчок к развитию механики повреждений. Несмотря на то, что на сегодняшний день существует много работ по нестационарному накоплению повреждений с учетом пластичности и вязкости [69], [40], [63], [38], [67], их количество на порядок меньше работ по стационарному накоплению повреждений.

Наибольшее внимание автора привлекла работа Н. Шаламеля [40] (2005). В работе

предлагается основанная на строгом термодинамическом описании реономного развития поврежденности достаточно простая модель, способная описывать процессы нестационарного нагружения, релаксацию и в ряде случаев все три стадии ползучести. Анализ этой модели и сравнение с экспериментальными данными по ползучести бетона, привели автора к заключению, что модель Шаламеля недостаточно хорошо описывает процессы реономного роста поврежденности. Поэтому сначала модель была незначительно модернизирована введением более реалистичного закона поврежденности (экспоненциального вместо линейного), а затем в модель было введено в явном виде время, что позволило в рамках единой модели несколько улучшить результаты моделирования ползучести и описывать процессы усталостного накопления повреждений.

В последней части диссертации решается несколько классических задач механики повреждений - численно моделируются эксперимент Нуру-Мохаммеда о сдвиговой деформации тонкой пластины с двумя вырезами, эксперимент Шлангена о четырехточечном несимметричном изгибе балки с одним вырезом и опыт Балаторе о четырехточечном асимметричном изгибе балки с двумя вырезами - это задачи на которых традиционно проверяются авторами модели поврежденности [42], [36], [50], [64] и другие.

Наряду с классическими задачами механики повреждений было решено две задачи - о вытягивании анкера и профилированной стержневой арматуры из бетонного блока.

Часть I

**Законы механики континуальных
повреждений**

Глава 2

Уравнения механики деформируемого твердого тела

Все уравнения механики деформируемого твердого тела должны быть основаны на предположениях, не противоречащих термодинамическим уравнениям. А также должны соблюдаться закон сохранения массы, и силы в каждом элементе системы должна быть уравновешены. При рассмотрении безмоментной механики также должны быть уравновешены и моменты. В данной части приведем основные уравнения механики деформируемого твердого тела, сделав наибольший акцент на термодинамическом описании процессов. Приведем различные варианты вида свободной энергии для повреждаемых материалов и предложим свои.

2.1 Термодинамическое описание

Рассмотрим первый, второй и третий законы термодинамики. Первый закон – закон сохранения энергии, утверждающий, что скорость изменения суммарной энергии системы равна сумме мощности механических сил p и скорости подвода тепла q

$$\dot{T} + \dot{U} = p + q, \quad (2.1)$$

где T - кинетическая энергия, U - внутренняя энергия системы.

$$T = \int_V \frac{1}{2} v^2 \rho dV, \quad (2.2)$$

где \mathbf{v} – скорость данной точки системы, ρ - плотность в данной точке, V - объем тела.

$$U = \int_V U \rho dV, \quad (2.3)$$

где U – плотность внутренней энергии. Мощность механических сил в объеме V , ограниченном поверхностью S , складывается из мощности объемных и поверхностных сил

$$p = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} dS, \quad (2.4)$$

где \mathbf{f}_V – вектор объемных сил, \mathbf{f}_S – вектор поверхностных сил. Преобразуя выражение (2.4), получаем

$$p = \int_V ((\mathbf{f}_V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{d}}) dV, \quad (2.5)$$

где $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ – тензор скоростей деформации. Скорость подвода тепла складывается из b – тепла сгенерированного в объеме и $-h$ – тепла подводимого через поверхность, если h – это отвод тепла через поверхность

$$q = \int_V b dV - \int_S h dS, \quad (2.6)$$

Складывая эти выражения получаем

$$\int_V [((\mathbf{f}_V - \dot{\nu} \rho) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{d}} + b - \dot{U} \rho] dV - \int_S h dS = 0. \quad (2.7)$$

Теперь, если отвод тепла через поверхность представить как скалярное произведение вектора теплового потока \mathbf{h} на нормаль к поверхности \mathbf{n}

$$h = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}, \quad (2.8)$$

то, используя теорему Остроградского - Гаусса, формулу (2.7) можно записать

$$\int_V [((\mathbf{f}_V - \dot{\nu} \rho) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{d}} + b - \dot{U} \rho - \nabla \cdot \mathbf{h}] dV = 0. \quad (2.9)$$

Так как объем и подынтегральное выражение произвольны, то при выполнении уравнения равновесия

$$(\mathbf{f}_V - \dot{\nu} \rho) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (2.10)$$

получаем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (2.11)$$

Будем использовать второй закон термодинамики в формулировке Клаузиуса - Дюгема

$$\dot{s} \geq \int_V \frac{b}{T} dV - \int_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} dS, \quad (2.12)$$

где \dot{s} – энтропия, $T = T(\mathbf{r}, t)$ – абсолютная температура. Введем плотность энтропии S следующим образом

$$s = \int_V S \rho dV, \quad (2.13)$$

тогда верна и такая запись

$$\dot{s} = \int_V \dot{S} \rho dV. \quad (2.14)$$

Вводя обозначение $\boldsymbol{\Gamma} = \nabla T$, получаем дифференциальную формулировку второго начала термодинамики

$$\dot{S} \rho \geq \frac{b - \nabla \cdot \mathbf{h}}{T} + \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \quad (2.15)$$

Вспоминая выражение для сохранения энергии (2.11), выразим часть членов, входящих в неравенство (2.15)

$$b - \nabla \cdot \mathbf{h} = \rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d}. \quad (2.16)$$

Подставим (2.16) в неравенство (2.15) и домножим все на температуру T

$$T\dot{S} \rho \geq \rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} + \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \quad (2.17)$$

Введем плотность свободной энергии Гельмгольца ψ , вид которой мы и будем определять для различных материалов

$$\psi = U - ST \quad (2.18)$$

Переформулируем второе начало термодинамики, используя плотность свободной энергии

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0 \quad (2.19)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть температура не меняется со временем и тело не деформируется

$$\mathbf{d} = 0, \dot{\psi} = 0, \dot{T} = 0, \quad (2.20)$$

тогда получаем неравенство Фурье из теории стационарной теплопроводности

$$\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \leq 0. \quad (2.21)$$

Третий закон термодинамики о недостижимости нулевой температуры запишем в следующем виде

$$T \rightarrow 0 \Leftrightarrow S \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

2.2 Определяющие параметры

Термодинамическое состояние материальной точки деформируемого твердого тела определяется набором определяющих параметров Ξ в актуальный и во все предшествующие моменты времени $0 \leq \tau \leq t$. В классической локальной механике определяющими параметрами являются время t , температура $T(\mathbf{R}, \tau)$, вектор градиента температуры $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{R}, \tau)$, тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}, \tau)$, тензор поворота $\mathbf{B}(\mathbf{R}, \tau)$ и набор внутренних параметров $\aleph_n(\mathbf{R}, \tau)$

$$\Xi = \{t, T, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B}, \aleph_n\}. \quad (2.23)$$

В современном подходе в механике сплошной среды количество определяющих параметров увеличивается - разделяются определяющие параметры на входящие в явном виде Ξ_s , на входящие с оператором Гамильтона Ξ_g и на входящие с квадратом оператора Гамильтона - оператором Лапласа Ξ_l , существуют также более общие модели, рассматривающие определяющие параметры более высоких порядков, а также скоростей их изменений [58]. Введение в рассмотрение пространственных производных от параметров вызвано необходимостью учета микро-структуры материала и конечностью зоны локализации пластичности и поврежденности.

$$\Xi = \Xi_s \cup \nabla \Xi_g \cup \Delta \Xi_l \quad (2.24)$$

В научном мире пока нет единства в определении определяющих параметров. Существует много работ, пытающихся охватить все проблемы механики в рамках единой

модели. Но выбор определяющих параметров и внутренних переменных для плотности свободной энергии Гельмгольца различен и зависит от решаемых проблем и от предпочтений автора [69], [58], [55] и другие.

Разъясним для начала откуда появились градиенты и лапласианы в определяющих параметрах материала. Основное предположение нелокальной механики - реакция материала в данной точке определяется не только как функция напряженно-деформированного состояния, температуры, градиента температуры, внутренних параметров (вязко-пластических деформаций, энергии рассеяния ползучести, изотропного и кинематического упрочнения, поврежденности) и их истории в данной точке, но и как функцию реакций близлежащих точек с определенным весом α . Введем нелокальную меру \bar{x} функции x в точке \mathbf{r}_0

$$\bar{x}(\mathbf{r}_0) \stackrel{def}{=} \frac{1}{V_r} \int_{V_r} x(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV_r \quad (2.25)$$

Весовую функцию выбирают обычно колоколообразного вида, например, функцию подобную функции Гаусса

$$\alpha(\mathbf{r}) = e^{-c\|\mathbf{r}\|^n}, \quad (2.26)$$

$$V_r = \int_{V_\infty} e^{-c\|\mathbf{r}\|^n} dV, \quad (2.27)$$

где параметры c - мера, характеризующая масштаб микроструктуры материала и представительный элементарный объем, по которому определяется искомая функция, а $\|\mathbf{r}\|$ - норма аргумента, обычно параметр $n = 2$.

Разложим деформацию $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r})$ в ряд Тейлора вблизи точки \underline{r}_0

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}) = & \varepsilon(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial^2 \mathbf{r}} \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial^3 \mathbf{r}} \cdot \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial^4 \mathbf{r}} \cdot \cdot \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Подставим получившееся выражение для деформации и для весовой функции в определение нелокальной меры (2.25)

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \varepsilon(\mathbf{r}_0) e^{-c\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2} dV + \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-c\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2} dV + \\
&+ \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial^2 \mathbf{r}} \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 e^{-c\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2} dV + \\
&+ \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial^3 \mathbf{r}} \cdot \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3 e^{-c\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2} dV + \\
&+ \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial^4 \mathbf{r}} \cdot \cdot \cdot \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^4 e^{-c\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2} dV + \dots
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Стоит отметить, что здесь символ степени у векторов означает не привычное скалярное произведение, а диадное, т.е. $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\mathbf{r}$. Возьмем¹ интегралы и получим следующее выражение для нелокальной меры деформированного состояния в точке \mathbf{r}_0

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = \varepsilon(\mathbf{r}_0) + f_1(c, V_r) \nabla^2 \varepsilon(\mathbf{r}_0) + f_2(c, V_r) \nabla^4 \varepsilon(\mathbf{r}_0) + \dots \tag{2.30}$$

или с использованием операторов Лапласа

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = \varepsilon(\mathbf{r}_0) + f_1(c, V_r) \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_0) + f_2(c, V_r) \Delta^2 \varepsilon(\mathbf{r}_0) + \dots \tag{2.31}$$

Оставим в рассмотрении только первые два члена в разложении Тейлора, тогда нелокальная мера деформации примет вид

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) \approx \varepsilon(\mathbf{r}_0) + f_1(c, V_r) \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_0). \tag{2.32}$$

Отметим, что в теории пластичности более важен первый градиент деформации, нас же больше интересует механика континуальных повреждений, поэтому сконцентрируемся на нелокальной градиентной аппроксимации (2.32).

Итак, обосновав введение оператора Лапласа в определяющие параметры, запишем их и определим, что будет входить во внутренние параметры.

$$\Xi = \Xi_s(t, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{B}, \aleph_n) \cup \nabla \Xi_g(T) \cup \Delta \Xi_l(\boldsymbol{\varepsilon}, \aleph_n) \tag{2.33}$$

Определим внутренние параметры \aleph_n . В них входят тензор вязко-пластической деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$, скалярная мера изотропного упрочнения p , тензор кинематического упрочнения $\boldsymbol{\alpha}$, тензор деформации вязко-поврежденности $\boldsymbol{\varepsilon}^{vd}$, скалярная мера изотропного упрочнения r , тензор кинематического упрочнения для поврежденности $\boldsymbol{\gamma}$ и тензор поврежденности \mathbf{D} . Полный вид определяющих параметров запишется так

¹Диадные произведения операторов Гамильтона меняются на скалярные в силу того, что приращения аргументов, взятых в нечетной степени, обращают интегралы в нуль.

$$\begin{aligned} \Xi = & \Xi_s(t, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{B}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}, p, r, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}) \cup \\ & \cup \Xi_g(\nabla T) \cup \Xi_l(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}, \Delta p, \Delta r, \Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta \boldsymbol{\gamma}, \Delta \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Не претендуя на общность, оставим в рассмотрении только параметры относящиеся к вязко-упруго-повреждаемому стареющему теплопроводящему изотропному материалу.

$$\Xi = \Xi_s(t, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}, D) \cup \Xi_g(\nabla T) \cup \Xi_l(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}, \Delta D) \quad (2.35)$$

2.3 Функция свободной энергии Гельмгольца

Определив внутренние параметры, можно вернуться к диссипативному неравенству (2.19) и, возможно, определить какой вклад вносит каждая внутренняя переменная в плотность свободной энергии Гельмгольца. Итак,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho \dot{\psi}(\Xi) - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0, \quad (2.36)$$

где полная производная плотности свободной энергии по времени

$$\dot{\psi}(\Xi) = \frac{\partial \psi}{\partial \Xi} \dot{\Xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_s} \dot{\Xi}_s + \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_g} \dot{\Xi}_g + \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_l} \dot{\Xi}_l, \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_s} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_g} &= \frac{\partial \psi}{\partial \nabla T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \Xi_l} &= \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta D}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Итого полная производная плотности свободной энергии по времени

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\Xi) = & \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vd} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}} \cdot \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vd} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta D} \Delta \dot{D}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подстановка плотности свободной энергии Гельмгольца в неравенство Клаузиуса-Дюгема (2.36) приводит к неравенству

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vd} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Xi} \dot{\Xi} - \frac{\mathbf{h}}{T} \boldsymbol{\Gamma} - \rho \frac{\psi}{t} \geq 0, \quad (2.40)$$

при учете $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vd}$. Можно показать [69], что неравенство распадается на

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = 0; \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vd} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Xi} \dot{\Xi} - \frac{\mathbf{h}}{T} \boldsymbol{\Gamma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Последнее неравенство определяет взаимосвязь внутренних переменных состояния, измеряемых переменных $\boldsymbol{\varepsilon}$, T и сопряженными с ними термодинамическими силами (см. таблицу 2.3)

Переменные состояния		Сопряженные силы
Измеряемые	Внутренние	
$\boldsymbol{\varepsilon}$		$\boldsymbol{\sigma}$
T		S
	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	$\boldsymbol{\sigma}$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^{vd}$	$-\boldsymbol{\sigma}$
	$\boldsymbol{\Gamma}$	\mathbf{h}
	D	$-Y$
	ΔD	$-Y^g$

Где $(-Y)$, $(-Y^g)$ - меры изменения упруго-поврежденности и лапласиана упруго-поврежденности соответственно, называемые трещиноподвижной силой или плотностью скорости высвобождения энергии поврежденности.

$$\begin{aligned} D &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial (-Y)}; \quad -Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \\ \Delta D &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial (-Y^g)}; \quad -Y^g = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Delta D} \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3.1 Свободная энергия для упруго-повреждаемого материала

Перейдем непосредственно к рассмотрению различных материалов. Для начала рассмотрим наиболее простой вариант - нестареющий $\psi \neq \psi(t)$, теплопроводящий $\psi \neq \psi(T, \boldsymbol{\Gamma})$, упруго-повреждаемый изотропный материал $\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$. Неравенство Клаузиуса-Дюгема сводится к

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0, \quad (2.43)$$

которое распадается на два уравнения, т.к. скорости изменения деформации и поврежденности входят линейно

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}; \\ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} &\geq 0,\end{aligned}\tag{2.44}$$

Классическая форма плотности свободной энергии Гельмгольца для упруго - повреждаемого материала (см. [57], [60], [55] и др.)

$$\psi(\epsilon, D) = \frac{1}{2\rho}(1 - D)\epsilon \cdot \cdot {}^4C \cdot \cdot \epsilon.\tag{2.45}$$

Тогда получаем связь между напряжениями и деформациями

$$\sigma = (1 - D) {}^4C \cdot \cdot \epsilon\tag{2.46}$$

и выражение для плотности скорости высвобождения энергии поврежденности

$$Y = \epsilon \cdot \cdot {}^4C \cdot \cdot \epsilon\tag{2.47}$$

Это базовое классическое представление для упруго-повреждаемого материала, не учитывающее накопления остаточных деформаций, эффекта закрытия микротрещин и вязких свойств. Но для ряда задач (квазистатическое монотонное нагружение) такая формулировка пригодна. Но, не будем ограничиваться этим и приведем другие формы плотности свободной энергии Гельмгольца, которые бы учли свойства вязкости и, что более важно для настоящей работы - нелокальность накопления поврежденности. Но с целью соблюдения последовательности изложения приведем сначала основные законы поврежденности и критерии эквивалентных мер деформируемого состояния, которые потребуются при определении явных выражений для плотности свободной энергии Гельмгольца, вид которой для вязко-упруго-повреждаемого и стареющего вязко-упруго-повреждаемого материалов зависит от выбора закона поврежденности.

Глава 3

Законы поврежденности

3.1 Введение в механику повреждений

Появление механики континуальных повреждений относят к 1958 году, когда Л.М. Качановым [11] был введен термин “сплошность”, впоследствии замененный Ю.Н. Работновым [22] на поврежденность. Сплошность ψ - скалярная мера трещиноватости материала определенная от 1 до 0, причем 1 соответствует материалу без повреждений, а 0 моменту разрушения материала. Поврежденность ω в обозначениях Работнова, а в мировой литературе обозначаемая d или, чаще всего, D^1 (от английского слова damage - повреждение, разрушение, дефект) определяется чаще всего от 0 - неповрежденный материал до 1, соответствующей разрушению. Здесь речь идет о скалярной поврежденности, не учитывающей ориентированность дефектов.

В работах Качанова и Работнова, поврежденность рассматривалась как функция прежде всего меры напряженного состояния $\tilde{\sigma}$, температуры T , времени t и некоторых внутренних (структурных) параметров Ξ_n , характеризующие необратимые изменения в теле (например, рассеяние энергии вследствие ползучести, ориентированность упрочнения и т.д.)

$$D = D(\tilde{\sigma}, T, t, \Xi_n) \quad (3.1)$$

Так как хрупкое разрушение связано с всесторонним растяжением, а вязкое - со всесторонним сжатием, то приемлемой мерой напряженного состояния $\tilde{\sigma}$ может быть первое главное напряжение

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 \quad (3.2)$$

Этот критерий дает хорошие результаты, но при условии, что все главные напряжения положительны. Эксперименты показали, что в противном случае данный критерий не соответствует действительности. Так же ряд экспериментов показал, что на развитие поврежденности влияют гидростатическое давления σ

¹Этим обозначением будем пользоваться в дальнейшем

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.3)$$

и интенсивность касательных напряжений τ_i

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \quad (3.4)$$

Это учтено, например, в критерии Сдобырева

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3}\tau_i) \quad (3.5)$$

и критерии Трунина

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3}\tau_i) a^{1-2\eta}, \text{ где } \eta = \frac{3\sigma}{\sigma_1 + \sqrt{3}\tau_i}, \quad (3.6)$$

где постоянная $0 < a \leq 1$ определяется по опытным данным.

Но эти критерии не точны с точки зрения концепции эффективных напряжений. Несмотря на то, что Качановым был введен термин эффективных (приведенных) напряжений $\underline{\underline{\sigma}}^*$

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \frac{1}{1-D} \underline{\underline{\sigma}}, \quad (3.7)$$

влияние поврежденности на связь напряжений и деформаций не учитывалась, то есть из уравнений равновесия теории упругости находились поля напряжений и деформаций, а уже по найденным полям вычислялась мера поврежденности. На сегодняшний день доказано, что реальные напряжения в материале являются эффективными, а это значит, что рассмотренные силовые критерии для аргумента поврежденности, работающие не с эффективными напряжениями, а с линейно связанными с деформациями, не верны. Но те же критерии не будут работать, если вместо псевдо-напряжений, подставить эффективные напряжения. Так как квази-хрупкие материалы имеют область разупрочнения - нисходящую ветвь на кривой деформирования, то каждой мере напряженного состояния будет соответствовать одна или две точки меры деформированного состояния, если знак напряжения учитывается и одна, две, три или четыре, если не учитывается. Отчасти поэтому от силовых критериев отказались и появились деформационные критерии.

3.2 Эквивалентная мера деформированного состояния

Эквивалентная мера деформированного состояния $\tilde{\varepsilon}$ – здесь скалярная переменная определяющая меру деформированного состояния при описании процессов накопления повреждений. В задачах расчета поведения квази-хрупких материалов очень

важно правильно выбрать меру деформированного состояния, по которой будет оцениваться мера поврежденности. При выборе меры поврежденности важно учитывать то, что прочность подобных материалов на сжатие значительно превышает прочность на растяжение, а также то, что повреждения, как показали эксперименты, накапливаются и при гидростатическом сжатии образцов. Заметим, что выбор меры деформированного состояния существенен при сложном деформированном состоянии. При одноосном растяжении - сжатии, можно пользоваться компонентой деформации в направлении действия нагрузки (например, ε_x) с коэффициентом κ , определяющим отношение прочности на сжатие к прочности на растяжение.

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_x, & \text{если } \varepsilon_x > 0; \\ \frac{1}{\kappa} \varepsilon_x, & \text{если } \varepsilon_x < 0; \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\kappa = \frac{\sigma_{br}^-}{\sigma_{br}^+}, \quad (3.9)$$

где σ_{br}^- - прочность материала при одноосном сжатии, а σ_{br}^+ - прочность при одноосном растяжении. Обратимся теперь к сложному деформированному состоянию.

Рассмотрим наиболее распространенные эквивалентные меры деформированного состояния, выведем свою меру деформируемого состояния и сравним их при различных нагружениях. Итак, рассматривается сложное деформированное состояние, описываемое симметричным тензором деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ в ортогональном декартовом базисе

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \varepsilon_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + \varepsilon_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \varepsilon_{23}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + \varepsilon_{13}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1), \quad (3.10)$$

которому поставим в соответствие следующую матрицу

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Так же нам понадобятся главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, объемная деформация θ или первый $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$, второй $I_2(\boldsymbol{\varepsilon})$ и третий $I_3(\boldsymbol{\varepsilon})$ инварианты деформации

$$I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \theta = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (3.12)$$

$$I_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3), \quad (3.13)$$

$$I_3(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (3.14)$$

шаровая часть тензора деформации $\theta/3\mathbf{e}$, девиатор деформаций \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3}\mathbf{E}, \quad (3.15)$$

и второй инвариант девиатора деформации $I_2(\mathbf{e})$

$$I_2(\mathbf{e}) = - \left(\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\theta \right) \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\theta \right) + \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\theta \right) \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta \right) + \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\theta \right) \left(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\theta \right) \right), \quad (3.16)$$

который сводится к

$$I_2(\mathbf{e}) = \frac{1}{6} \left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 \right). \quad (3.17)$$

Для дальнейших выкладок нам понадобятся еще тензор упругих модулей и тензор упругих податливостей для изотропного материала. Из соображений удобства приведем выражения для этих тензоров как через коэффициенты Ламэ, так и через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Часто удобно работать не с тензором четвертого ранга, а с симметричной матрицей размерностью шесть на шесть, полностью характеризующей тензора упругости четвертого ранга с учетом всех имеющихся симметрий. Представим тензор упругих модулей ${}^4\mathbf{C}$ и тензор упругих податливостей ${}^4\mathbf{H}$ в виде

$${}^4\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (3.18)$$

$${}^4\mathbf{H} = H_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (3.19)$$

Тогда матрица размерностью шесть на шесть, соответствующая тензору упругих модулей представима в следующем виде

$${}^4\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ \dots & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ \dots & \dots & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ \dots & \dots & \dots & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_{2323} & C_{2313} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{1313} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

если вектора напряжений и деформаций представляются в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} \sim \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Такую же структуру матрица имеет и для тензора упругих податливостей. Будем называть эти симметричные матрицы матрицей жесткости \mathbf{C} и матрицей податливости \mathbf{H} - обратной матрицы жесткости. Запишем их для изотропного материала через коэффициенты Ламэ λ и μ

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 2\mu & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2\mu & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2\mu \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2\mu} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν – альтернативные упругие константы, называемые еще техническими константами упругости связаны с коэффициентами Ламэ соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.24)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.25)$$

и обратно

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.26)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.27)$$

Запишем матрицы C и H для изотропного материала через модуль Юнга и коэффициент Пуассона

$$C = \begin{pmatrix} \frac{E(\nu - 1)}{2\nu^2 + \nu - 1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2 + \nu - 1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2 + \nu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \frac{E(\nu - 1)}{2\nu^2 + \nu - 1} & -\frac{E\nu}{2\nu^2 + \nu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \frac{E(\nu - 1)}{2\nu^2 + \nu - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{E}{1 + \nu} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{E}{1 + \nu} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{E}{1 + \nu} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1+\nu}{E} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Добавим еще одно выражение, которое будет удобно для дальнейшей работы, объемный модуль упругости K

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.30)$$

Теперь, когда все необходимые выражения введены, перейдем непосредственно к рассмотрению различных эквивалентных мер деформированного состояния. Вместо термина “эквивалентная мера деформированного состояния” в дальнейшем, для краткости, будем использовать аббревиатуру “ЭМДС”. Самым простым критерием при сложном деформированном состоянии является первая главная деформация ε_1 . При условии, что первая главная деформация больше нуля. Еще можно ввести условие $\varepsilon_1 > \frac{\varepsilon_3}{\kappa}$, про которое часто забывают при анализе прочности хрупких и квази-хрупких материалов. Итак, вот два простейших критерия, назовем их критериями “максимальной”² деформации

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1, \text{ если } \varepsilon_1 > 0. \quad (3.31)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1 > 0 \text{ и } |\varepsilon_3| < \kappa\varepsilon_1; \\ \frac{1}{\kappa}\varepsilon_3, & \text{если иначе;} \end{cases} \quad (3.32)$$

Критерий (3.31) был предложен Мариоттом и носит его имя. Такие меры редко встречаются в научных работах, но вполне применимы, как будет показано ниже, при решении технических задач.

Следующая мера деформации связана с упругим потенциалом неповреждаемого материала или с плотностью скорости высвобождения энергии поврежденности, что, как было показано выше, в главе термодинамическое описание, при определенном выборе плотности свободной энергии Гельмгольца, одно и то же. Свяжем эквивалентную меру деформированного состояния изотропного материала с плотностью скорости высвобождения энергии поврежденности Y , как это было предложено Жаном Лемэтром и Родригэ Десморатом [55], а критерий будем называть энергетическим

²кавычки здесь поставлены, потому что при определении максимальной деформации используется коэффициент κ

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{Y}{E'}}. \quad (3.33)$$

В знаменателе для обезразмеривания ЭМДС стоит некая мера тензора упругих модулей E' . Для изотропного материала, например, выбирают $E' = E$, для любого другого материала, это может быть норма тензора жесткости или среднее модулей Юнга и т.п. В развернутом виде формула (3.33) записывается

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{E'}}. \quad (3.34)$$

Еще один вид для этой меры можно получить, записав энергию диссипации в явном виде через коэффициенты Ламэ или через коэффициент Пуассона (приведем для изотропного материала)

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\lambda + \mu) ((\lambda + \mu)I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2) - 2\lambda I_2(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\mu(3\lambda + 2\mu)}} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{(1 - \nu)I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2) - 2\nu I_2(\boldsymbol{\varepsilon})}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (3.36)$$

Эти выражения в некоторых случаях нагляднее и удобнее в применении. Отметим, что во второй формуле фигурирует только коэффициент Пуассона. Безусловный плюс этой ЭМДС - тесная связь с термодинамикой процесса накопления повреждений. При таком выборе меры деформации, поврежденность будет зависеть только от энергии диссипации поврежденности и упругих модулей неповрежденного материала. Минус такого выбора ЭМДС заключается в симметричности деформаций, т.е. знак не учитывается и растяжения равные по модулю сжатию вносят равный вклад в меру поврежденности. Для рассматриваемого класса материалов, как уже упоминалось раньше прочность на растяжение значительно ниже прочности на сжатие. Поэтому при сложном деформированном состоянии энергетический критерий не верно описывает рост поврежденности.

Запишем тензор деформации в базисе главных значений в виде, часто используемом в механике континуальных повреждений

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^- + \boldsymbol{\varepsilon}^+, \quad (3.37)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ - тензор деформации, составленный из отрицательных главных значений исходного тензора деформации, а $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ - тензор, составленный из положительных главных значений исходного тензора деформации. Чтобы учесть значительную асимметрию прочности квази-хрупких материалов, в энергетической мере (3.33) вместо полной энергии диссипации Y подставим диссипацию энергии вследствие растяжения

Y^+ , которая связана с ϵ^+ , тогда получим меру, которую будем называть модифицированной энергетической мерой³

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{\epsilon^+ \dots \hat{C} \dots \epsilon^+}{E'}}. \quad (3.38)$$

Здесь шляпка над тензором упругих модулей означает, что тензор записан в главном декартовом базисе тензора деформации, т.е.

$${}^4\hat{C} = ({}^4Q)^T \dots {}^4C \dots ({}^4Q), \quad (3.39)$$

где введены следующие обозначения: 4Q - тензор поворота четвертого ранга, составленный из тензоров поворота второго ранга P следующим образом

$$\underline{\underline{{}^4Q}} = (PP)^{T'}, \text{ где } T' : A_{ijkl}^{T'} = A_{ikjl}. \quad (3.40)$$

А сам P - это тензор поворота, приводящий тензор деформации к главному базису

$$\hat{\epsilon} = P^T \cdot \epsilon \cdot P \quad (3.41)$$

Для изотропного материала тензор упругих модулей инвариантен относительно поворотов, поэтому для изотропного материала модифицированная мера примет вид

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{\epsilon^+ \dots {}^4C \dots \epsilon^+}{E}}. \quad (3.42)$$

Ясно, что энергетическая и модифицированная энергетическая меры совпадают при положительности всех главных значений тензора деформаций, и различны, если это не так. Еще одна мера деформации, которая учитывает только главные деформации растяжения, была предложена Джаки Мазарсом [57] в виде

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle^2 + \langle \epsilon_2 \rangle^2 + \langle \epsilon_3 \rangle^2}, \quad (3.43)$$

где угловые скобки - скобки Мак Эйли (Mc Auley), возвращающие значение аргумента, если последний больше нуля и возвращающие нуль при отрицательном аргументе

$$\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}. \quad (3.44)$$

Преимущество модифицированной энергетической меры деформации и меры Мазарса перед энергетической мерой в том, что они учитывают асимметрию прочностных

³В литературе автору такая мера не встречалась, но встречались подобные.

свойств и дают результаты более близкие к экспериментам. Но учет асимметрии в этих моделях сводится к учету только деформаций растяжения и эти критерии непригодны в задачах о гидростатическом сжатии, когда все главные значения тензора деформации отрицательны.

Рассмотрим еще одну меру деформации, которая достаточно часто используется при описании поврежденности - мера де Ри [45] и Пирлингса [59], предложенная Вильямсом для анализа напряженного состояния полимеров в 1973 году. В отличие от энергетической меры Лемэтра и меры Мазарса, эта мера учитывает асимметрию прочностных свойств с наперед заданным коэффициентом κ , который характеризует, как уже говорилось выше, отношение прочности при сжатии к прочности при растяжении.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\kappa - 1}{2\kappa(1 - 2\nu)} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{12\kappa}{(1 + \nu)^2} I_2(\boldsymbol{e})} \quad (3.45)$$

При приближении к единице параметра прочности κ , выражение для меры деформации вырождается в

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{-3 I_2(\boldsymbol{e})}{(1 + \nu)^2}} = \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}{2(1 + \nu)^2}}, \quad (3.46)$$

что не очень точно описывает поведение изотропного по прочности материала, но это, в общем, не является минусом, т.к. не имеет смысла применять меру де Ри для описания изотропных по свойствам материалов.

Перепишав меру Сдобырева (3.5) в терминах деформации, получим следующую меру

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \left(\sqrt{3} I_2(\boldsymbol{e}) + \varepsilon_1 \right). \quad (3.47)$$

Перепишав меру Трунина (3.6) в терминах деформации, получим меру

$$\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{\lambda}{2} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \left(\sqrt{3} I_2(\boldsymbol{e}) + \varepsilon_1 \right) \right) a^\eta, \quad (3.48)$$

где

$$\eta = 1 - \frac{2(3\lambda + 2\mu) I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\frac{\lambda}{2} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \left(\sqrt{3} I_2(\boldsymbol{e}) + \varepsilon_1 \right)} \quad (3.49)$$

Попробуем ввести свои меры деформированного состояния, которые бы обладали плюсами вышеприведенных моделей и не имели бы ограничений по применимости. Для начала обобщим меру Мазарса. С математической точки зрения, эта мера есть

евклидова норма вектора положительных главных деформаций, если обобщить это на разные нормы, то мы получим набор различных ЭМДС:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt[p]{\langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p}. \quad (3.50)$$

При $p = \infty$, например, получим приведенную выше меру главных деформаций растяжения (3.31), при $p = 1$, например, получим

$$\tilde{\varepsilon} = I_1(\varepsilon^+) \quad (3.51)$$

и так далее. Назовем эту меру расширенной мерой Мазарса.

Пойдем дальше в расширении подхода Мазарса и учтем в обобщенной мере отрицательные главные деформации с коэффициентом обратным κ . Такую меру назовем обобщенной мерой Мазарса.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt[p]{\langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p + \frac{1}{\kappa^p} (|\langle -\varepsilon_1 \rangle|^p + |\langle -\varepsilon_2 \rangle|^p + |\langle -\varepsilon_3 \rangle|^p)}. \quad (3.52)$$

Отметим, что последние меры (3.50) и (3.52) не встречались автору в литературе.

Подводя итог, приведем все рассмотренные эквивалентные меры деформированного состояния, отметим их достоинства и недостатки, а также приведем изоповерхности соответствующие этим мерам.

Меры деформации

Энергетическая мера

Год	1991
Авторы	Jean Lemaitre, Gilles Pijaudier-Cabot, G. Chaboche
Формула	$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{\dots} {}^4 C^{\dots} \varepsilon}{E}}$
Преимущества	Термодинамическое обоснование выбора меры деформации – диссипация энергии поврежденности.
Недостатки	Неправдоподобная поверхность разрушения, не учитывает асимметрию прочностных свойств.

Модифицированная энергетическая мера

Формула	$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{+\dots} {}^4 C^{\dots} \varepsilon^+}{E}}$
Преимущества	Термодинамическое обоснование выбора меры деформации – диссипация энергии поврежденности, относящейся к растяжению.
Недостатки	Мера неприменима при гидростатическом сжатии.

Мера Мазарса

Год	1986
Авторы	Jacky Mazars
Формула	$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2}$
Преимущества	Простота, учтена асимметрия прочности.
Недостатки	Мера неприменима при гидростатическом сжатии.

Расширенная мера Мазарса

Формула	$\tilde{\varepsilon} = \sqrt[p]{\langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p}$
Преимущества	Простота, учтена асимметрия прочности, лучшее совпадение с экспериментальными данными κ
Недостатки	Мера неприменима при гидростатическом сжатии.

Мера дэ Ри

Год	1973
Авторы	Williams, de Vree, Peerlings
Формула	$\tilde{\varepsilon} = \frac{\kappa-1}{2\kappa(1-2\nu)} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{(\kappa-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{12\kappa}{(1+\nu)^2} I_2(\boldsymbol{\varepsilon})}$
Преимущества	Асимметрия прочностных свойств учитывается с наперед заданным коэффициентом κ
Недостатки	Не описывает некоторые экспериментальные данные.

Обобщенная мера Мазарса

Формула	$\tilde{\varepsilon} = \sqrt[p]{T(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{\kappa^p} C(\boldsymbol{\varepsilon})}$, где $T(\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p$ и $C(\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle -\varepsilon_1 \rangle ^p + \langle -\varepsilon_2 \rangle ^p + \langle -\varepsilon_3 \rangle ^p$
Преимущества	Асимметрия прочностных свойств учитывается с наперед заданным коэффициентом κ
Недостатки	Не описывает некоторые экспериментальные данные.

На следующих графиках представлены изоповерхности меры деформированного состояния для плоского деформированного состояния.

На рисунке 3.1 представлена линии равного уровня ЭМДС для энергетической меры деформации.

На рисунке 3.2 представлена линии равного уровня ЭМДС для модифицированной энергетической меры деформации.

На рисунке 3.3 представлена линии равного уровня ЭМДС для меры Мазарса.

Линии равного уровня ЭМДС для обобщенной меры Мазарса представлены на рисунках 3.4 ($p = 2$) и 3.5 ($p = 3$).

На рисунке 3.6 представлена линии равного уровня ЭМДС для меры дэ Ри и Пирлингса.

На рисунке 3.7 для сравнения представлены поверхности разрушения в пространстве главных напряжений при сохранении нулевым одного из главных напряжений, взятые из работы [63].

На рисунке 3.8 сопоставлены мера дэ Ри и Вильямса, обобщенная мера мазарса и мера, объединяющая в пропорции $\alpha : (1 - \alpha)$ меру дэ Ри и обобщенную меру Мазарса

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha \tilde{\varepsilon}_W + (1 - \alpha) \tilde{\varepsilon}_M \quad (3.53)$$

где $\tilde{\varepsilon}_W$ - мера дэ Ри, а $\tilde{\varepsilon}_M$ - обобщенная мера Мазарса

с экспериментальными данными в пространстве главных напряжений при сохранении нулевым одного из главных напряжений.

Как видно из экспериментальных данных, ни одна из предложенных и рассмотренных мер не могут в точности описать все возможные экспериментальные данные. Но естественно, на фоне всех рассмотренных ЭМДС можно выделить, как наиболее универсальную - меру дэ Ри и Пирлингса 3.45 (хорошо сопоставимую с экспериментами Гашона и Розенталя - Глюклиха), а из предложенных - расширенную меру Мазарса 3.52, но как показало сопоставление с экспериментом эта мера описывает поверхности разрушения достаточно плохо. Удобство этих мер в возможности задания степени анизотропии прочностных свойств, чего не учтено в остальных рассмотренных мерах. Возможно также использование различной комбинации рассмотренных мер для получения лучшей сходимости результатов с экспериментами.

Отметим, что все эти меры были интегрированы к пакет анализа определяющих уравнений материалов CES – Constitutive Equation Study и конечно-элементный программный комплекс PANTOCRATOR, создаваемые А. С. Семеновым и другими.

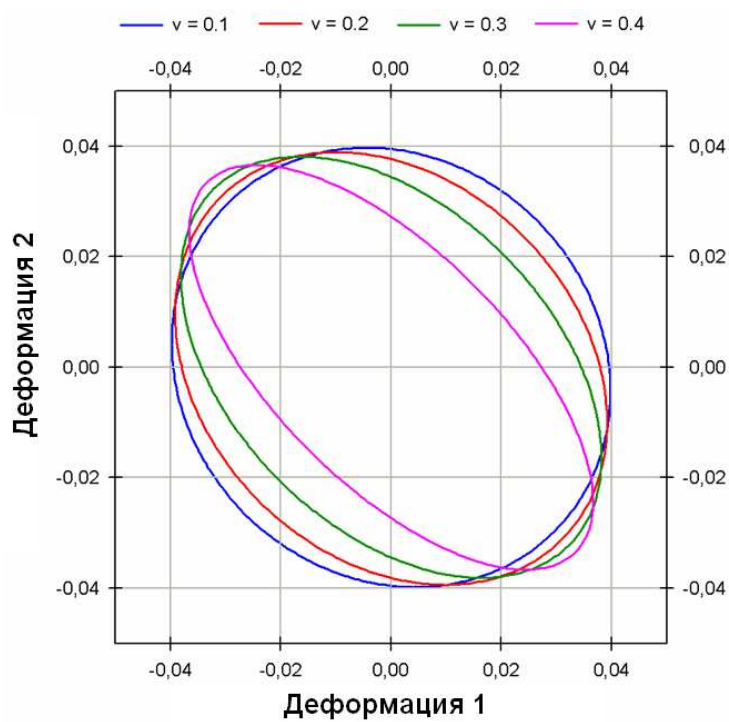


Рис. 3.1. Линии равного уровня ЭМДС для энергетической меры деформации ($\nu = 0.1$; $\nu = 0.2$; $\nu = 0.3$; $\nu = 0.4$.)

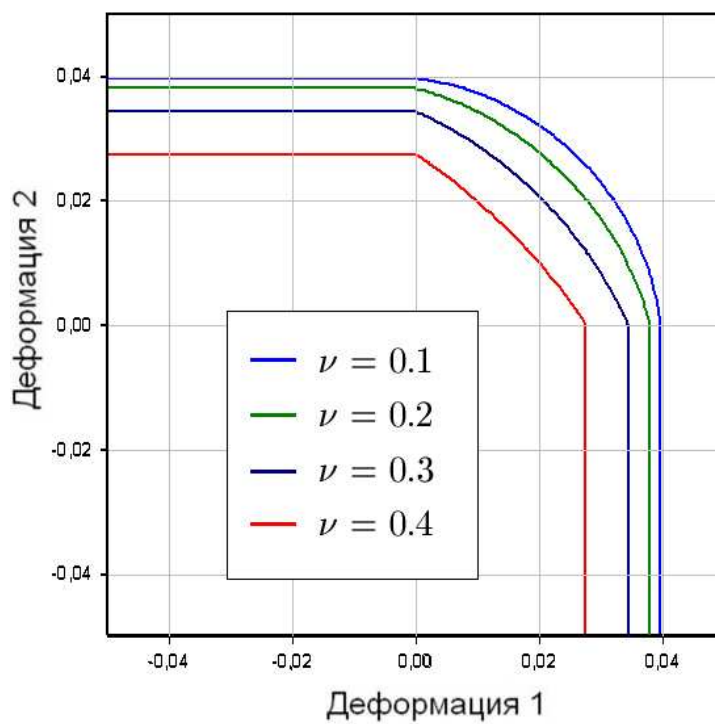


Рис. 3.2. Линии равного уровня ЭМДС для модифицированной энергетической меры деформации ($\nu = 0.1$; $\nu = 0.2$; $\nu = 0.3$; $\nu = 0.4$.)

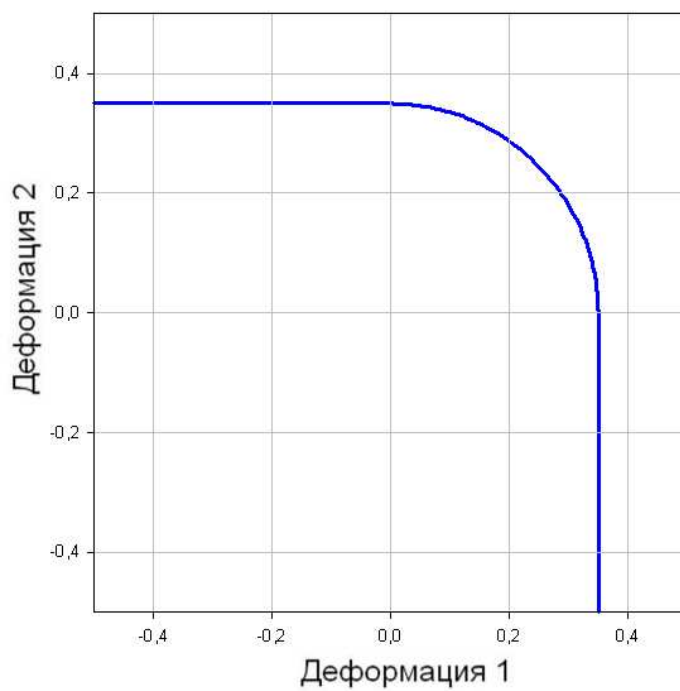


Рис. 3.3. Линии равного уровня ЭМДС поверхности для меры Мазарса

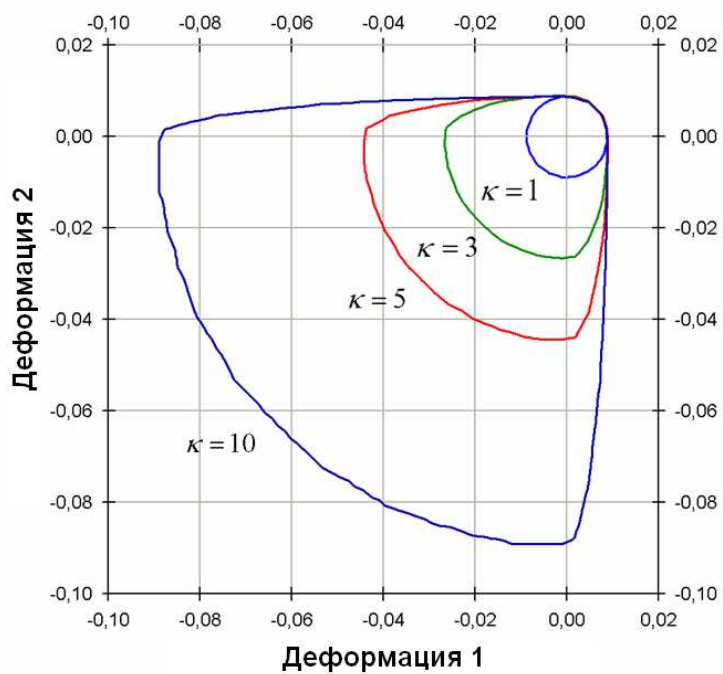


Рис. 3.4. Линии равного уровня ЭМДС для обобщенной меры Мазарса ($p = 2$)

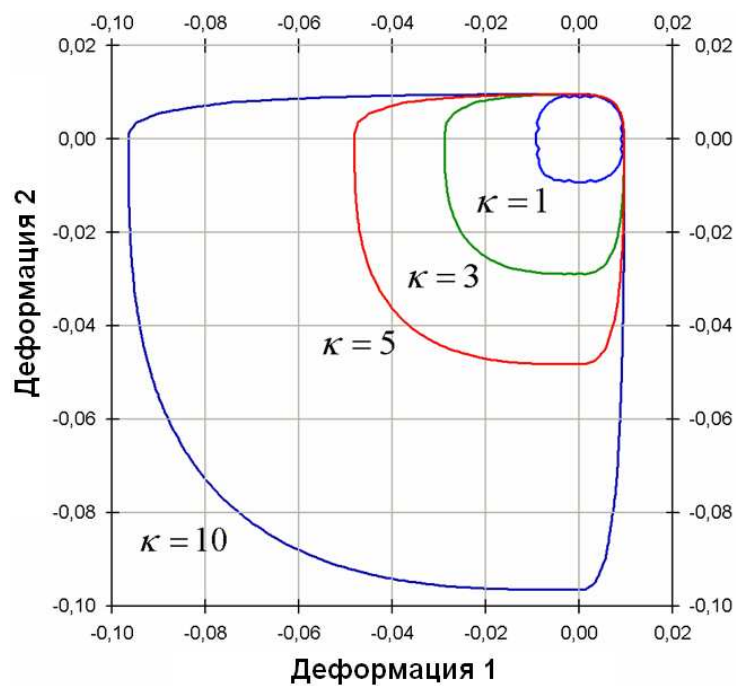


Рис. 3.5. Линии равного уровня ЭМДС для обобщенной меры Мазарса ($p = 3$)

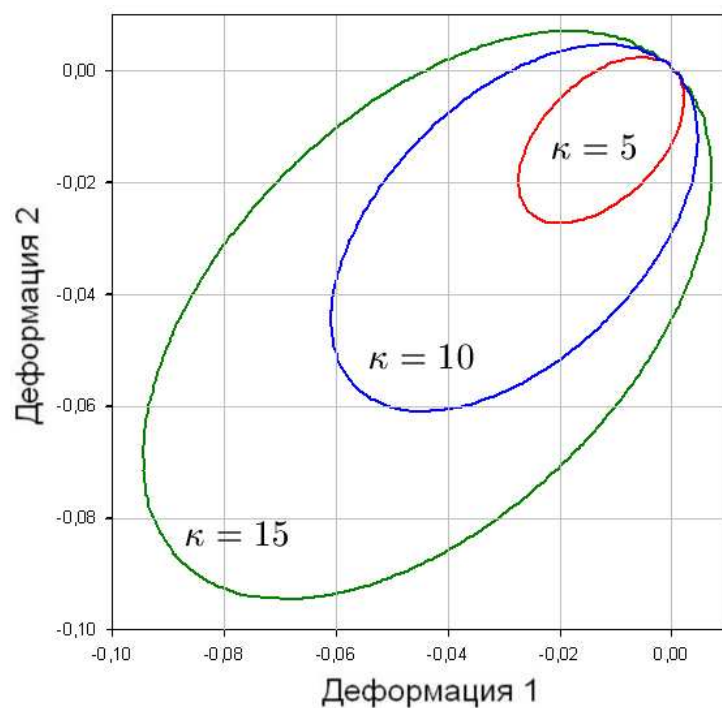


Рис. 3.6. Линии равного уровня ЭМДС для меры дэ Ри и Пирлингса ($\kappa = 5$; $\kappa = 10$; $\kappa = 15$)

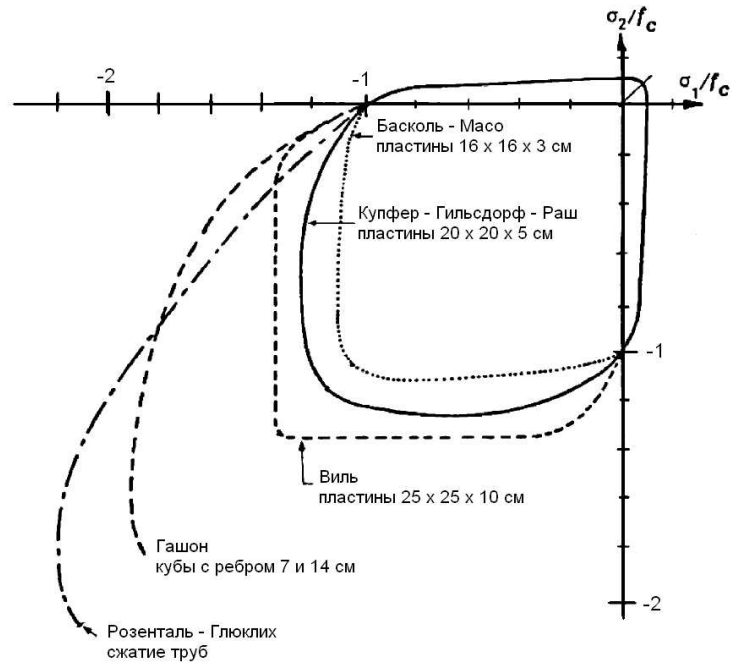


Рис. 3.7. Экспериментальные поверхности разрушения для различных образцов при $\bar{\sigma}_3 = 0$

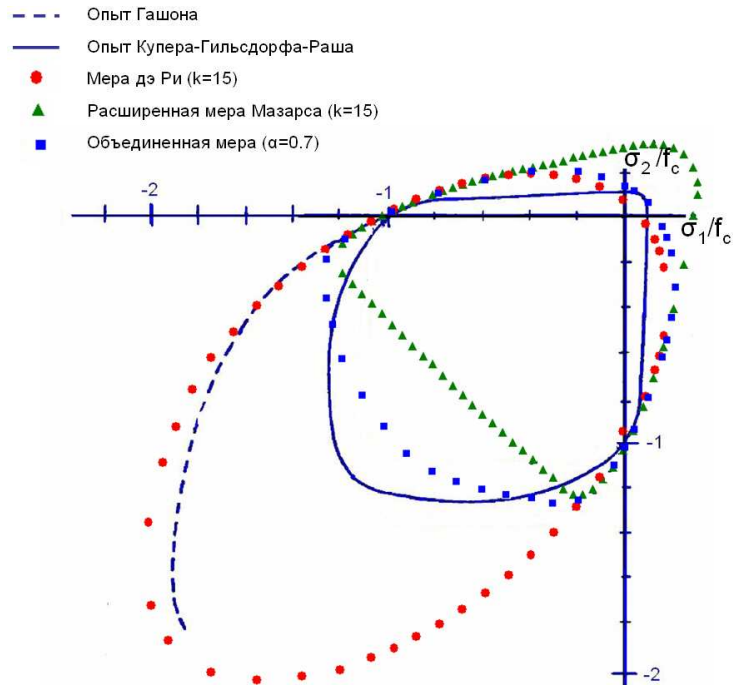


Рис. 3.8. Экспериментальные поверхности разрушения в сравнении с различными ЭМДС

3.3 Законы поврежденности

После того как определена эквивалентная мера деформированного состояния в данной точке, остается определить меру деградации материала в этой точке, вычислив поврежденность. В данной работе, как уже упоминалось ранее, рассматривается изотропная поврежденность, т.е. мера деградации материала описывается скалярной неотрицательной величиной, меняющейся от 0 до 1, которая определяется по скалярной же мере тензора деформации в данной точке или в некоторой окрестности данной точки. Поврежденность в уравнения связи между напряжениями и деформациями входит, как множитель тензора упругих модулей, т.е. влияет в равной мере на каждый его компонент

$$\sigma = (1 - D) {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \varepsilon \quad (3.54)$$

значит связь напряжений и деформаций может быть записана так

$$\sigma = {}^4\tilde{\mathbf{C}}(\varepsilon) \cdot \cdot \varepsilon, \quad (3.55)$$

где ${}^4\tilde{\mathbf{C}}(\varepsilon)$ эффективный тензор упругих модулей, т.е. тензор упругости поврежденного материала, составленного из тех же компонент, что и исходный тензор упругих модулей ${}^4\mathbf{C}$, но модули упругости и сдвига заменены на эффективные $\tilde{E}_x = (1 - D)E_x$, $\tilde{E}_y = (1 - D)E_y$, $\tilde{E}_z = (1 - D)E_z$, $\tilde{G}_{xy} = (1 - D)G_{xy}$, $\tilde{G}_{yz} = (1 - D)G_{yz}$, $\tilde{G}_{xz} = (1 - D)G_{xz}$.

3.3.1 Основные понятия и предположения

Прежде чем перейти к описанию различных законов поврежденности, определим, что понимается под термином поврежденность, какие физические процессы она характеризует, введем понятие элементарного представительного объема и приведем ограничения и предположения, используемые в механике континуальных повреждений. Приведем определения различных авторов для термина поврежденности:

- “Поврежденность - сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины - в упругости, дислокации - в пластичности, микропоры - при ползучести, поверхностные микротрещины - при усталости).”

Maugin G.A. [56], Радаев Ю.Н. [24]

- “Поврежденность в твердых материалах, с механической точки зрения, есть возникновение и рост разрывных полей микропор и микротрещин, которые считаются непрерывными при рассмотрении больших масштабов.”

J. Lemaitre, R. Desmorat [55]

У признанного родоначальника механики континуальных повреждений Л.М. Качанова (1958) [11] поврежденность материала, характеризующая развитие неопределяемого абстрактного понятия “трещиноватости”, в первых работах характеризуется некоторым скаляром - сплошностью ψ , изменяющейся от 1 (при отсутствии повреждений) до 0 (сплошность, соответствующая полной потере жесткости материала) включительно. Термин сплошность в работах Ю.Н. Работнова (1959) [22] заменен на поврежденность $\omega = 1 - \psi$ и в наше время этот термин приобрел наибольшее распространение.

В МДТТ, и в частности в МКП⁴, вводится понятие представительного объемного элемента (ПОЭ - в англ. RVE - Representative Volume Element) - внутри которого все свойства могут быть представлены гомогенизированными переменными. Посредством ПОЭ устанавливается связь между мезо- и макро уровнем. Так как в МКП поврежденность описывается некоторой мерой (скалярной в изотропной поврежденности, тензором второго, четвертого и более высоких рангов в анизотропной поврежденности), являющейся осреднением количества, размера и формы микродефектов по какому-то объему, то введение понятия ПОЭ является необходимым условием построения стройной физической теории. Приведем некоторые определения ПОЭ, встречающиеся в литературе.

- “ПОЭ - образец, который (a) структурно типичен для всей неоднородной по составу структуре и (b) содержит достаточное количество включений для того, чтобы эффективные суммарные модули материала не зависели от поверхностных сил и перемещений и чтобы величины этих модулей была бы макроскопически одинаковыми.”

Р. Хилл [51]

- “ПОЭ - минимальный объем материала, который содержит статистически достаточное количество механизмов процессов деформации. Увеличение этого объема не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полей, описывающих эти механизмы.”

П.В. Трусов, И.Е. Келлер [25]

- “ПОЭ - это наименьший элемент объема композита, для которого макроскопическое представление через глобальные модули является достаточно аккуратной моделью для описания осредненной определяющей реакции материала.”

В.Д. Друган, Д.Р. Виллис [46]

- “ПОЭ определяется, как лабораторный образец такого минимального объема, что результаты полученные при исследовании этого образца могут быть использованы, как описывающие любые большие объемы этого материала.”

Д.Г.М. ван Меер [68]

- “ПОЭ должен быть настолько велик по сравнению с размерами зерен, чтобы определять эффективные значения напряжений и деформаций, но в тоже время и настолько мал, чтобы не скрывать макроскопической гетерогенности.”

⁴МКП - механика континуальных повреждений (CDM - Continuum damage mechanics)

П. Эвески [48]

Ж. Лемэтр определяет следующие количественные меры ПОЭ для различных материалов:

- Для большинства металлов ПОЭ - куб со стороной около 0.1 мм
- Для полимеров ПОЭ - куб со стороной около 1 мм
- Для дерева ПОЭ - куб со стороной около 10 мм
- Для бетона ПОЭ - куб со стороной около 100 мм
- Для гнейсовой горной породы ПОЭ - куб со стороной около 15 м

Разрывность поля повреждений мала по сравнению с размерами ПОЭ, но, конечно, велика по сравнению с межатомными расстояниями.

Поврежденность может быть разделена на два типа по размерам дефектов ее определяющих

1. Поврежденность на мезо-уровне (размеры дефектов сравнимы с размерами ПОЭ) называется пластической, если это возникновение и рост микрополостей под действием поля пластических деформаций на мезо-уровне, при постоянных нагрузках; она называется поврежденностью ползучести, когда она обусловлена повышением температуры и представлена внутризеренным разрушением связей в металлах; она называется малоциклово-усталостной поврежденностью, когда она вызвана приложением относительно высокой циклической нагрузки, индуцирующей мезо-пластические деформации.
2. Поврежденность на микро-уровне называется квази-хрупкой, когда нагружение монотонно, многоциклово-усталостной, когда нагружение - это большое количество повторяющихся циклов при относительно невысокой нагрузке. Керамики, бетон и металлы под действием циклической нагрузки не превышающей предел упругости (текучести) накапливают квази-хрупкие повреждения.

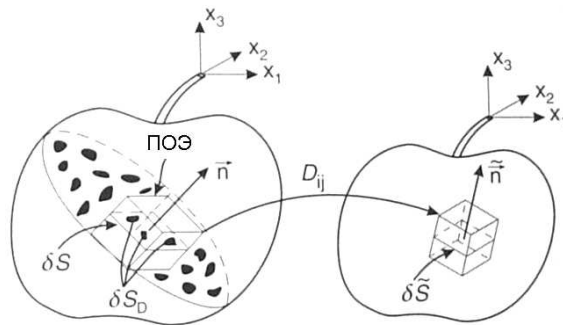


Рис. 3.9. Поясняющая иллюстрация к определению ПОЭ

В данной работе главным образом рассматривается квази-хрупкая поврежденность, в дальнейшем, просто поврежденность, которая, с физической точки зрения,

определяется через поверхностную плотность микротрещин и пересечение объемов микропор с плоскостью, пересекающей ПОЭ ортогонально нормали \mathbf{n} (см. рис. 3.9). Отсюда универсальное определение для поврежденности в направлении нормали \mathbf{n} есть максимальное отношение площади пересечения микро-пор и микро-трещин в ПОЭ с плоскостью ортогональной \mathbf{n} к той же площади в отсутствии микродефектов.

$$D(\mathbf{n}) = \max_x \left(\frac{\delta S_D(x)}{\delta S} \right), \quad (3.56)$$

где x - координата пересечения секущей плоскости с осью связанной с ориентацией ПОЭ (см. рис. 3.9). В случае изотропной поврежденности поврежденность не зависит от ориентации ПОЭ и определяется, как максимальная поврежденность по всем нормальям

$$D_{iso} = \max_{\mathbf{n}} D(\mathbf{n}) = \max_{\mathbf{n}, x} \left(\frac{\delta S_D(x)}{\delta S} \right). \quad (3.57)$$

Поврежденность, за редким исключением, нельзя непосредственно наблюдать и измерять так, как в физике и механике измеряется скорость, сила, температура, деформация. Дegradaция механических свойств может быть обнаружена в результате анализа реакций тела на различные внешние воздействия. Приведем список физических величин, которые изменяются при росте поврежденности

- Модули упругости **уменьшаются**.
- Твердость **уменьшается**.
- Предел пластичности **уменьшается** до или после упрочнения.
- Скорость ползучести **увеличивается**.
- Скорость распространения ультразвуковых волн **уменьшается**.
- Плотность **уменьшается**.
- Электрическое сопротивление **увеличивается**.

Зоны локализации повреждений успешно определяются методами акустической эмиссии [66]. Отметим, что прочностные свойства материала различны при растяжении и сжатии, это вызвано эффектом раскрытия микротрещин при растяжении и закрытия микротрещин при сжатии⁵.

Введение переменной поврежденности порождает понятие эффективных (приведенных) напряжений ([13], [55]). Рассмотрим случай одноосного растяжения-сжатия⁶ силой N . Площадь сечения неповрежденного материала есть S , для изотропно-поврежденного

⁵Здесь, для случай изотропной поврежденности, под сжатием подразумевается гидростатическое сжатие.

⁶без учета эффекта закрытия трещин.

материала эффективная площадь сечения есть $\tilde{S} = S - S_D$, где S_D - площадь микродефектов во всем сечении S . Поэтому осевое напряжение σ для материала с микродефектами запишется

$$\tilde{\sigma} = \frac{N}{\tilde{S}} = \frac{N}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{\sigma}{\left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (3.58)$$

В случае многоосного напряженного состояния в рамках модели изотропной поврежденности тензор эффективных напряжений так же связывается с тензором напряжений

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (3.59)$$

В заключении к этому параграфу приведем постулат эквивалентности деформаций, сформулированный Ж. Лемэтром в 1971 году.

“Любое уравнение относительно деформаций для поврежденного материала может быть получено так же, как и для неповрежденного материала путем замены обыкновенных напряжений на эффективные.”

Выше неоднократно упоминается, что в данной работе рассматривается простая модель поврежденности - изотропная поврежденность, не вносящая анизотропии в механические свойства материала. Очевидно, что это достаточно грубое упрощение, которое неприменимо, например, в случае неравномерного изменения направления действия нагрузки, но с технической точки зрения изотропная поврежденность предпочтительнее, если определение направления развития микродефектов не требуется, т.к. запас прочности изотропной теории выше по сравнению с теориями, учитывающими анизотропию свойств вследствие направленного развития микротрещин.

3.3.2 Уравнение равновесия

В материале подверженному нагружению в каждый момент времени можно выделить три области (см. рис. 3.10):

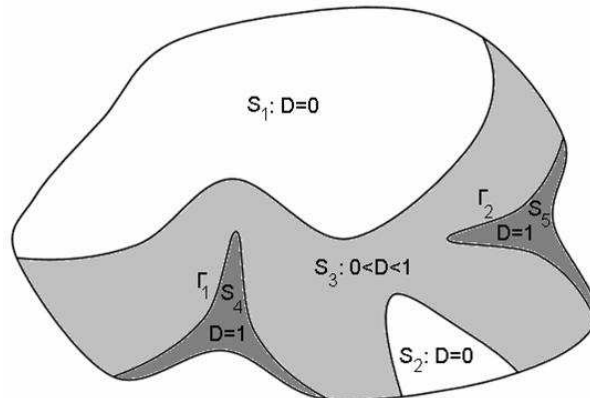


Рис. 3.10. Различные области в поврежденном теле

1. Область (Ω_1, Ω_2) , не накопившая повреждений, поврежденность остается на исходном уровне ($D = 0$), свойства материала такие же, как и до приложения нагрузки, как у исходного материала.
2. Область (Ω_3) , в которой накопились какие-то повреждения, но они не критичны, т.е. $0 < D < 1$.
3. Область (Ω_4, Ω_5) , в которой поврежденность достигла своего критического значения $D = 1$, в этой области отсутствуют любые механические связи и сопротивляемость.

Области, где поврежденность достигла своего критического значения, по сути, являются макротрещинами. Отсутствие сопротивляемости подразумевает, что напряжения в данной области отсутствуют для любых деформаций. Бессмысленно говорить об уравнениях равновесия в данных областях, в связи с этим введем внутреннюю границу Σ_D (здесь $\Sigma_D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$), на которой поставим условия равенства нулю вектора напряжений (см. рис. 3.10). Эта граница изменяется с ростом поврежденности.

Приняв классическое соотношение между напряжениями и деформациями для связного линейно-упруго-повреждаемого материала (см. главу 2)

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.60)$$

где для малых перемещений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) = (\nabla \mathbf{u})^s. \quad (3.61)$$

Пользуясь постулатом эквивалентности деформаций и концепцией эффективных напряжений, приведенными в параграфе 3.3.1, уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = 0 \quad (3.62)$$

может быть сформулировано в терминах перемещений без учета внутренних объемных сил следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 &\Leftrightarrow \\ \nabla \cdot \left((1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right) = 0 &\Leftrightarrow \\ (1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) \nabla \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla D(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 &\Leftrightarrow \\ (1 - D(\mathbf{u})) \nabla \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{u})^s - \nabla D(\mathbf{u}) \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{u})^s = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Уравнение (3.63) нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Это уравнение должно выполняться в каждой точке объема. Внутри областей, в которых поврежденность достигла своего предельного значения $D = 1$

уравнение (3.63) выполняется тождественно, поэтому эту область исключим из рассмотрения, а на ее границе поставим условие равенства нулю вектора напряжений

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} |_{\Sigma_D} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot ((1 - D)(\nabla \mathbf{u})^s) |_{\Gamma} = 0. \quad (3.64)$$

Решением уравнения (3.63) является поле перемещений \mathbf{u} в объеме Ω , удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot ((1 - D)(\nabla \mathbf{u})^s) |_{\Sigma_i} &= \mathbf{f}_i \\ \mathbf{u} |_{\Sigma_j} &= \mathbf{u}_j, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где \mathbf{f}_i силы приложенные на поверхности Σ_i , \mathbf{u}_j перемещения, приложенные на поверхности Σ_j . Решение этого уравнения представляется достаточно сложной задачей, даже в простейшем случае одноосного растяжения. Развитие вычислительной техники, в частности пакетов конечно-элементного моделирования привели к бурному развитию нелинейных законов во всех областях механики, ранее не рассматриваемых в силу сложности их применения к практическим задачам. В частности это привело и к развитию механики континуальных повреждений.

3.3.3 Законы эволюции

Квази-хрупкое разрушение - это общее название для процессов разрушения, при которых не возникают большие пластические деформации, но затраты энергии при таком разрушении требуется значительно больше, чем для образования трещины. Разрушение не является следствием роста одной доминантной магистральной трещины, а связано с образованием некоего ядра роста и слияние микродефектов в объеме, который много превосходит в конце концов образовавшуюся макротрещину. Иными словами, материал значительно “слабеет” в большой области (микродефекты растут и увеличиваются, переменная поврежденности растет в каждой точке этой области), на это уходит много энергии, и в конечной фазе образуется макротрещина (поврежденность достигает своего критического значения, т.е. единицы) внутри этой “ослабленной” области, на образование которой также необходима какая-то энергия. Как результат, наблюдается постепенное уменьшение сопротивляемости деформациям без резких потерь прочности в идеально хрупком материале. Примеры материалов подверженных квази-хрупкому разрушению: бетоны, скальные грунты (горные породы), некоторые керамики, композиты с керамической матрицей, морской лед.

Из принципа максимума диссипации [55], [69], уравнение эволюции поврежденности записывается в виде

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y}, \quad (3.66)$$

где F_D - потенциал поврежденности, λ - множитель Лагранжа, $-Y$ - ассоциированная с поврежденностью переменная - плотность скорости высвобождения энергии

(трещинодвижущая сила). Существует масса возможных вариантов форм функции F_D , основанных на экспериментальных данных и созданных для различных задач. В случае отсутствия у материала вязких свойств и отказе от энергетического критерия (см. ниже), уравнение (3.66) может быть переписано в простой форме [60]

$$\boxed{\dot{D} = g(\tilde{\varepsilon}, D) \dot{\tilde{\varepsilon}}}. \quad (3.67)$$

Чтобы связать поврежденность с историей деформирования вводится функция разрушения

$$f(\tilde{\varepsilon}, k) = \tilde{\varepsilon} - k \quad (3.68)$$

и определяемая ею поверхность нагружения

$$f(\tilde{\varepsilon}, k) = 0, \quad (3.69)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ - эквивалентная мера деформированного состояния, подробно рассмотренная в параграфе 3.2, а k - актуальное пороговое значение эквивалентной мерой, т.е. максимальное значение ЭМДС, достигнутое за историю деформирования

$$k = \max_t [\tilde{\varepsilon}(t)]. \quad (3.70)$$

Поверхность нагружения определяется в тензорном пространстве деформаций, аналогично вводимой в теории пластичности в пространстве напряжений, ограничивает область деформаций, при которых поведение материала линейно упруго. Форма и размеры области нагружения определяются в зависимости от выбора эквивалентной меры деформаций и начальной пороговой переменной $k = k_0$, соответственно. Внутри области нагружения ($f(\tilde{\varepsilon}, k) < 0$) не происходит роста поврежденности и поведение материала упруго. В рамках рассматриваемой модели, поврежденности растет, т.е. рост и аккумуляция микродефектов происходит только при достижении эквивалентной мерой деформаций порогового уровня, т.е. на поверхности нагружения $f(\tilde{\varepsilon}, k) = 0$. Такое предположение вводится в силу того, что экспериментальные данные для квази-хрупких и пластических материалов показали, что повреждения накапливаются только при достижении упругими (пластическими) деформациями некоторого порогового уровня. Так как для возникновения каждого микродефекта требуется конечный запас энергии, причем значение этой энергии ограничено снизу не нулевым значением, называемым **запасенной пороговой энергией** (ω_D). Поэтому функция разрушения может быть также записана в терминах энергии

$$f(\tilde{\omega}, \omega_D) = \tilde{\omega} - \omega_D, \quad (3.71)$$

где $\tilde{\omega}$ - энергия актуального деформированного состояния. Но в данной работе с целью сохранения общности рассматривается вариант функции нагружения (3.68).

Обратимся к эксперименту и постараемся обосновать и объяснить с физической точки зрения введение поверхности нагружения. На рисунке 3.11 представлен типичный график зависимости напряжений от деформации для квази-хрупкого материала при нескольких циклах нагрузки-разгрузки с постоянным интервалом (см., например, Mazars and Pijaudier-Cabot, 1989).

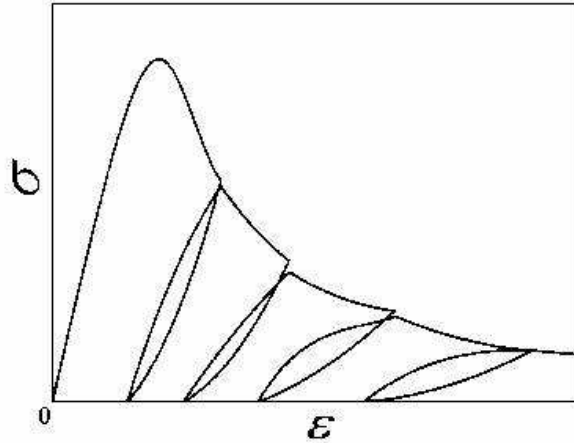


Рис. 3.11. Типичная кривая деформирования квази-хрупкого материала

Деформация на графике - это некая усредненная деформация равная отношению перемещений между двумя точками к исходному расстоянию между ними. При малых деформациях закон практически линейный. При дальнейшем росте деформации, угол между касательной к кривой деформирования и осью абсцисс уменьшается и становится равным нулю при достижении предела прочности. При дальнейшем увеличении деформаций, напряжения начинают уменьшаться. На интервале разупрочнения материала четыре раза производилась разгрузка - нагрузка. Средний наклон к кривой разгрузки - нагрузки при каждом последующем разгрузении-нагружении становился меньше - это означает, что в материале накапливалась поврежденность, снижающая жесткость материала. Нелинейность кривой деформирования при подобном разгрузении и нагружении связана с эффектом раскрытия и закрытия микротрещин, а остаточные деформации с накоплением вязко-пластических остаточных деформаций. Оба последних эффекта не рассматриваются в данной работе.

Из рисунка 3.11 ясно, что при росте деформаций в процессе нагружении после разгрузки, рост поврежденности начинается приблизительно в той точке на кривой деформирования, в которой была произведена разгрузка. В рамках рассматриваемой модели, это означает, что для роста поврежденности необходимо увеличение области упругости по деформациям, так чтобы деформация оставалась на поверхности нагружения

$$f = 0 \text{ и } \dot{f} = 0. \quad (3.72)$$

Это подразумевает, что пороговая переменная k , как уже упоминалось выше, должна быть эквивалентна максимальной эквивалентной деформации локально достигаемой

в течении всего процесса нагружения. В математической форме эти условия сформулированы, как соотношения Куна-Таккера (см., например, [60]):

$$\boxed{\Xi = \{f\dot{k} = 0; f \leq 0; \dot{k} \geq 0\}}, \quad (3.73)$$

которые дополняются начальным значением пороговой переменной $k = k_0$.

Перепишем эволюционное уравнение поврежденности (3.67) с учетом закона Куна-Таккера

$$\dot{D} = \begin{cases} g(\tilde{\varepsilon}, D)\dot{\tilde{\varepsilon}}, & \text{если } \Xi \cap \{\dot{k} > 0; D < 1\}; \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases} \quad (3.74)$$

Если поврежденность эволюционирует и если k, D квази-монотонны, то существует взаимная связь переменной поврежденности и переменной порогового уровня, которая может быть получена интегрированием уравнения (3.74)

$$D = \int_{k_0}^k g(k, D)dk. \quad (3.75)$$

Для завершения данной части остается привести явные выражения для закона (3.75). Наиболее простой закон, билинейный закон поврежденности [60]. Форма связи между пороговой переменной k и мерой поврежденности D для этого закона записывается в виде

$$\boxed{D = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ 1 - \frac{k_c}{k} \frac{k - k_0}{k_c - k_0}, & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 1, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases}} \quad (3.76)$$

а функция эволюции

$$g(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ \frac{k_c k_0}{k^{-2}(k_c - k_0)}, & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 0, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases} \quad (3.77)$$

Так как при решении задач МКП практически всегда используются численные методы, то относительная простота данного закона не играет существенной роли. Преимуществом этого закона является малое количество необходимых параметров, а именно только двух k_c и k_0 , причем последний обязателен для всех законов. Минус данного закона в том, что он нереалистично описывает зону разупрочнения, в отличие от

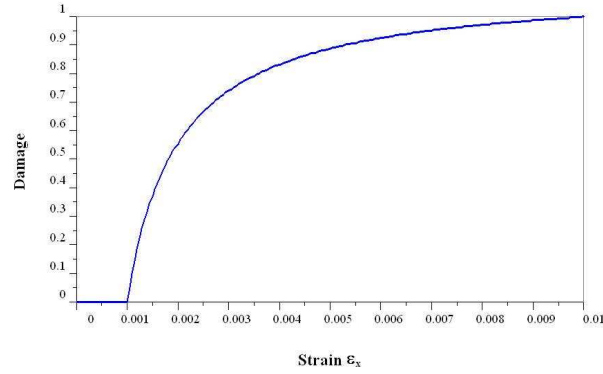


Рис. 3.12. Эволюция поврежденности по билинейному закону

других законов, приведенных ниже. На рисунке 3.12 представлена зависимость поврежденности от эквивалентной меры деформированного состояния при монотонном кинематическом нагружении здесь и далее выбраны $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$.

На рисунке 3.13 представлена кривая деформирования для данного закона эволюции повреждений в случае одноосного растяжения (тензор деформации меняется от нуля до $\epsilon \sim \{0.01, -0.003, -0.003, 0, 0, 0\}$)

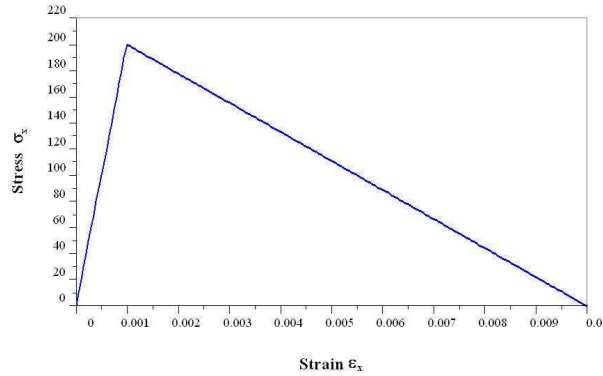


Рис. 3.13. Кривая деформирования по билинейному закону

В реальном материале, как видно из рис. 3.11, кривая в области ослабления материала (кривая “размягчения”) нелинейна. Чем больше уровень напряжения, тем скорее он убывает с ростом деформации. В связи с этим чаще используют обобщение билинейного закона - законом Гирса (Geers, 1997, [60]):

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ 1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^\beta \left(\frac{k_c - k}{k_c - k_0}\right)^\alpha, & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 1, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases} \quad (3.78)$$

функция эволюции, для которого имеет вид

$$g(k, D) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ \left(\frac{k_0}{k}\right)^\beta \left(\frac{k_c - k}{k_c - k_0}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{k} + \frac{\alpha}{k_c - k}\right), & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 0, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases} \quad (3.79)$$

В бакалаврской работе [34] было проведено подробное математическое исследование закона Гирса и сформулированы условия гладкости кривой деформирования в точке $k = k_0$:

$$\left. \frac{\partial D}{\partial k} \right|_{k=k_0} = 0 \quad (3.80)$$

Это условие связывает параметры закона Гирса α , β , k_0 , k_c .

$$\alpha = \frac{k_0 - k_c}{k_0} \beta. \quad (3.81)$$

На рисунке 3.14 представлены кривые эволюции поврежденности по закону Гирса для констант $\alpha = 4.5$, $\beta = -0.5$ и $\alpha = 9$, $\beta = -1$, удовлетворяющих условию (3.80) и для констант $\alpha = 2$, $\beta = 2$. На рисунке 3.15 представлены кривые деформирования по закону Гирса для этих же констант.

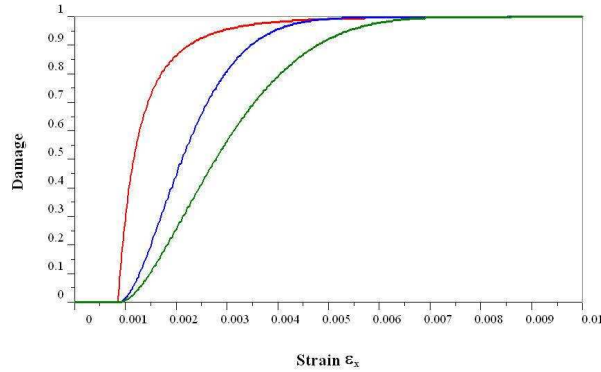


Рис. 3.14. Эволюция поврежденности по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию гладкости ($\alpha = 4.5$, $\beta = -0.5$, $\alpha = 9$, $\beta = -1$) и не удовлетворяющих ($\alpha = 2$, $\beta = 2$)

Кривая деформирования даже слабо поврежденного материала обычно теряет свойство гладкости при достижении ЭМДС пороговой переменной $\tilde{\varepsilon} = k > k_0$, поэтому иногда, при описании свойств материала, разумно вместо условия гладкости (3.80) ввести условие отрицательности правосторонней производной кривой деформирования в точке $\tilde{\varepsilon} = k_0$

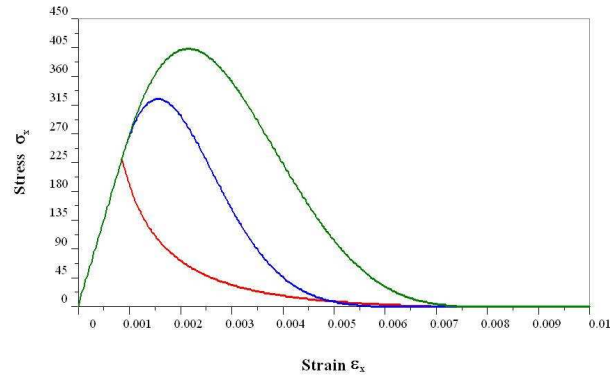


Рис. 3.15. Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию гладкости ($\alpha = 4.5$, $\beta = -0.5$, $\alpha = 9$, $\beta = -1$) и не удовлетворяющих ($\alpha = 2$, $\beta = 2$)

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial k} \right|_{k=k_0+} < 0, \quad (3.82)$$

здесь σ - осевое напряжение в случае одноосного растяжения. При этом связь между константами закона будет

$$\alpha > \frac{k_c - k_0}{k_0} (1 - \beta) \quad (3.83)$$

На рисунке 3.16 представлены кривые эволюции поврежденности по закону Гирса для констант ($\alpha = 20$, $\beta = -1$), ($\alpha = 5$, $\beta = 0.5$) и ($\alpha = 2$, $\beta = 2$), удовлетворяющих условию (3.83). На рисунке 3.17 представлены кривые деформирования по закону Гирса для этих же констант.

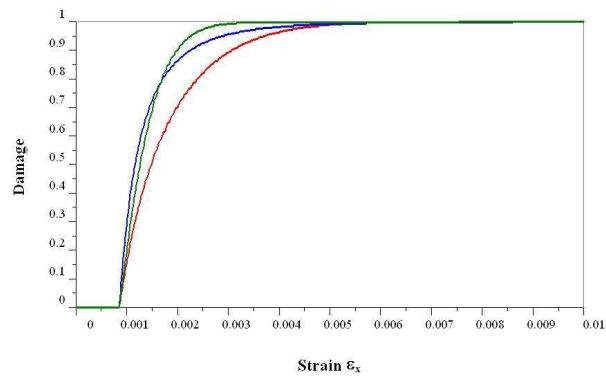


Рис. 3.16. Эволюция поврежденности по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию отрицательности производной (($\alpha = 20$, $\beta = -1$), ($\alpha = 5$, $\beta = 0.5$) и ($\alpha = 2$, $\beta = 2$))

Очевидно, что закон Гирса достаточно общий и позволяет моделировать пове-

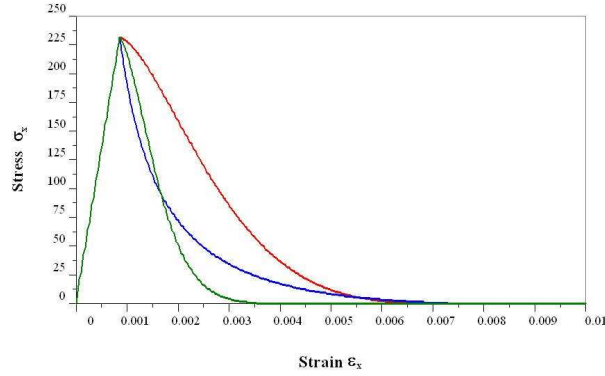


Рис. 3.17. Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант, удовлетворяющих условию отрицательности производной ($(\alpha = 20, \beta = -1)$, $(\alpha = 5, \beta = 0.5)$ и $(\alpha = 2, \beta = 2)$)

дение материалов с различными кривыми деформирования, но минус этого закона в сравнительно большом количестве констант, которые необходимо определять из экспериментов: α , β , k_0 , k_c . Закон, позволяющий моделировать накопление повреждений для материалов с кривой деформирования, для которой выполняется условие (3.83) и требующий меньшее количество констант - экспоненциальный закон Мазарса (Mazars, 1986, [57])

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ 1 - \frac{k_0}{k} (1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(k-k_0)}), & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 1, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases} \quad (3.84)$$

функция эволюции для закона Мазарса имеет вид

$$g(k, D) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq k_0; \\ \frac{k_0}{k^2} (1 - \alpha + \alpha (1 + \beta k) e^{-\beta(k-k_0)}), & \text{если } k_0 < k < k_c; \\ 0, & \text{если } k \geq k_c. \end{cases} \quad (3.85)$$

Из вида закона следует закономерное ограничение на значения параметров в законе Мазарса $\alpha \leq 1$ и $\beta > 0$. Отметим, что в данном законе поврежденность не достигает своего критического значения ($D = 1$), а лишь сколь угодно близко к нему приближается к нему. Т.е. полное разрушение достигается при бесконечно больших деформациях. Поэтому этот закон применим только вплоть до уровня, когда накопленные повреждения не превращают материала в неустойчивую структуру. Отметим еще один аспект этого закона напряжения при бесконечно больших деформациях стремятся к определенному не нулевому уровню:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma = (1 - \alpha) E k_0. \quad (3.86)$$

На рисунке 3.18 представлены кривые эволюции поврежденности по закону Мазарса для констант $(\alpha = 0.5, \beta = 100)$, $(\alpha = 0.5, \beta = 300)$, $(\alpha = 0.5, \beta = 500)$, на рисунке

3.19 представлены кривые деформирования по закону Мазарса для этих же констант. А на рисунке 3.18 представлены кривые эволюции для констант $(\alpha = 0.95, \beta = 100)$, $(\alpha = 0.95, \beta = 300)$, $(\alpha = 0.95, \beta = 500)$, на рисунке 3.21 представлены кривые деформирования для этих констант.

Неоспоримое, на первый взгляд, преимущество данного закона - малое количество требуемых констант, приводит к значительным ограничениям вида кривой деформирования, напряжения не выходят на нулевой уровень и поврежденность не достигает единицы. Поэтому оправдано использование закона Гирса с константами, подобранными в соответствии с кривыми деформирования, пусть и не в самой общей форме. Например, может быть, наложено условие равенства показателей $\alpha = \beta$ или, введено условие гладкости $\alpha = \frac{k_0 - k_c}{k_0} \beta$ или условие отрицательности производной $\alpha = \frac{k_c - k_0}{k_0} (1 - \beta) + 1$. Это снижает количество требуемых констант.

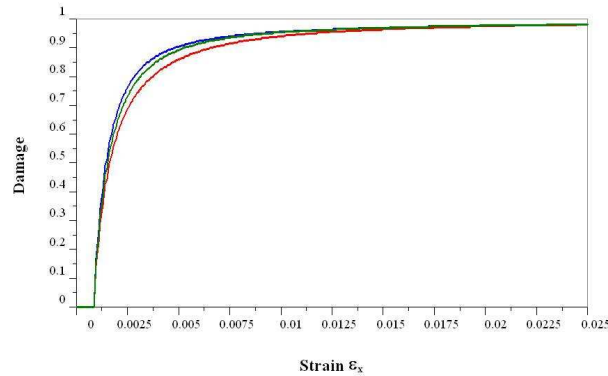


Рис. 3.18. Эволюция поврежденности по закону Мазарса для различных констант $((\alpha = 0.5, \beta = 100), (\alpha = 0.5, \beta = 300), (\alpha = 0.5, \beta = 500))$

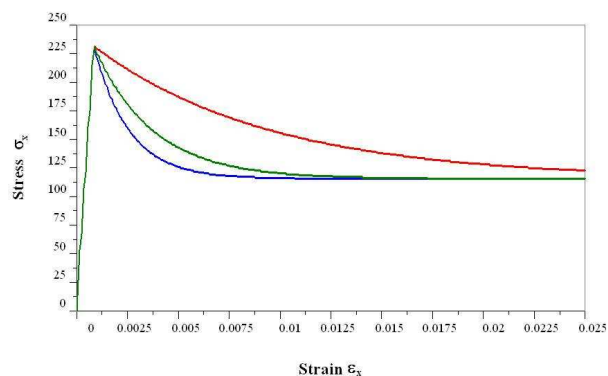


Рис. 3.19. Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант $((\alpha = 0.5, \beta = 100), (\alpha = 0.5, \beta = 300), (\alpha = 0.5, \beta = 500))$

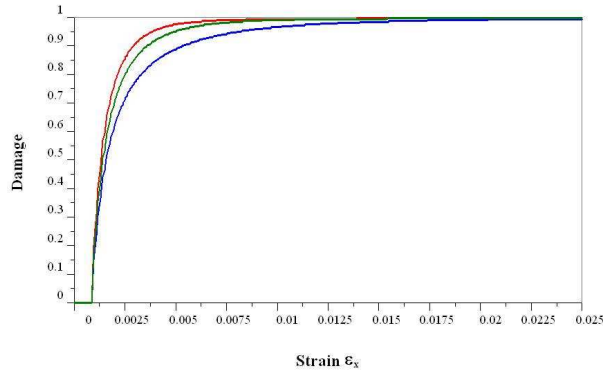


Рис. 3.20. Эволюция поврежденности по закону Мазарса для различных констант $((\alpha = 0.95, \beta = 100), (\alpha = 0.95, \beta = 300), (\alpha = 0.95, \beta = 500))$

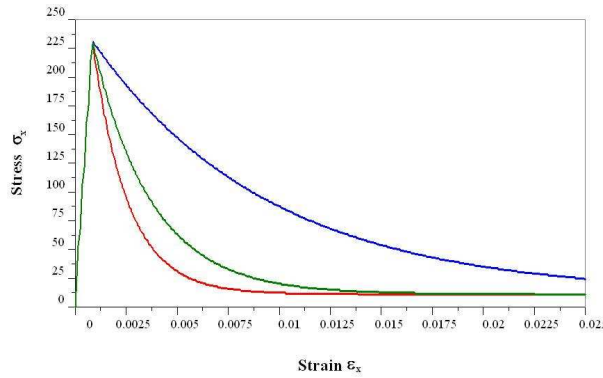


Рис. 3.21. Кривые деформирования по закону Гирса для различных констант $((\alpha = 0.95, \beta = 100), (\alpha = 0.95, \beta = 300), (\alpha = 0.95, \beta = 500))$

3.3.4 Соответствие констант для различных законов поврежденности

В данном параграфе приводятся численные значения констант для различных законов поврежденности при учете характеристик бетонов, используемых в строительстве. Механические свойства бетонов в соответствии с [8] модуль Юнга бетона находится в пределах

$$E = 14 \div 45 \text{ ГПа}, \quad (3.87)$$

а коэффициент Пуассона

$$\nu = 0.11 \div 0.2. \quad (3.88)$$

При значении предела прочности при сжатии в среднем

$$\sigma_{\text{вр.сжатия}} \approx 20 \div 40 \text{ МПа}. \quad (3.89)$$

Используя эти данные подберем начальное значение пороговой переменной k_0 . Примем модуль Юнга $E = 17$ ГПа, а коэффициент Пуассона 0.14. Так как при сжатии прочность бетона значительно ($10 \div 20$ раз) превосходит прочность при растяжении, то примем

$$\sigma_{\text{вр.растяжения}} = 1 \div 4 \text{ МПа}, \quad (3.90)$$

из этого значения временного предела и найдем значение для $k_0 \approx 5.8810^{-5}$. В численных экспериментах [59] были установлены параметры α_M , β_M для закона Мазарса

$$\alpha_M = 0.96; \beta_M = 350. \quad (3.91)$$

Подберем постоянные α_G , β_G для обобщенного степенного закона Гирса так, чтобы кривая деформирования при одноосном растяжении лежала достаточно близко к кривой деформирования по закону Мазарса с известными константами. Во-первых, поставим условие равенства касательной к кривой деформирования по закону Гирса и по закону Мазарса в точке $k = k_0$, из этого условия получаем уравнение

$$\beta_G = 1 + k_0 \alpha_M \beta_M - \frac{\alpha_G k_0}{k_c - k_0}. \quad (3.92)$$

Далее, экспериментально, в пакете CES подберем значения констант α_G , β_G так, чтобы визуально кривые деформирования по закону Мазарса и Гирса при одноосном растяжении лежали достаточно близко друг к другу. Результатом этого анализа явились следующие значения констант

$$\alpha_G = 31; \beta_G = 1; k_c = 0.1. \quad (3.93)$$

На рисунке 3.22 представлены кривые деформирования для закона Мазарса с константами $\alpha_M = 0.96$; $\beta_M = 350$ и для закона Гирса с подобранными константами $\alpha_G = 31$; $\beta_G = 1$; $k_c = 0.1$.

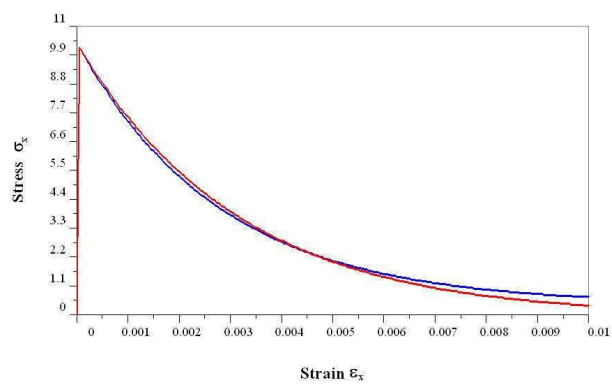


Рис. 3.22. Кривые деформирования по закону Мазарса и закону Гирса для экспериментально определенных констант

Глава 4

Реономные законы поврежденности

Одно из основных направлений исследования магистерской работы - анализ и развитие законов реономного накопления поврежденности. В литературе также используется термин вязко-поврежденность, несмотря на то, что вязкие свойства в классическом понимании в модели отсутствуют, а присутствует закон реономного накопления повреждений. В главе приводятся основные положения модели Шаламеля, развивается его подход введением экспоненциального закона поврежденности Мазарса. Далее на основе модели Шаламеля строится новая модель включением в определяющие параметры времени, рассматривается линейные и линейно экспоненциальный закон старения. На решении задач одоосного нагружения демонстрируется способность модели описывать процессы нестационарное нагружение, ползучесть¹, релаксацию и усталость.

4.1 Развитие модели Шаламеля реономного накопления повреждений

Рассмотрим подход, использованный в [40] и разделяющий плотность свободной энергии на два слагаемых

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, D) + \psi_1(D), \quad (4.1)$$

где первое слагаемое записывается в классической форме

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2\rho}(1 - D)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.2)$$

а явный вид второго слагаемого плотности свободной энергии ψ_D , связанного с равновесной кривой деформирования и зависящего только от меры поврежденности зависит от выбора закона поврежденности (см. главу 3) и будет выведен впоследствии.

¹ в действительности, модель описывает псевдо-ползучесть, т.к. в рассмотрение не вводятся остаточные деформации ползучести и при полной разгрузке, независимо от скорости разгрузки, остаточные деформации обращаются в нуль

В силу того, что накопление повреждений является необратимым процессом, если не учитывать явление закрытия микро-трещин, то диссипативное неравенство Клаузиуса - Дюгема для вязко-повреждаемого материала

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial(\psi_0 + \psi_1)}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (4.3)$$

как и для упруго-повреждаемого материала распадается на два соотношения при условии $\dot{T} = 0$; $\nabla T = 0$ с учетом (4.1) и (4.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)^4 \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

$$(Y_0 - Y_1) \dot{D} \geq 0, \text{ где } Y_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial D}, Y_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial D}. \quad (4.5)$$

Для описания эволюции повреждений вводится функция нагружения, связанная с энергией, как упоминалось в главе 3

$$f(Y_0^+, Y_1) = \sqrt{Y_0^+} - \sqrt{Y_1} - \sqrt{Y_D}, \text{ где } Y_0^+ = \frac{1}{\mu_0} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^+ \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^+), \quad (4.6)$$

где μ_0 коэффициент Ламэ, Y_D - упругая энергия исходной поверхности нагружения - пороговое значение энергии, определяющее область упругого поведения материала, а знак плюс означает учет только положительных главных деформаций, так как квази-хрупкие материалы значительно более чувствительны к растяжению, нежели к сжатию. Введение Y_0^+ связано с эквивалентной мерой деформации, предложенной Мазарсом [57] и подробно разобранный в 3.2

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2}, \text{ где } \langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}, \quad (4.7)$$

В соответствии с выбранной функцией (4.6) закон эволюции поврежденности записывается так

$$\dot{D} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{\sqrt{Y_0^+} - \sqrt{Y_1} - \sqrt{Y_D}}{\sqrt{Y_C}} \right\rangle^m, \quad (4.8)$$

где Y_C и m характеристики материала, а η масштаб времени.

Для наглядности рассмотрим случай одноосного нагружения. Тогда тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$ и тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \nu \varepsilon \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \nu \varepsilon \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$, а связь между компонентами имеет вид $\sigma = E_0(1 - D)\varepsilon$, где E_0 модуль Юнга неповрежденного материала. Тогда

$$Y_0 = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon^2, Y_0^+ = Y_0 k^\pm(\nu), \quad (4.9)$$

где

$$k^+(\nu) = \frac{1}{1+\nu}, \sigma > 0; k^-(\nu) = \frac{2\nu^2}{1+\nu}, \sigma < 0. \quad (4.10)$$

Введем новые переменные ε , χ , ε_D и ε_C

$$|\varepsilon| = \sqrt{\frac{2Y_0^+}{E_0k^\pm(\nu)}}, \chi = \sqrt{\frac{2Y_1}{E_0k^\pm(\nu)}}, \varepsilon_D = \sqrt{\frac{2Y_D}{E_0k^\pm(\nu)}} \text{ и } |\varepsilon_C| = \sqrt{\frac{2Y_C}{E_0k^\pm(\nu)}}. \quad (4.11)$$

Переходя к безразмерным переменным

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_C}, \chi^* = \frac{\chi}{|\varepsilon_C|}, \sigma^* = \frac{\sigma}{E_0\varepsilon_C}, \varepsilon_D^* = \frac{\varepsilon_D}{|\varepsilon_C|}, t^* = \frac{t}{\eta}, \quad (4.12)$$

в соответствии с (4.8) получаем систему дифференциальных уравнений для эволюции вязко - поврежденного состояния

$$\begin{cases} \sigma^* &= (1 - D) \varepsilon^* \\ \frac{dD}{dt^*} &= \langle \varepsilon^* - \chi^*(D) - \varepsilon_D^* \rangle^m \end{cases} \quad (4.13)$$

И продифференцировав выражение для напряжений по приведенному времени t^* , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma^*}{dt^*} = -\varepsilon^* \left\langle \varepsilon^* - \chi^* \left(1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \right) - \varepsilon_D^* \right\rangle^m + \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt^*}. \quad (4.14)$$

Деформации в области разупрочнения в реальности значительно превосходят деформации в области, предшествующей достижению максимальной нагрузки (см. 3.3.4). Линейный закон не в состоянии описать такое поведение материала. Оно может быть отражено при использовании экспоненциального закона поврежденности. Поэтому вместо рассмотренного в [40] линейного закона связи между поврежденностью и деформациями

$$D = \varepsilon^*/2, \quad (4.15)$$

введем упрощенный вариант экспоненциального закона по Мазарсу (см. 3 и рис. 4.1).

$$D = 1 - e^{-\tilde{\varepsilon}^*} \quad (4.16)$$

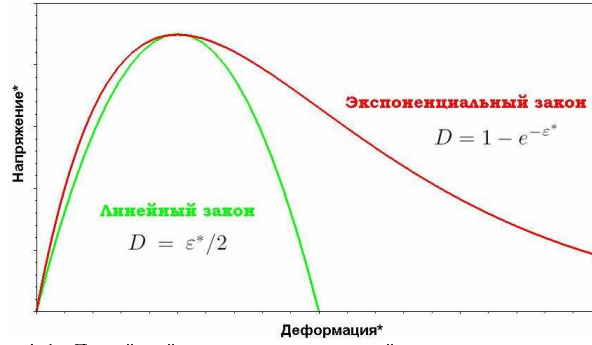


Рис. 4.1. Линейный и экспоненциальный законы поврежденности

Связь деформаций и функции $\chi^*(D)$ для квазистатического нагружения следует из равенства нулю выражения в угловых скобках в формуле (4.14).

$$\chi^*(D) = \ln \left(\frac{1}{1-D} \right) \quad (4.17)$$

Приравнивая к χ^* деформацию $\tilde{\varepsilon}^*$, соответствующую накопленным повреждениям D , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \chi^*(D) + \varepsilon_D^*; \\ \varepsilon^* &= \ln \left(\frac{1}{1-D} \right) + \varepsilon_D^*, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тогда в соответствии с (4.18), (4.11) и (4.12) второе слагаемое ψ_1 в разложении плотности свободной энергии Гельмгольца для экспоненциального закона поврежденности имеет вид

$$\psi_1 = \frac{1}{2\rho} E_0 \varepsilon_c^2 k^\pm(\nu) (D-1) \left(\ln^2 \left(\frac{1}{1-D} \right) + 2 \ln \left(\frac{1}{1-D} \right) + 2 \right) \geq 0. \quad (4.19)$$

Для сравнения приведем вид второго слагаемого в разложении плотности свободной энергии Гельмгольца для линейного закона поврежденности (см. [40])

$$\psi_1 = \frac{2}{3\rho} E_0 \varepsilon_c^2 k^\pm(\nu) D^3. \quad (4.20)$$

Проблемы определения второго слагаемого в разложении плотности свободной энергии Гельмгольца для произвольного закона поврежденности будут изложены ниже, в параграфе 4.6

4.2 Анализ модели Шаламеля

В параграфе решены различные задачи на нестационарное нагружение, ползучесть и релаксацию. Все приводимые результаты получены в программе, написанной для

решения сформулированных уравнений, в который была интегрирована модель Шаламеля для линейного и экспоненциального законов поврежденности.

На рис. 4.2 изображены кривые деформирования с четырьмя циклами нагрузка - разгрузка для двух скоростей пилообразного изменения деформации с увеличением амплитуды, параметр m положен единицей². В данном и последующих расчетах считаем, что у неповрежденного материала поверхность разрушения стянута в точку, но при приложении нагрузки, она расширяется. Внутри области, ограниченной поверхностью нагружения, материал ведет себя упруго.

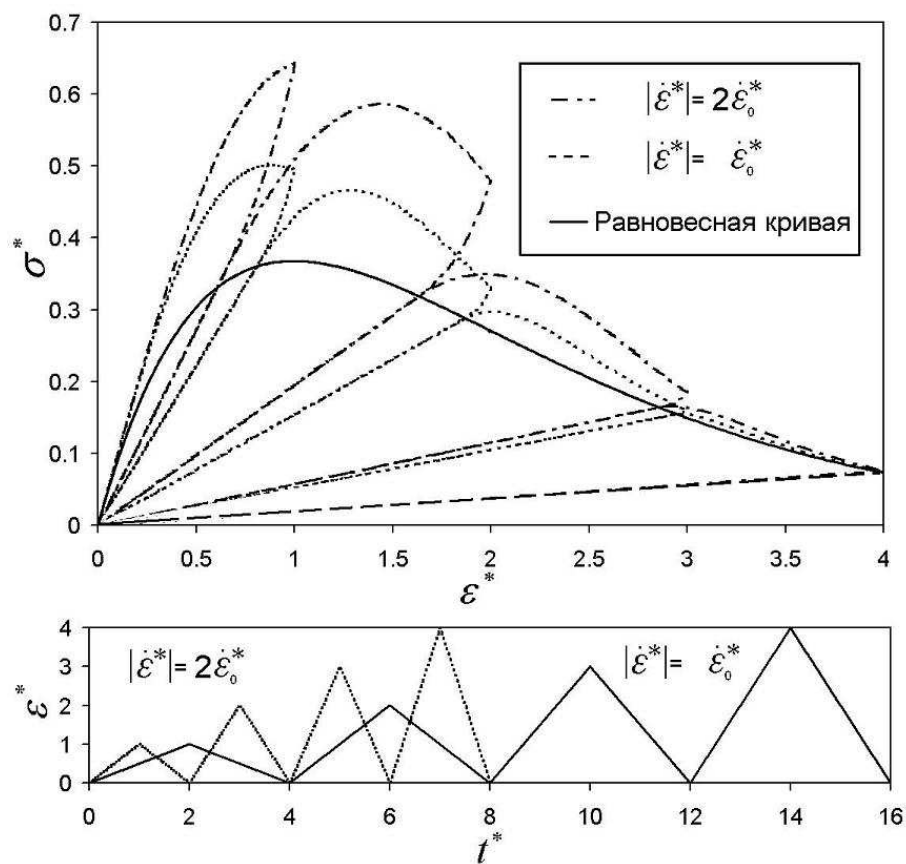


Рис. 4.2. Кривые деформирования для двух скоростей прикладываемых пилообразных изменений перемещений

На рис. 4.3 представлено несколько циклов мягкого нагружения с постепенным увеличением скорости и амплитуды пилообразной прикладываемой силы.

На рис. 4.4 представлено несколько циклов жесткого нагружения с постепенным увеличением скорости и амплитуды пилообразного изменения прикладываемого перемещения.

²Здесь и далее все результаты представлены для случая одноосного растяжения.

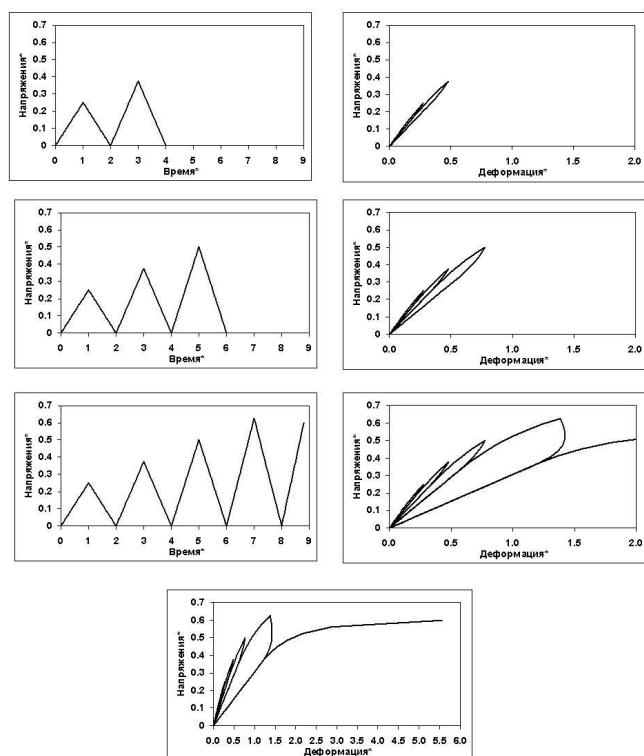


Рис. 4.3. Кривые деформирования для пилообразного изменений нагрузки (мягкое нагружение)

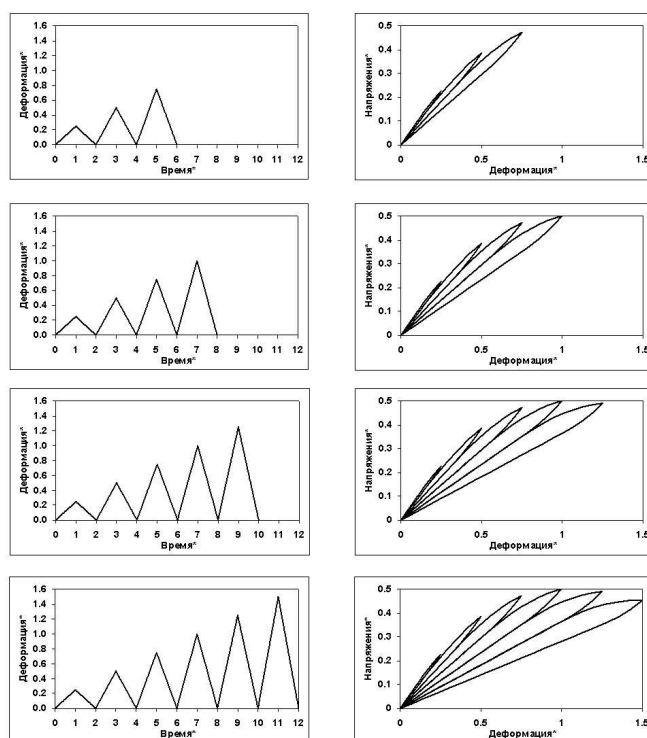


Рис. 4.4. Кривые деформирования для пилообразного изменений нагрузки (жесткое нагружение)

Рассмотрим теперь явление ползучести – поведение при постоянном напряжении $\sigma^* = \bar{\sigma}^*$ (рис. 4.5) и явление релаксации – при постоянной деформации $\varepsilon^* = \bar{\varepsilon}^*$ (рис. 4.6)

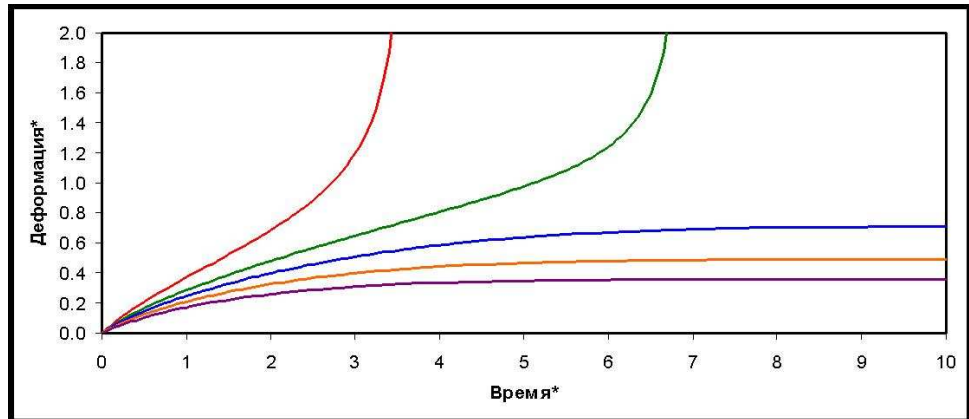


Рис. 4.5. Кривые ползучести: зависимость деформаций от времени для прикладываемых нагрузок

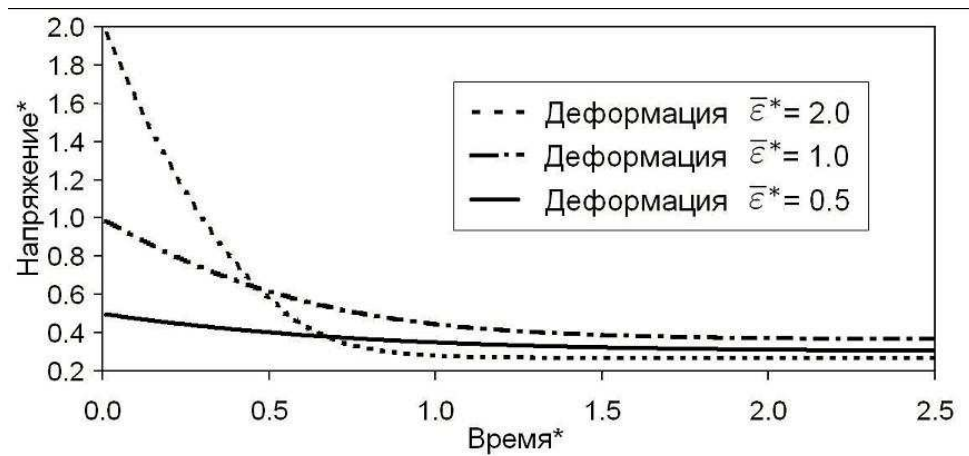


Рис. 4.6. Кривые релаксации: зависимость напряжений от времени при постоянных деформациях

На рис. 4.7 представлены прикладываемые нагрузки

$$\sigma^* = \sigma_k^*(1 - e^{-at^*}), \quad (4.21)$$

на рис. 4.8 кривые деформирования для этих нагрузок и на рис. 4.5 представлены кривые ползучести

С математической точки зрения, при любых нагрузках меньше актуального предела прочности кривая деформирования выходит на равновесную кривую и дефор-

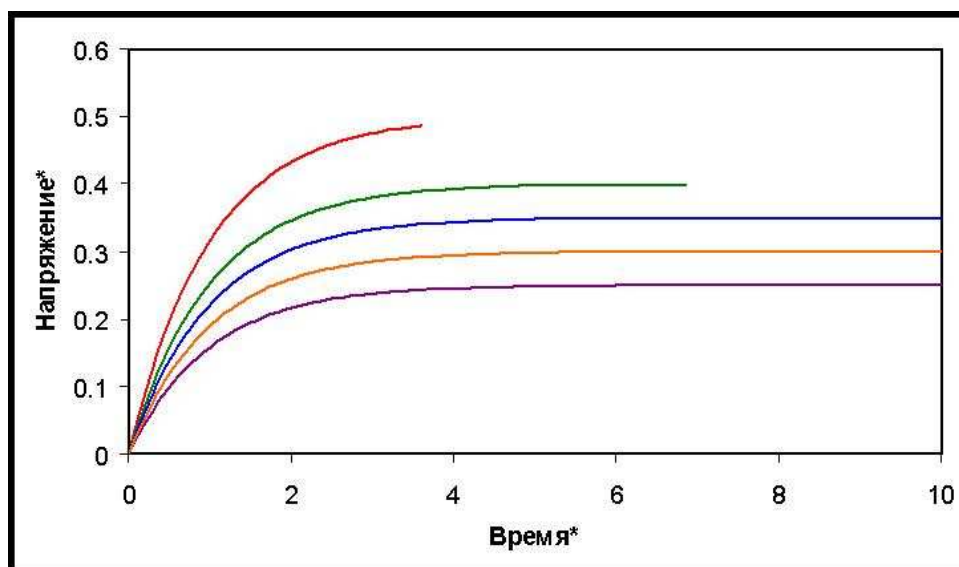


Рис. 4.7. Прикладываемая нагрузка

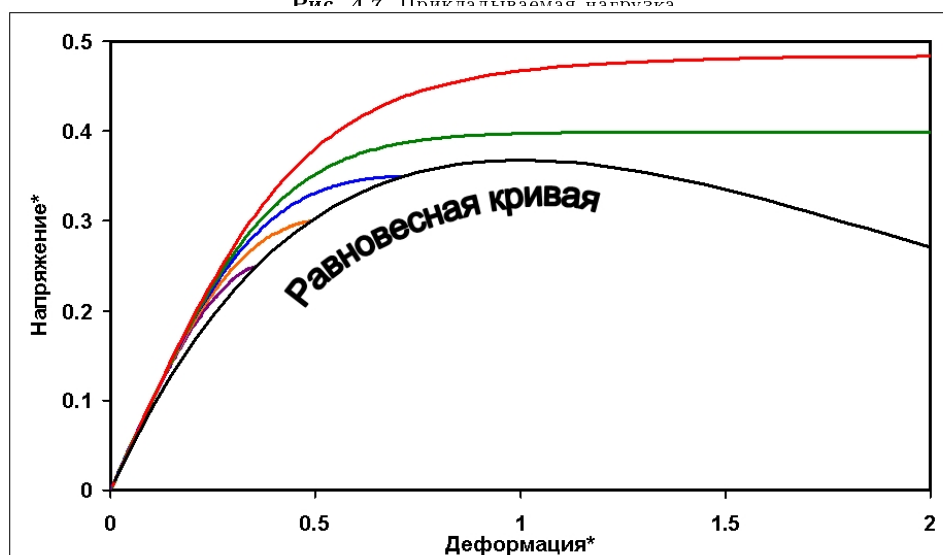


Рис. 4.8. Кривые деформирования соответствующие прикладываемым нагрузкам и равновесная кривая

деформация более не меняется. При превышении актуального предела прочности, деформации, а следовательно и повреждения, накапливаются вплоть до достижения критического значения. Скорость изменения деформации в данном случае зависит от связи деформаций с поврежденностью и от вида функции разрушения.

4.3 Модель стареющего материала с реономным накоплением повреждений

Целью создания новой модели является более реалистичное описание процессов релаксации и ползучести. Очевидно, что введение времени в определяющие уравнения позволит описывать и явление усталости. При описании различных физических процессов с помощью модели Шаламеля, конечной точкой процесса деформирования

(если она, конечно, существует для данного напряженного состояния) при постоянных нагрузках является равновесная кривая. Но как показывают эксперименты [10], [5], [6], [9] скорость релаксации напряжений заметно снижается в первый период времени (до достижения равновесной кривой), но релаксация не останавливается, а продолжается только со значительно меньшей скоростью. Так же и при ползучести, для любого значения прикладываемой нагрузки меньшей предела актуальной прочности и большей предела ползучести, скорость изменения деформации достаточно высокая на первой стадии (до достижения равновесной кривой) - первая стадия ползучести, снижается, но опять же не до нулевого значения, и ползучесть переходит во вторую стадию, чего не наблюдается в модели Шаламеля. Эти факты наводят на мысль, что равновесная кривая, связанная с функцией χ меняется во времени в зависимости от условий нагружения. Эти размышления привели к созданию новой модели стареющего материала с реономным накоплением поврежденности или стареющего вязко-повреждаемого материала.

Основное предположение новой модели стареющего вязко-повреждаемого материала - это изменение равновесной кривой со временем, скорость которого зависит от эквивалентной меры деформированного состояния в данный момент времени. Равновесная кривая в модели Шаламеля определяется функцией $\chi = \chi(D)$. В рамках новых предположений функция χ_d , определяющая равновесную кривую есть функция поврежденности и времени

$$\chi_d = \chi_d(D, t). \quad (4.22)$$

При таком разделении определяющих параметров плотность свободной энергии Гельмгольца разделится на две части

$$\psi(D, \boldsymbol{\varepsilon}, t) = \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, D) + \psi_1(D, t). \quad (4.23)$$

Диссипативное неравенство Клаузиуса - Дюгема для такого вида энергии запишется как

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \rho \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial D} + \frac{\partial \psi_1}{\partial D} \right) \dot{D} \geq 0. \quad (4.24)$$

Предположение о такой форме плотности свободной энергии вытекает из следующих соображений. Пусть поврежденность есть функция не только ЭМДС, но и монотонная возрастающая функция времени, множитель при которой также зависит от ЭМДС, т.е.

$$D = f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})g(\tilde{t}), \quad (4.25)$$

где f - любой закон поврежденности - неубывающая функция, а g - убывающая функция времени при $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$.

Отсюда по аналогии с моделью Шаламеля получаем функцию χ_d , если функция поврежденности удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции (см. 5).

$$\chi_d = \tilde{\varepsilon} = D^{-1}(fg). \quad (4.26)$$

Это преобразование - наиболее слабое место как модели Шаламеля, так и новой модели стареющего вязко-повреждаемого материала даже в большей мере (см. 4.6). Но некоторые частные случаи позволяют найти обратную функцию в явном виде (например, использование билинейного закона поврежденности и линейного закона старения $g(x) = ax + b$). Рассмотрим частный случай - линейный закон поврежденности и линейный закон старения

$$\begin{aligned} f &= \alpha\tilde{\varepsilon}; \quad g = \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}t}{\eta}\right), \quad \alpha > 0; \quad \eta > 0 \\ D &= \alpha\tilde{\varepsilon} \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}t}{\eta}\right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где α - константа связи между ЭМДС и поврежденностью и η - масштаб времени, определяются из эксперимента. Решая квадратное уравнение и из физических соображений выбирая знак, получаем

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\frac{tD}{\eta\alpha}}}{\frac{2t}{\eta}}. \quad (4.28)$$

Разложив корень в ряд Тейлора, оставим в рассмотрении первые три члена, пренебрегая малыми более высоких порядков, получаем

$$\tilde{\varepsilon} \approx \frac{D}{\alpha} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha}\right). \quad (4.29)$$

Значит функция χ , эквивалентная изменению ЭМДС на равновесной кривой есть

$$\chi = \frac{D}{\alpha} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha}\right). \quad (4.30)$$

Знак \approx заменен на знак равно, т.к. именно выражение (4.50) определяет поведение материала, а не (4.29), которое было приведено, только для наглядности.

При таком выборе функции χ плотность высвобождаемой энергии, связанной с поврежденностью и процессами старения, имеет вид

$$\boxed{Y_1 = \frac{D^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha}\right)^2 E_0 k^\pm(\nu)} \quad (4.31)$$

а второе слагаемое в разложении плотности свободной энергии будет иметь вид

$$\boxed{\psi_1 = \frac{1}{2\rho} E_0 k^\pm(\nu) \left(\frac{D^3}{3} - \frac{tD^4}{2\eta\alpha} + \frac{t^2 D^5}{5\eta^2 \alpha^2} \right)} \quad (4.32)$$

Выражение для первого слагаемого в разложении плотности свободной энергии принимаем в классической форме

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2\rho} (1 - D) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.33)$$

Итого, суммарная плотность свободно энергии Гельмгольца есть

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2\rho} (1 - D) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2\rho} E_0 k^\pm(\nu) \left(\frac{D^3}{3} - \frac{tD^4}{2\eta\alpha} + \frac{t^2 D^5}{5\eta^2 \alpha^2} \right)}. \quad (4.34)$$

Подставив, это выражение в неравенство Клаузиуса - Дюгема для стареющего вязко-повреждаемого материала (4.24), получим два соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (1 - D) {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\rho \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \rho \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial D} + \frac{\partial \psi_1}{\partial D} \right) \dot{D} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Второе соотношение сводится к

$$-\rho Y_t - \rho (Y_1 - Y_0) \dot{D} \geq 0, \quad (4.36)$$

где в случае одноосного растяжения

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{E_0 k^\pm}{4} \left(\frac{2tD^5}{5\eta^2 \alpha^2} - \frac{D^4}{2\eta\alpha} \right) \\ Y_0 &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ Y_1 &= \frac{D^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha} \right)^2 E_0 k^\pm(\nu). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Справедливо ли следующее неравенство?

$$-\rho (Y_1 - Y_0) \dot{D} \geq 0. \quad (4.38)$$

Если неравенство

$$-\rho Y_t \geq 0 \quad (4.39)$$

справедливо, то диссипативное неравенство Клаузиуса-Дюгема выполняется, что означает, что предлагаемая модель удовлетворяет законам термодинамики. Для выполнения неравенства необходимо и достаточно чтобы из (4.37) выполнялось неравенство

$$\frac{2tD^5}{5\eta^2\alpha^2} - \frac{D^4}{2\eta\alpha} \leq 0. \quad (4.40)$$

Это неравенство выполняется при условии

$$t \leq \frac{5\eta\alpha}{4D}. \quad (4.41)$$

Но для первого приближения, уже существует ограничение

$$t \leq \frac{\eta\alpha}{D}, \quad (4.42)$$

поэтому выбираем последнее.

Итак, при выполнении условия (4.41) неравенство Клаузиуса-Дюгема для рассматриваемой модели стареющего вязко-повреждаемого материала выполняется. По аналогии с моделью Шаламеля, вводя безразмерные параметры (см. 4.1) получаем систему уравнений, связывающую напряжения, деформации и поврежденность.

$$\begin{cases} \sigma^* = (1 - D) \varepsilon^* \\ \frac{dD}{dt^*} = \langle \varepsilon^* - \chi^*(D, t) - \varepsilon_D^*(t) \rangle^m \end{cases} \quad (4.43)$$

Или, подставляя выражения для функции χ в явном виде для линейного закона старения и линейного же закона поврежденности получаем

$$\begin{cases} \sigma^* = (1 - D) \varepsilon^* \\ \frac{dD}{dt^*} = \left\langle \varepsilon^* - \frac{D}{\alpha} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha} \right) - \varepsilon_D^*(t) \right\rangle^m \end{cases} \quad (4.44)$$

Или дифференцируя первое уравнения по времени и представляя поврежденность $D = 1 - \sigma^*/\varepsilon^*$, получаем

$$\frac{d\sigma^*}{dt^*} = -\varepsilon^* \left\langle \varepsilon^* - \chi^* \left(1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}, t \right) - \varepsilon_D^*(t) \right\rangle^m + \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt^*}. \quad (4.45)$$

И, наконец, подставляя выражения для функции χ в явном виде для линейного закона старения и линейного же закона поврежденности получаем, дифференциальное уравнение для связи напряжений и деформаций в связанном стареющем упруго-повреждаемом материале

$$\frac{d\sigma^*}{dt^*} = -\varepsilon^* \left\langle \varepsilon^* - \frac{1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}}{\alpha} \left(1 - \frac{t \left(1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \right)}{\eta\alpha} \right) - \varepsilon_D^*(t) \right\rangle^m + \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt^*}. \quad (4.46)$$

Функция $\varepsilon_D^*(t)$ - определяет актуальную границу области упругости, меняющуюся вместе с равновесной кривой деформирования. Если предположить, что в начальный момент времени для неповрежденного материала предел упругости отсутствует, то слагаемое $\varepsilon_D^*(t)$ можно опустить и решать уравнение

$$\frac{d\sigma^*}{dt^*} = -\varepsilon^* \left\langle \varepsilon^* - \frac{1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}}{\alpha} \left(1 - \frac{t \left(1 - \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \right)}{\eta\alpha} \right) \right\rangle^m + \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt^*}. \quad (4.47)$$

В следующем параграфе приведены численные решения некоторых задач о растяжении сжатии для модели стареющего вязко-повреждаемого материала.

4.4 Анализ модели стареющего материала с реономным накоплением поврежденности

В параграфе решены различные задачи на нестационарное нагружение, ползучесть, релаксацию, а также решены задачи на усталость и статическую усталость. Все приводимые результаты получены в программе, написанной для решения сформулированных уравнений.

Модель стареющего материала сводится к модели Шаламеля при бесконечно большом показателе η^* . Поэтому для наглядности в тестовых примерах использованы различные значения показателя η^* , при которых заметно изменение кривых деформирования по сравнению с кривыми модели Шаламеля. Все задачи решались явным методом Адамса четвертого порядка, без учета начальной области упругости при коэффициенте $\alpha = 2$ и показателе материала $m = 1$.

На рисунке 4.9 представлены кривые деформирования при мягком нагружении пилообразно меняющимися силами для различных показателей $\eta^* = 0.5; 1.0; 2.0; 100.0$.

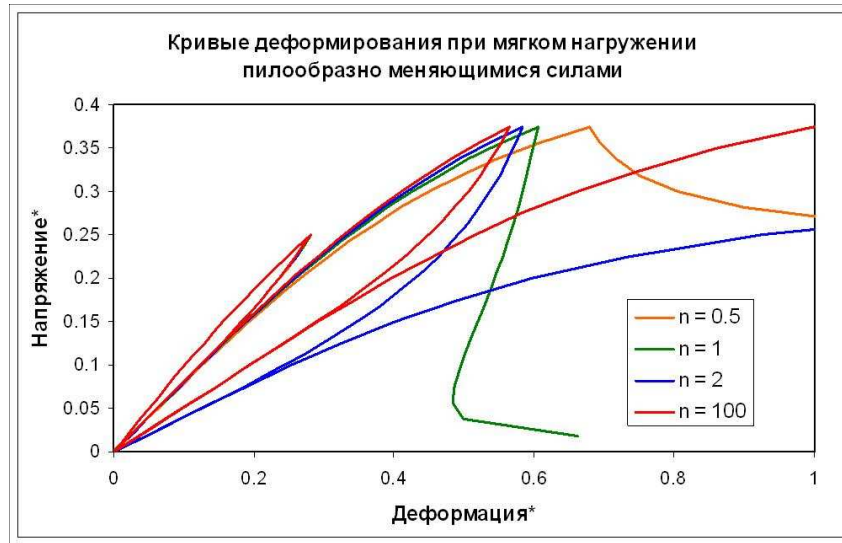


Рис. 4.9. Кривые деформирования при мягком нагружении

На рисунке 4.10 представлены кривые ползучести - изменение деформации со временем для $\eta^* = 0.5; 1.0$ при различных нагрузках $\sigma^* = 0.050; 0.100; 0.125; 0.175; 0.225; 0.300$. Из графиков ясно видно, что присутствуют две стадии ползучести - вторичная (постоянная скорость деформации) и третичная (неустойчивая фаза ускорения скорости деформаций, ведущее к разрушению). Первичная ползучесть данной моделью описывается, но в данных масштабах пренебрежимо мала и здесь незаметна. Скорость деформации во второй стадии увеличивается с ростом прикладываемой силы, время до разрушения, естественно, сокращается.

В рамках предлагаемой модели первичная ползучесть соответствует отрезку времени требующемуся телу для выхода на кривую деформирования (время этой стадии зависит от скорости и типа нагружения). Вторичная ползучесть соответствует старению материала, а начало третичной ползучести означает, что для данной нагрузки не существует равновесной кривой, т.е. предел прочности равновесной кривой стал ниже прикладываемой нагрузки.

Заметим, что при низких напряжениях $\sigma^* = 0.050$ деформации на протяжении всей стадии вторичной ползучести практически не накапливаются, т.е. скорость ползучести практически равна нулю, а при наступлении некоторого момента времени ползучесть переходит в третью стадию. Такое поведение материала можно трактовать как статическую усталость.

На рисунке 4.11 представлены кривые эволюции повреждений при ползучести, соответствующие кривым деформирования, представленных на рисунке 4.10 при $\eta^* = 0.5$.

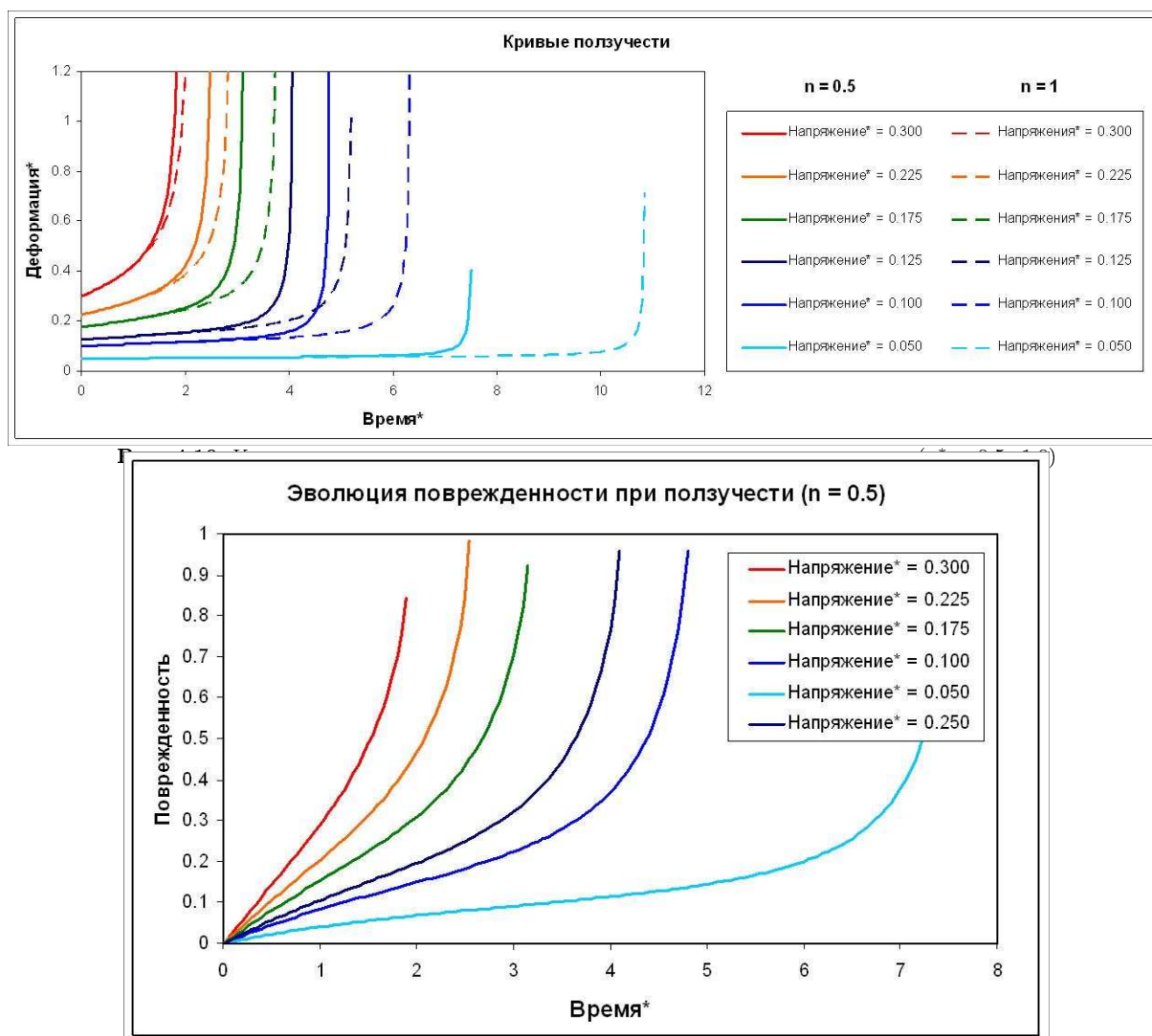


Рис. 4.11. Кривые эволюции поврежденности при ползучести

На рисунке 4.11 представлены усталостные кривые эволюции повреждений для различных амплитуд прикладываемого напряжения $\sigma^* = 0.005; 0.010; 0.015; 0.020; 0.025$ при $\eta = 30$. Количество циклов до разрушения для прикладываемых нагрузок $N = 533; 273; 183; 138; 110$. Напряжения прикладываются по закону

$$\sigma^* = \sigma_0^* |\sin(\omega t)|. \quad (4.48)$$

Для накопления усталостных повреждений, как и для деформации при усталости, можно выделить три стадии - первичную (снижение скорости накопления повреждений), вторичную (стадию постоянной скорости роста повреждений) и третичную (увеличение скорости роста повреждений вплоть до разрушения). Отметим, что при низких значениях амплитуды напряжения $\sigma^* = 0.005$ повреждения в течении большего количества циклов до разрушения (около 90%) практически не накапливаются, а непосредственно перед разрушением процесс накопления повреждений переходит в третью стадию.

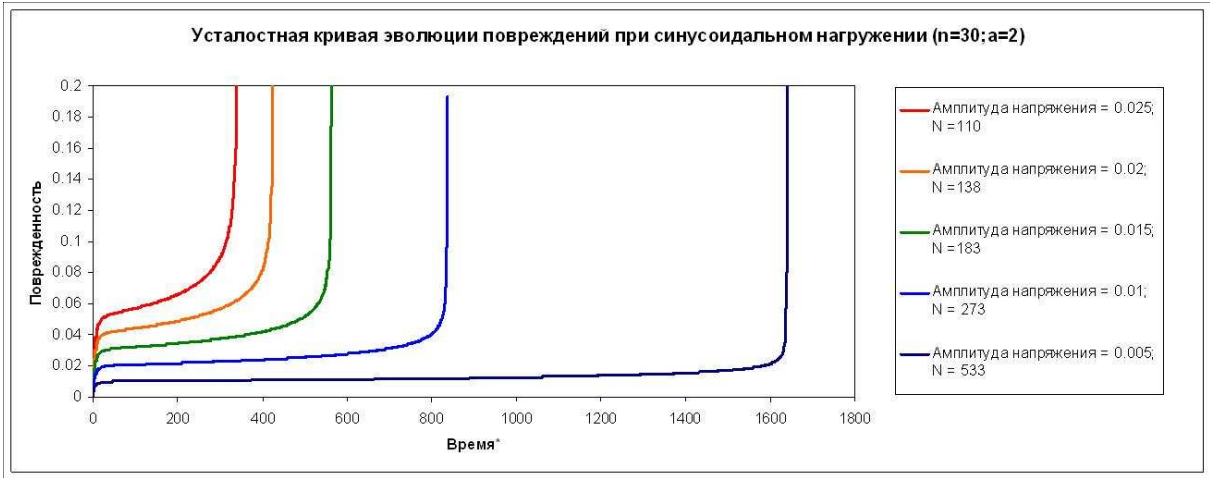


Рис. 4.12. Усталостные кривые эволюции повреждений при синусоидальном нагружении

Перейдем к рассмотрению жесткого нагружения. На рисунке 4.13 представлены кривые деформирования для различных показателей $\eta = 1; 5; 10; 30$ при задании перемещений, меняющихся по пилообразному закону.

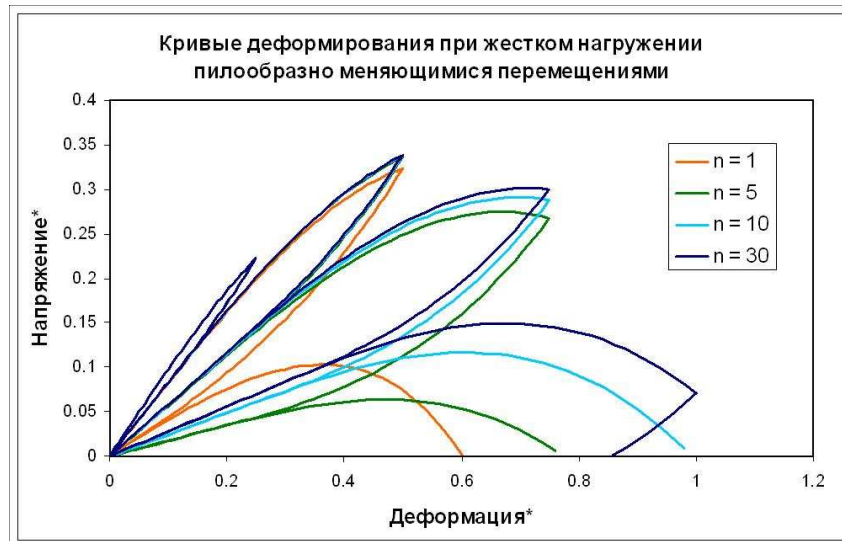


Рис. 4.13. Кривые деформирования при жестком нагружении, меняющемся по пилообразному закону

На рисунке 4.14 представлены кривые релаксации - уменьшение напряжений со временем при постоянных деформациях $\varepsilon^* = 0.1; 0.2; 0.4$ для различных показателей $\eta = 50; 100; 200; 800$. Для напряжений при релаксации также можно выделить три стадии - первичную (резкое снижение скорости уменьшения напряжение, предшествующее выходу на равновесную кривую), вторичную (стадию приблизительно постоянной скорости уменьшения напряжений) и, в отдельных случаях, третичную (увеличение скорости релаксации вплоть до разрушения).

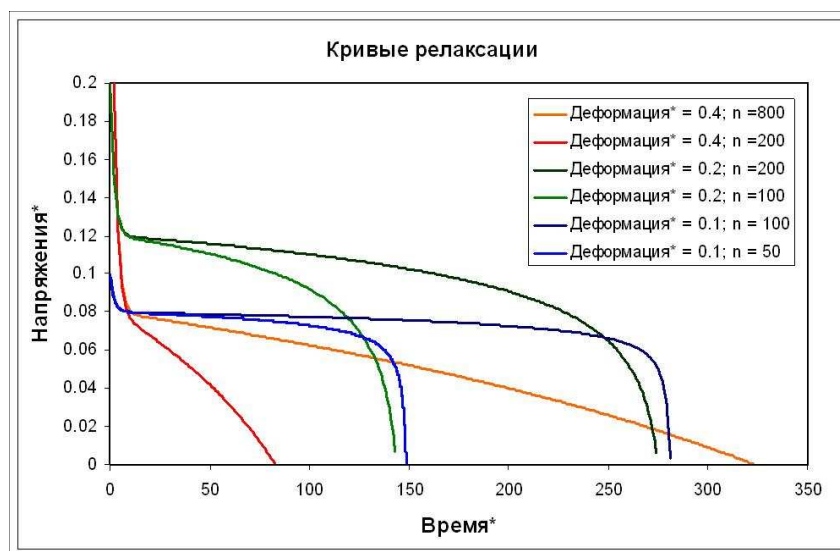


Рис. 4.14. Кривые релаксации для различных значений деформации

На рисунке 4.15 представлены кривые эволюции поврежденности при релаксации, соответствующие кривым деформирования на рисунке 4.14.

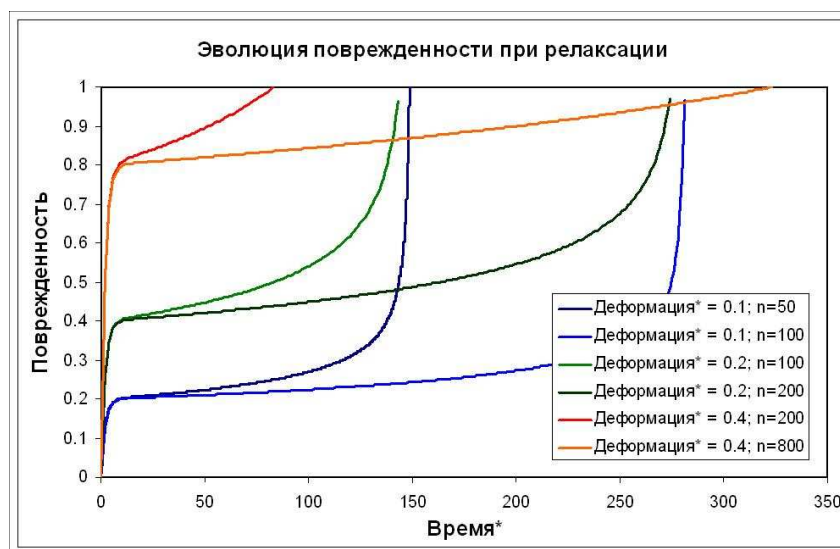


Рис. 4.15. Кривые эволюции поврежденности при релаксации

На рисунке 4.16 представлены усталостные кривые эволюции поврежденности при $\eta = 800$ для жесткого нагружения по синусоидальному закону

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0^* |\sin(\omega t)|. \quad (4.49)$$

Амплитуды прикладываемой деформации $\varepsilon_0^* = 0.05; 0.10; 0.20$ соответствуют приведенному количеству циклов до разрушения $N = 1390; 713; 365$. Как и в предыдущих случаях можно выделить три стадии накопления поврежденности.

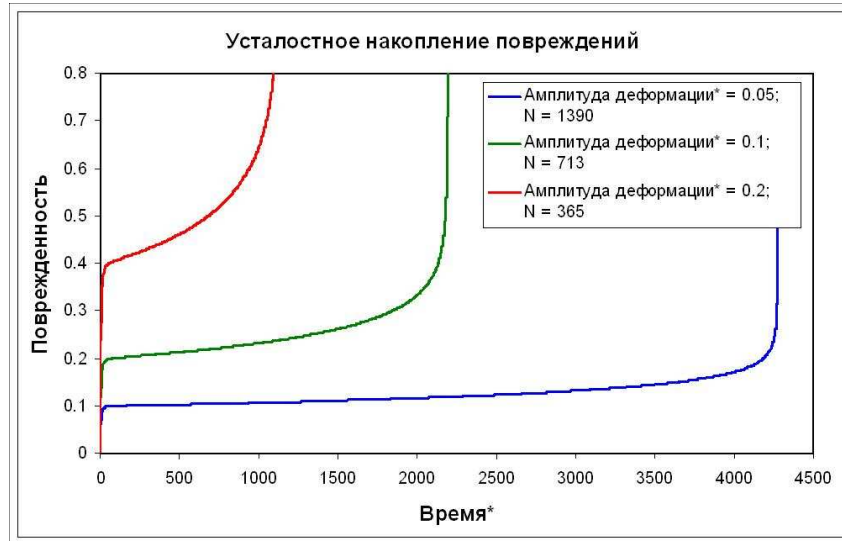


Рис. 4.16. Усталостная эволюция повреждений для различных амплитуд деформации

На рисунке 4.17 представлена усталостная кривая деформирования для значения амплитуды деформации $\varepsilon_0^* = 0.05$, $\eta = 800$, соответствующее количество циклов до разрушения $N = 1390$. На рисунке 4.16 была представлена кривая эволюции поврежденности для этого случая (синяя).

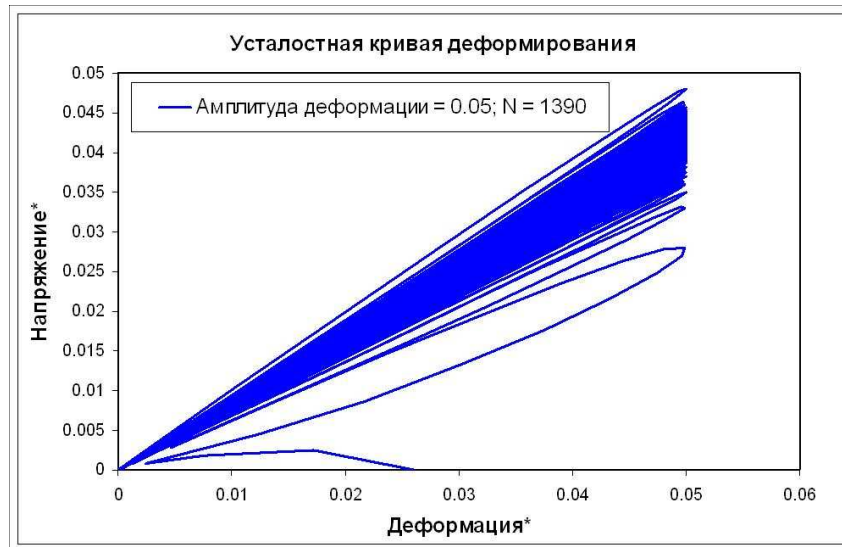


Рис. 4.17. Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\varepsilon_0^* = 0.005$

На рисунке 4.18 представлена усталостная кривая деформирования для значения амплитуды деформации $\varepsilon_0^* = 0.10$, $\eta = 800$, соответствующее количество циклов до разрушения $N = 713$. На рисунке 4.16 была представлена кривая эволюции поврежденности для этого случая (зеленая).

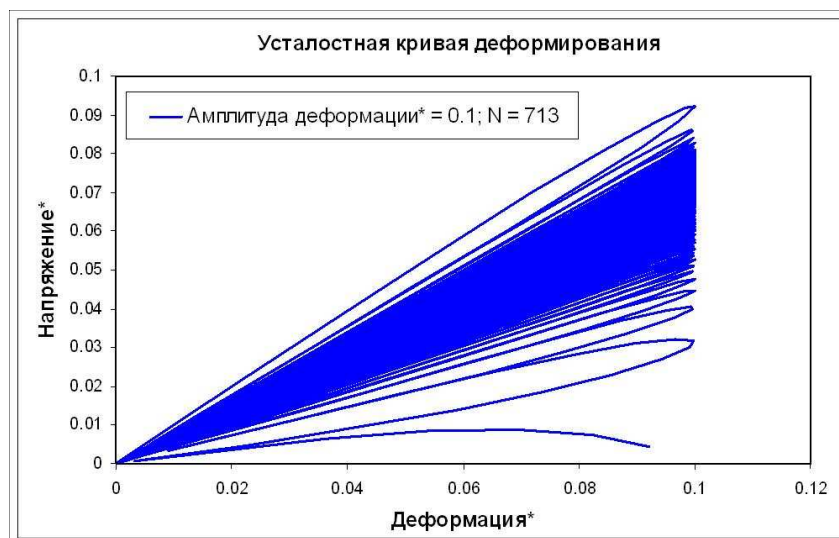


Рис. 4.18. Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\varepsilon_0^* = 0.010$

На рисунке 4.19 представлена усталостная кривая деформирования для значения амплитуды деформации $\varepsilon_0^* = 0.20$, $\eta = 800$, соответствующее количество циклов до разрушения $N = 365$. На рисунке 4.16 была представлена кривая эволюции поврежденности для этого случая (зеленая).

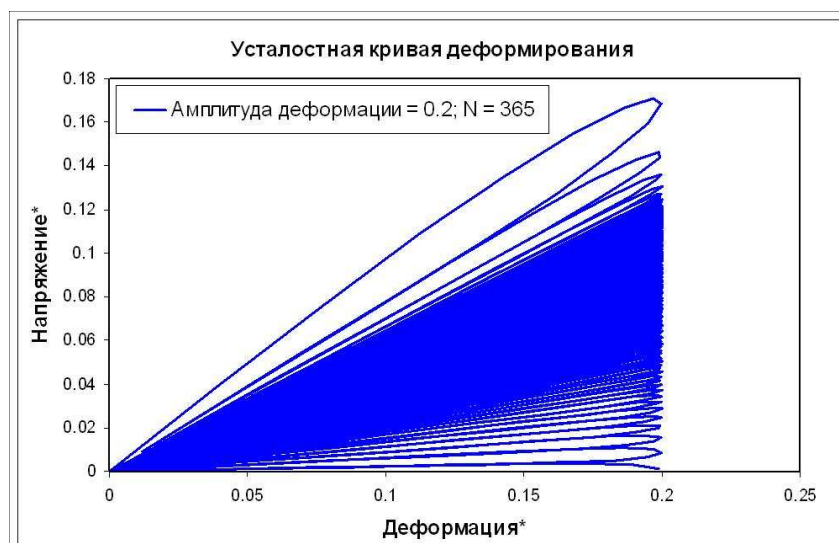


Рис. 4.19. Усталостная кривая деформирования при жестком синусоидальном нагружении $\varepsilon_0^* = 0.020$

Как явствует из приведенных выше примеров применения модели стареющего вязко-повреждаемого материала - модель позволяет качественно описывать различные поведения материалов: нестационарное жесткое и мягкое нагружение, ползучесть и релаксацию, усталость и статическую усталость. Модель Шаламеля является частным случаем предлагаемой модели стареющего вязко-повреждаемого материала при $\eta \rightarrow \infty$. Но, конечно, для подтверждения способности модели описывать все упоминаемые процессы требуется валидация модели на экспериментальных данных.

4.5 Валидация модели на экспериментальных данных

В этом параграфе приведены различные экспериментальные данные по ползучести и релаксации бетонов. На основе этих данных проведен анализ соответствия модели экспериментальным данным и подобраны коэффициенты для законов в модели стареющего вязко-повреждаемого материала. Для начала процитируем диссертацию К.С. Карапетяна [10]:

“Как показывают опыты, даже при кратковременных испытаниях время оказывает существенное влияние на деформации бетона - с увеличением длительности испытания деформации бетона возрастают. Причиной этого является то, что даже при незначительной продолжительности действия нагрузки в бетоне вслед за упругими деформациями развиваются деформации ползучести. Таким образом, в зависимости от длительности испытания, которая определяется скоростью приложения нагрузки, а также продолжительностью выдержек, для одного и того же бетона может быть получено множество кривых деформации. Это обстоятельство вносит существенные осложнения в определение характеристик прочности и деформативности бетона.

Опытами установлено, что при исключении фактора времени, т.е. при мгновенном нагружении, зависимость между напряжениями и деформациями выражается линейной зависимостью, вплоть до момента разрушения бетона. Таким образом, основной причиной неподчинения бетона закону Гука является ползучесть, которая связана с фактором времени.”

Действительно, в соответствии с моделью стареющего вязко-повреждаемого материала (далее СВП), а следовательно и моделью Шаламеля, при очень быстрых нагружениях связь напряжений и деформаций будет линейна вплоть до достижения некоторого критического значения, которое, в общем, зависит от скорости нагружения. Но вернемся к работе [10], в которой автор продолжает:

“Ползучесть бетона является длительным процессом и в зависимости от ряда факторов может продолжаться много лет. Наиболее интенсивно деформации ползучести развиваются вслед за приложением нагрузки, затем по мере старения бетона, скорость их убывает и деформации, ассимптотически приближаясь к своему предельному значению, затухают. Однако, деформации ползучести имеют затухающий характер в том случае, если напряжения в бетоне ниже той границы, при которой в бетоне появляются микротрещины. При высоких напряжениях развитие деформации ползучести может привести к разрушению бетона.”

Один из ключевых моментов разрабатываемой модели это то, что модель СВП предсказывает разрушение при любом уровня напряжения. Возможно, время требуемое до разрушения измеряется десятками тысяч лет (см. приложение А) для реальных коэффициентов масштаба времени η и η_d , а возможно и нет. И, действительно, в соответствии с рис. 4.10 при малых значениях прикладываемых напряжений деформации ползучести практически не накапливаются. Но, отсутствует стадия первичной ползучести. Рассмотрим эту проблему подробнее.

В рассматриваемой модели СВП материала с линейным законом старения и линейным законом поврежденности, т.е.

$$\chi = \frac{D}{\alpha} \left(1 - \frac{tD}{\eta\alpha} \right). \quad (4.50)$$

Первичная стадия ползучести определяется переходом с кривой упругого деформирования на равновесную кривую, а вторичная ползучесть определяется деградацией равновесной кривой. Третичная же ползучесть обусловлена такой деградацией кривой, при которой значение актуальной нагрузки больше, чем актуальное значение предела прочности. Иными словами в рассматриваемой модели деформации первичной ползучести равны разнице в деформациях между равновесной кривой деформирования и упругой кривой для данного значения напряжения (см. рис. 4.20).

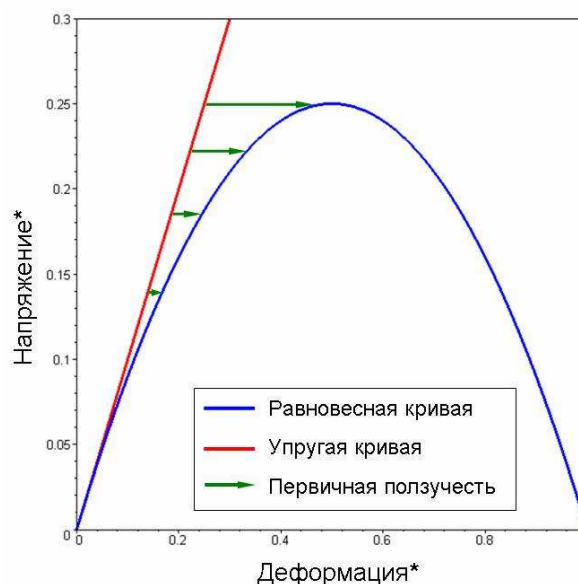


Рис. 4.20. Пояснительная иллюстрация к определению первичной ползучести

Как видно из рисунка, для модели СВП чем меньше значение напряжения, тем меньше деформации накапливаемые в стадии первичной ползучести. Подбор коэффициентов η_d и α для модели СВП и масштабных множителей показал, что не существует таких констант, которые бы соответствовали экспериментальным данным. На рисунке 4.21 приведены экспериментальные данные из работы [5] и кривые деформирования по модели СВП для констант $\alpha = 0.38$; $\eta_d = 1000$; $\eta = 2.7$.

Изменение закона поврежденности, очевидно, не внесет существенного изменения в продолжительность первичной стадии ползучести. Поэтому напрашивается вывод о неприменимости к практике рассматриваемых моделей. Что, в общем, достаточно справедливо по отношению к модели Шаламеля, но не по отношению к модели СВП. Последняя модель может быть преобразована, а именно вместо линейного закона старения можно использовать другой закон, который бы определял изменение скорости ползучести. Рассмотрим, например, экспоненциально-линейный закон старения

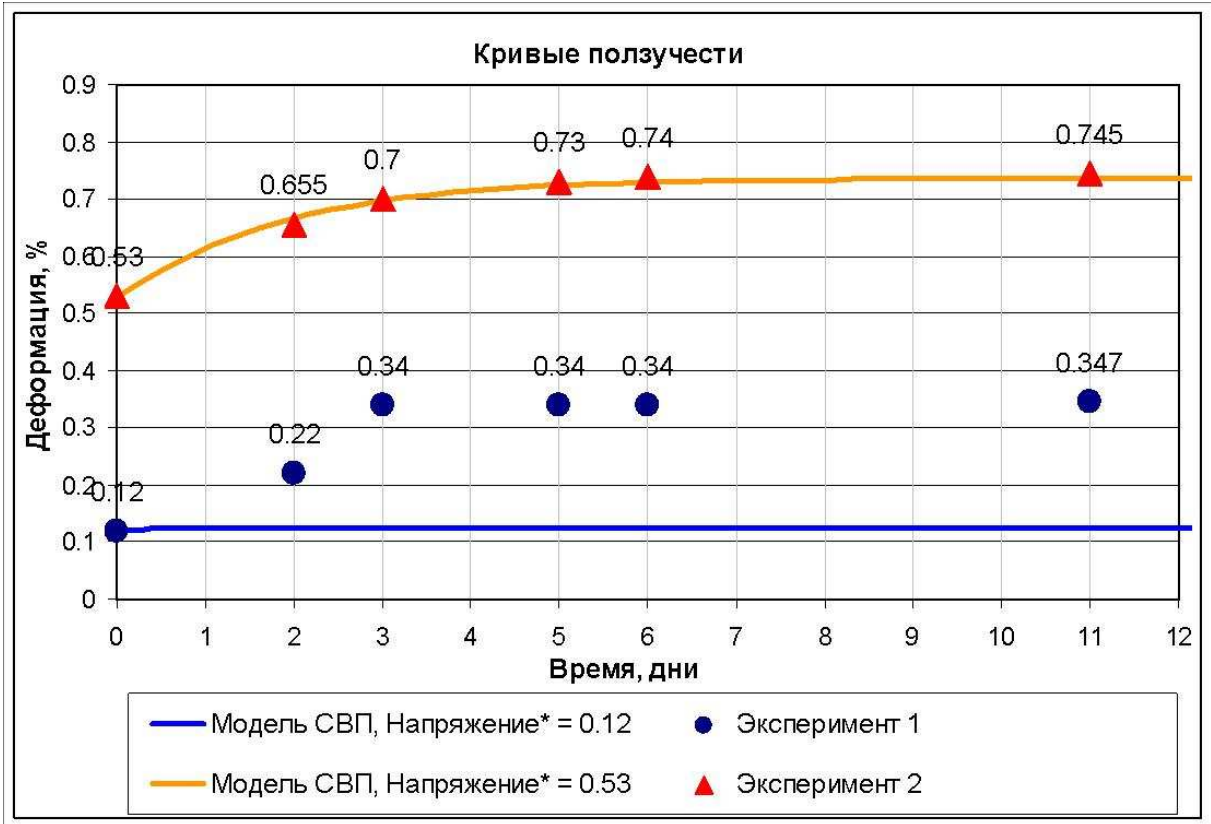


Рис. 4.21. Сопоставление модели СВП (линейный закон старения) с экспериментальными данными

$$g(t, \tilde{\varepsilon}) = (1 + \mu \tilde{\varepsilon} t + \beta (1 - e^{-t/\eta_d})). \quad (4.51)$$

Эволюция функции старения g для $\mu = 0.5$; $\eta_d = 1$; $\beta = 1$ для различных значений $\tilde{\varepsilon} = 0.05$; 0.20 ; 0.50 ; 1.00 представлена на рисунке 4.22

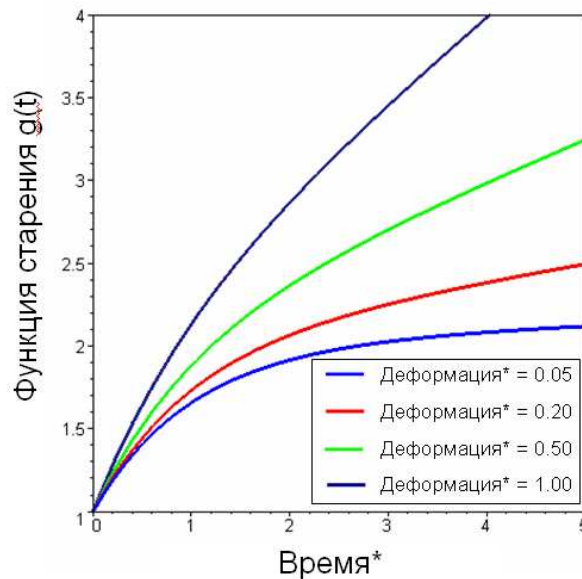


Рис. 4.22. Пояснительная иллюстрация к линейно-экспоненциальному закону старения

При таком выборе функции старения мы минуем “подводный камень” модели Шаламеля и модели СВП - необходимость решения нелинейного уравнения вида

$$D = f(\tilde{\varepsilon})g(t, \tilde{\varepsilon}) \quad (4.52)$$

относительно $\tilde{\varepsilon}$. Но, в целом, для численной реализации такой модели нет ничего страшного - нас спасает любой метод продолжения по параметру, т.к. все условия теоремы о неявной функции выполняются (см. главу 5). А так как функция D неубывающая функция, то можно использовать любой метод из семейства Ньютона - Рафсона.

Для линейно - экспоненциального закона старения и линейного закона поврежденности уравнение (4.52) сводится к уравнению

$$D = \alpha\tilde{\varepsilon} \left(1 + \mu\tilde{\varepsilon}t + \beta \left(1 - e^{-t/\eta_d} \right) \right), \quad (4.53)$$

которое в свою очередь сводится к квадратному уравнению

$$\alpha\mu t\tilde{\varepsilon}^2 + \phi(t)\alpha\tilde{\varepsilon} - D = 0, \text{ где } \phi(t) = 1 + \beta \left(1 - e^{-t/\eta_d} \right), \quad (4.54)$$

решением которого при выборе знака из физических соображений будет

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{-\phi(t) + \phi(t)\sqrt{1 + \frac{4D\mu t}{\alpha\phi^2(t)}}}{2\mu t}. \quad (4.55)$$

При

$$t < \frac{\alpha\phi(t)}{D\mu} \quad (4.56)$$

член $\frac{4D\mu t}{\alpha\phi^2(t)} < 1$. Разложим квадратный корень в ряд Тейлора вблизи $t = 0$ до четвертого члена

$$\sqrt{1 + \frac{4D\mu t}{\alpha\phi^2(t)}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{4D\mu t}{\alpha\phi^2(t)} - \frac{1}{8} \frac{16D^2\mu^2 t^2}{\alpha^2\phi^4(t)} + \frac{3}{48} \frac{64D^3\mu^3 t^3}{\alpha^3\phi^6(t)} + o\left(\frac{4D^3\mu^3 t^3}{\alpha^3\phi^6(t)}\right) \quad (4.57)$$

Подставив это выражение в (4.55), получаем

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{D}{\alpha\phi(t)} - \frac{D^2\mu t}{\alpha^2\phi^3(t)} + \frac{2D^3\mu^2 t^2}{\alpha^3\phi^5(t)} + o\left(\frac{2D^3\mu^2 t^2}{\alpha^3\phi^5(t)}\right) \quad (4.58)$$

или, пренебрегая малыми более высокими порядками и вынося за скобки общий множитель, получаем такое выражение для функции $\chi(D, t)$, которая определяет равновесную кривую

$$\chi(D, t) \cong \frac{D}{\alpha\phi(t)} \left(1 - \frac{D\mu t}{\alpha\phi^2(t)} + \frac{2D^2\mu^2 t^2}{\alpha^2\phi^4(t)} \right) \quad (4.59)$$

Откуда, выражение для плотности скорости высвобождения энергии поврежденности

$$Y_1 = \frac{E_0 k^\pm}{2} \frac{D^2}{\alpha^2\phi^2(t)} \left(1 - \frac{D\mu t}{\alpha\phi^2(t)} + \frac{2D^2\mu^2 t^2}{\alpha^2\phi^4(t)} \right)^2, \quad (4.60)$$

интегрируя которое по поврежденности и домножая на величину обратную плотности, получаем второе слагаемого плотности свободной энергии $\psi_1(D, t)$

$$\psi_1(D, t) = \frac{E_0 k^\pm D^3}{2\rho\alpha^2\phi^2(t)} \left(\frac{4\mu^4 t^4 D^4}{7\alpha^4\phi^8(t)} - \frac{2\mu^3 t^3 D^3}{3\alpha^3\phi^6(t)} + \frac{\mu^2 t^2 D^2}{\alpha^2\phi^4(t)} - \frac{\mu t D}{2\alpha\phi^2(t)} + \frac{1}{3} \right). \quad (4.61)$$

Теперь, чтобы определить термодинамическую силу, связывающую плотность свободной энергии Гельмгольца со временем, требуется продифференцировать выражение $\psi_1(D, t)$ по времени

$$\begin{aligned} Y_t = & -\frac{E_0 k^\pm D^3}{84\alpha^6\phi^{11}(t)} (240\phi'(t)\mu^4 t^4 D^4 - 224\phi'(t)\mu^3 t^3 D^3 \alpha\phi^2(t) + 252\phi'(t)\mu^2 t^2 D^2 \alpha^2\phi^4(t) - \\ & - 84\phi'(t)\mu t D \alpha^3\phi^6(t) + 28\phi'(t)\alpha^4\phi^8(t) - 96\mu^4 t^3 D^4 \phi(t) + 84\mu^3 t^2 D^3 \alpha\phi^3(t) - \\ & - 84\mu^2 t D^2 \alpha^2\phi^5(t) + 21\mu D \alpha^3\phi^7(t)) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Итак, новая модель требует определения 4 констант:

- α - константа, определяющая связь деформации с поврежденностью, ответственна за исходную равновесную кривую, чем больше α , тем большая поврежденность накапливается для фиксированной деформации, тем ниже предел прочности.
- β - величина, ответственная за величину деформаций, накапливаемых в первичной стадии ползучести, чем больше β , тем больше накапливается деформаций в стадии первичной ползучести.
- η_d - величина, ответственная за скорость затухания первичной ползучести, чем больше η , тем быстрее затухает первичная ползучесть.
- μ - величина ответственная за скорость вторичной ползучести, чем больше μ , тем больше скорость вторичной ползучести $\dot{\epsilon}_{II}$.

К сожалению, такое усовершенствование не привело к улучшению количественного совпадения результатов модели и эксперимента в первой стадии ползучести,

более того такое изменение функции старения неправдоподобно с физической точки зрения. В экспериментах не наблюдается резкая потеря запаса прочности при нагружении. Более того отсутствие у переменной времени во второй части функции старения $e^{-t/\eta a}$ множителя, определяющего напряженно-деформированное состояние ведет к падению прочности материала со временем даже без нагрузки. Для бетонов ситуация прямо противоположная - материал первые несколько лет набирает прочность. Поэтому будем считать предлагаемое усовершенствование - неверным путем развития модели. Исходя из структуры предлагаемой модели заключим, что неверное описание первой стадии ползучести для бетонов - это присущий данной модели недостаток, т.к. модель ориентирована в основном на описание других стадий ползучести.

4.6 Преимущества и недостатки модели

Предлагаемая модель и модель Шаламеля обладают целой массой достоинств: относительная простота, большое количество описываемых процессов, небольшое количество констант, термодинамическое обоснование. Но наряду с этим модели обладают и рядом недостатков исправимых и нет.

Первым недостатком является отсутствие температуры в определяющих уравнениях, а это серьезный минус, т.к. процессы ползучести и релаксации, как впрочем и остальные процессы деформирования тесно связаны с температурой тела. Этот недостаток может быть устранен в процессе дальнейшего развития модели.

Второй недостаток - отсутствие предела ползучести. В рамках данной модели приложение сколь угодно малой нагрузки ведет к развитию поврежденности вплоть до разрушения, что не обосновано опытами, поэтому требуется введение в модель предельного значения энергии деформирования, только при превышении которого повреждения будут накапливаться со временем. И это должно стать основной характеристикой процессов ползучести, статической и динамической усталости. Этот недостаток также можно устранить из модели.

Существует несколько недостатков, которые присущи данной модели и не подлежат устранению. Первый - отсутствие учета остаточных деформаций ползучести. В действительности ползучесть всех материалов, в частности бетонов, определяется не только мерой его деградации (поврежденностью), но и вязкими свойствами и способностью накапливать остаточные деформации, поэтому данная модель пригодна для однонаправленных процессов ползучести и релаксации.

Второй недостаток - неправдоподобная для бетона первая стадия ползучести. Эксперименты показывают, что практически при любых нагрузках величина накапливаемых деформаций в первой стадии ползучести практически одинакова, что совсем не так для рассматриваемых моделей.

И третий недостаток связан с аналитическим описанием модели и реализации различных законов поврежденности и старения в рамках данной модели в программном коде. Для определения функции χ , которая, в общем и определяет поведение материала требуется определять обратную функцию $D^{-1}(\tilde{\epsilon}, t)$, которая практически для любых законов не может быть найдена в явном виде. Но связь поврежденности с

ЭМДС, в данных моделях при условии положительности энергии деформирования, однозначная и гладкая на интервале $k_0 < k < k_c$ и производная $\frac{dD}{dk}$ на этом интервале не обращается в нуль, что дает право пользоваться теоремой о неявной функции и при численной реализации модели использовать описываемый далее метод продолжения по параметру или любой из методов семейства Ньютона-Рафсона.

Но в целом модель применима для решения широкого класса задач, а дальнейшее ее развитие приведет к большей универсальности модели, в частности, введение температуры в определяющие параметры, потребует определения меньшего количества констант, а введение порогового значения для ползучести приведет к более правдоподобным результатам.

Часть II

Численные методы механики континуальных повреждений

Глава 5

Метод Рикса

Рассматривается класс повреждаемых материалов, кривая деформирования которых может быть негладкой вблизи предела прочности и иметь широкую область разупрочнения. Численное решение таких задач требует использование методов решения нелинейных уравнений, которые бы были способны учитывать приведенные физические нелинейности. Существует ряд методов продолжения по параметру, используемых при решении задач при физически или геометрически нелинейном поведении материалов, но наиболее часто используемые методы равноинкрементного приращения нагрузки не пригодны для решения класса задач, нелинейность в которых значительно сказывается на касательной матрице жесткости (идеальная пластичность, задача прощелкивания, задача разупрочнения и т.п.), т.к. эти методы применимы только для монотонных функций. В данной главе рассматривается метод Рикса или метод “длины дуги” (arc-length), наиболее часто используемый при решении задач нахождения равновесной кривой деформирования в случаях, когда другие методы неприменимы. В данной главе описывается алгоритм метода, нюансы его реализации в пакете Constitutive Equation Studio (CES) и в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR. Приводятся необходимые выражения для касательных тензоров жесткости и вводятся некоторые дополнения в стандартный метод Рикса, который позволяют получать сходящиеся результаты даже при невыполнении ряда условий теоремы о неявной функции.

5.1 Основы метода Рикса

Метод Рикса (“длины дуги”, arc-length) относится к инкрементально - итерационным методам продолжения по параметру. В отличие от наиболее часто используемых методов равноинкрементного приращения нагрузки, метод Рикса позволяет решать более широкий класс задач с физической (идеальная пластичность, разупрочнение и т.д.) и геометрической нелинейностью (“прощелкивание”, потеря устойчивости и т.д.). В методе Рикса инкремент λ рассматривается как неизвестная, это позволяет делать каждый шаг по кривой на равное расстояние, которое задано пользователем.

Рассмотрим систему n нелинейных уравнений относительно вектора $\underline{X} \sim \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, содержащую параметр λ

$$\mathbf{r}(\lambda, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \lambda \mathbf{f} = 0 \quad (5.1)$$

или в покомпонентном виде

$$r_i(\lambda, X_1, X_2, \dots, X_n) = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n) - \lambda f_i = 0, \text{ где } i = \overline{1, n} \quad (5.2)$$

Нас интересует поведение вектора \mathbf{X} при изменении параметра λ . Пусть известна начальная точка A_0 в n -мерном пространстве \mathbf{X}_0 для параметра λ_0

$$r(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = 0. \quad (5.3)$$

Рассмотрим окрестность ε_{rect} этой точки в виде прямоугольного параллелепипеда в \mathbb{R}^{n+1} с центром в данной точке. Свойства решения системы в этой окрестности устанавливает теорема о неявной функции. В ней показано, что если

1. Вектор \mathbf{r} должен быть определен и непрерывен в ε_{rect} .
2. Частные производные $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ должны существовать и быть непрерывны в ε_{rect} .
3. В точке A $\|J(\mathbf{r})\|$ - якобиан функции \mathbf{r} отличен от нуля,

то в некоторой окрестности точки A_0 решение \mathbf{X} является однозначной непрерывной функцией параметра λ

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\lambda) \quad (5.4)$$

таким, что

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\lambda_0), \quad (5.5)$$

а производные $d\mathbf{r}/d\lambda$ также непрерывны в этой окрестности.

Якобиан вектора $\mathbf{r}(\mathbf{X})$ есть определитель матрицы Якоби J определяемой следующим образом

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial X_j}. \quad (5.6)$$

Иными словами, если выполняются условия 1 - 3 в окрестности точки A_0 , то в этой окрестности существует единственная кривая, определяемая параметром λ . Двигаясь от точки A мы попадаем в точку A_1 на этой кривой, и если условия 1 - 3 в окрестности новой точки выполняются, мы продвигаемся дальше в точку A_2 и т.д. Условие 3 является тут наиболее важным и не всегда выполняется в задачах механики, в частности в нашем случае это не так. Зачастую возможность продолжения

решения в нерегулярных точках, для которых не выполняется условие 3, остается, но само продолжение может стать неоднозначным.

Другую формулировку метода продолжения по параметру предложил Д.Ф. Давыденко. Продифференцировав уравнение (5.1) по параметру λ получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\lambda} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = 0 \quad (5.7)$$

Для этой системы уравнение (5.1) является полным интегралом, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = 0 \quad (5.8)$$

Если $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \right| \neq 0$, то уравнение (5.7) можно трактовать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\lambda} = -J^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}, \quad \text{где } J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) и начальное условие (5.8) формулируют задачу Коши, для которой можно пользоваться хорошо изученными схемами интегрирования начальных задач.

Метод Рикса заключается в таком выборе инкрементов $\Delta \mathbf{X}$ и $\Delta \lambda$, которые бы сообщали минимально возможную обусловленность системы уравнений. А минимально возможную обусловленность системе сообщает движение по касательной к кривой решения. Значит, чем меньше шаг, тем ближе инкременты к оптимальным. По кривой будем “шагать” равными шагами Δl , тогда можно сформулировать $n + 1$ уравнение для системы (5.1)

$$p(\Delta \mathbf{X}, \Delta \lambda) = (\Delta s)^2 - (\Delta l)^2 = (a^2 \Delta \mathbf{X} \cdot \Delta \mathbf{X} + b^2 \Delta \lambda^2) - (\Delta l)^2 = 0, \quad (5.10)$$

где a и b - множители, определяющие меру шага в пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Более подробно этот выбор будет рассмотрен ниже.

Приведенный вид (5.10) является одним из возможных приближений более общего вида

$$p(d\mathbf{X}, d\lambda) = \left(\int_{(\mathbf{X}_i, \lambda_i)}^{(\mathbf{X}_{i+\Delta \mathbf{X}}, \lambda_i + \Delta \lambda_i)} \sqrt{a^2 d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} + b^2 d\lambda^2} \right)^2 - (\Delta l_i)^2 = 0 \quad (5.11)$$

Итак, на каждом i -ом шаге по времени, на каждой k -ой итерации имеем систему $n + 1$ уравнения относительно вектора $\Delta \underline{\mathbf{X}}^k$ размерности n и изменения параметра нагружения $\Delta \lambda^k$ при известной начальной или найденной на предыдущем шаге точке $(\mathbf{X}_i, \lambda_i)$.

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\lambda_i + \Delta\lambda^k, \mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}^k) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}^k) - (\lambda_i + \Delta\lambda^k) \underline{f} & = 0 \\ p(\Delta\mathbf{X}^k, \Delta\lambda^k) = \left(a^2 \Delta\mathbf{X}^k \cdot \Delta\mathbf{X}^k + b^2 (\Delta\lambda^k)^2 \right) - (\Delta l^k)^2 & = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Двигаемся от известной точки $(\lambda_i, \mathbf{X}_i)$ в точку $(\lambda_{i+1}, \mathbf{X}_{i+1}) = (\lambda_i + \Delta\lambda^k, \mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}^k)$, решая систему (5.12) относительно вектора в пространстве \mathbb{R}^{n+1}

$$(\Delta X_1^k, \Delta X_2^k, \dots, \Delta X_n^k, \Delta\lambda) \quad (5.13)$$

В методе решения данной системы уравнений можно выделить три этапа

1. Предиктор - первый грубый шаг
2. Корректор - решение уточняется
3. Уточнение шага по кривой

Цель **предиктора** - используя данные о предыдущей точке, вычислить начальное приближение, которое будет использоваться в фазе корректора. Существуют различные подходы к решению задачи фазы предиктора, приведем подход, использованный в [52]. Запишем приращение $\Delta\mathbf{X}_p^1$ как

$$\Delta\mathbf{X}^p = \mathbf{K}_t^{-1} \cdot (\Delta\lambda^p \underline{f}) = \Delta\lambda^p \delta\tilde{\mathbf{X}}^p, \text{ где } \delta\tilde{\mathbf{X}}^p = \mathbf{K}_t^{-1} \cdot \underline{f}, \quad (5.14)$$

где \mathbf{K}_t - касательная матрица жесткости, определяемая как

$$\mathbf{K}_t^p = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}^p}. \quad (5.15)$$

Забыв на время, что касательная матрица жесткости может быть вырожденной, подставим полученное выражение (5.15) во второе уравнение системы (5.12)

$$\begin{aligned} (a^2 \Delta\mathbf{X}^p \cdot \Delta\mathbf{X}^p + b^2 \Delta(\lambda^p)^2) &= \left(a^2 (\Delta\lambda^p \delta\tilde{\mathbf{X}}^p) \cdot (\Delta\lambda^p \delta\tilde{\mathbf{X}}^p) + b^2 \Delta\lambda_p^2 \right) = \\ &= \Delta\lambda_p^2 \left(a^2 (\delta\tilde{\mathbf{X}}^p) \cdot (\delta\tilde{\mathbf{X}}^p) + b^2 \right) = (\Delta l_i)^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Отсюда получаем выражение для приращения инкремента $\Delta\lambda^p$ с учетом возможной вырожденности касательной матрицы жесткости

¹индекс p означает, что приращение посчитано предиктором (англ. predictor)

$$\Delta\lambda^p = \begin{cases} \pm \frac{(\Delta l_i)}{\sqrt{a^2(\delta\tilde{\mathbf{X}}^p) \cdot (\delta\tilde{\mathbf{X}}^p) + b^2}}, & \text{если } \det \mathbf{K}_t^p \neq 0; \\ 0, & \text{если } \det \mathbf{K}_t^p = 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

а следовательно и для приращения вектора

$$\Delta\mathbf{X}^p = \Delta\lambda^p \delta\tilde{\mathbf{X}}^p \quad (5.18)$$

Существует несколько способов выбора знака. Например, выбор знака может основываться на

- На знаке минимального компонента касательной матрицы жесткости: хорошо работает при резком смене направления, но такой подход неприменим при наличии точек ветвления.
- На оценке работы $\Delta A = (\Delta\lambda^p \mathbf{f}) \cdot \Delta\mathbf{X}^p$: этот же способ хорошо работает при наличии точек ветвления и не работает при резком смене направления кривой решения.

В фазе **корректора** в качестве входных параметров мы имеем уже две точки $(\mathbf{X}_i, \lambda_i)$ и $(\mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}^p, \lambda_i + \Delta\lambda^p)$. Систему уравнений (5.12) можно решать различными методами. Приведем схему метода Ньютона - Рафсона и модифицированную схему Ньютона - Рафсона.

Разложим \mathbf{r} в ряд Тейлора вблизи произвольной точки $(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old})$, которая на первой фазе корректора $(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old}) = (\mathbf{X}_i + \Delta\mathbf{X}^p, \lambda_i + \Delta\lambda^p)$

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}_{old} + \delta\mathbf{X}^k, \lambda_{old} + \delta\lambda^k) = \mathbf{r}(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old}) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \delta\mathbf{X}^k + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \delta\lambda^k + o(\delta\mathbf{X}, \delta\lambda) \quad (5.19)$$

Откинув члены второго порядка малости и учтя, что

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old})}{\partial \mathbf{X}}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old})}{\partial \lambda}, \quad (5.21)$$

получим следующее выражение

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}_{old} + \delta\mathbf{X}^k, \lambda_{old} + \delta\lambda^k) = \mathbf{r}(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old}) + \mathbf{K}_t(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old}) \cdot \delta\mathbf{X}^k + \mathbf{f} \delta\lambda^k = 0 \quad (5.22)$$

То же самое сделаем и с уравнением для длины дуги

$$p(\Delta \mathbf{X}_{old} + \delta \mathbf{X}^k, \Delta \lambda_{old} + \delta \lambda^k) = p(\Delta \mathbf{X}_{old}, \Delta \lambda_{old}) + 2a^2 \Delta \mathbf{X}_{old} \cdot \delta \mathbf{X}^k + 2b^2 \Delta \lambda_{old} \delta \lambda^k = 0 \quad (5.23)$$

Обозначим $p_{old} = p(\Delta \mathbf{X}_{old}, \Delta \lambda_{old})$, $r_{old} = \mathbf{r}(\mathbf{X}_{old}, \lambda_{old})$, K_t - матрицу, соответствующую тензору жесткости \mathbf{K}_t , а \mathbf{f} - столбец, соответствующий вектору \mathbf{f} , ΔX_i - столбец, соответствующий вектору $\Delta \mathbf{X}_{old}$ и запишем систему в матричном виде

$$\begin{bmatrix} K_t & -\mathbf{f} \\ 2a^2 \Delta X_{old}^T & 2b^2 \Delta \lambda_{old} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{old} \\ p_{old} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix} = -\mathbb{K}^{-1} \begin{bmatrix} r_{old} \\ p_{old} \end{bmatrix}, \text{ где } \mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_t & -\mathbf{f} \\ 2a^2 \Delta X_{old}^T & 2b^2 \Delta \lambda_{old} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Матрица \mathbb{K} называется расширенной матрицей жесткости, для которой всегда существует обратная в силу того, что ее определитель не равен нулю $\|\mathbb{K}\| \neq 0$, даже тогда, когда определитель исходной касательной матрицы жесткости равен нулю.

Уточнение шага по кривой может производиться различными способами. Выберем один из наиболее простых способов

$$\Delta l_{i+1} = \Delta l_i \left(\frac{N_s}{N_k} \right)^\alpha, \quad (5.26)$$

где N_s - заданное пользователем число итераций на одном инкременте, N_k - число проделанных итераций на k -ом инкременте, а $\alpha > 0$ - параметр метода.

Сходимость метода на каждом инкременте определяется выбором критерия. Рассмотрим некоторые из них

1. Критерий оценки перемещений²

$$\|\delta \mathbf{X}\| = \sqrt{\delta \mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{X}} \leq \varepsilon_u \quad (5.27)$$

2. Критерий оценки ошибки

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \leq \varepsilon_r \quad (5.28)$$

3. Энергетический критерий

$$|\delta \mathbf{X} \cdot \mathbf{r}| \leq \varepsilon_u \quad (5.29)$$

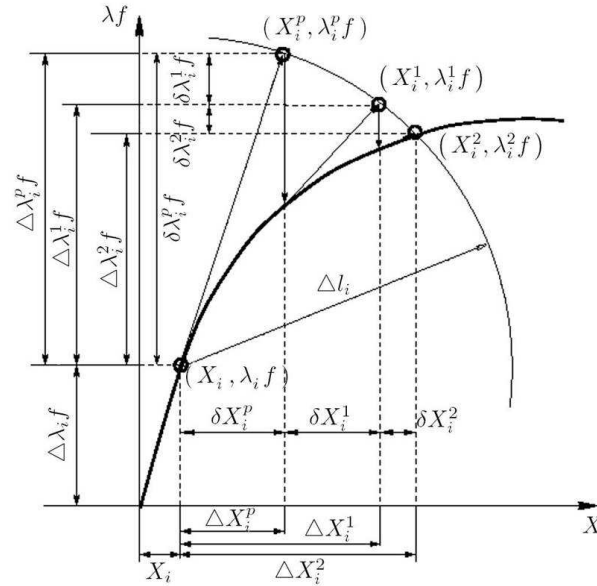


Рис. 5.1. Поясняющая иллюстрация к методу Рунса

Приведем стандартный алгоритм реализации метода Рунса для двумерного случая. Для наглядности обратимся к рисунку 5.1, на котором проиллюстрирована работа метода Рунса.

1. Пусть нам известна начальная точка $(X_i, \lambda_i f)$.
2. По формуле (5.17) находим приращение параметра $\Delta\lambda_i^p$.
3. По формуле (5.18) находим приращение параметра ΔX_i^p .
4. Отнимаем от полученной точки $(X_i^p, \lambda_i^p f)$ - значение невязки $r(X_i^p, \lambda_i^p)$, возвращаемся на кривую. и начинаем итерационный процесс
5. Начинаем итерационный процесс: $k = 0$
 - (a) Если это первая итерация $k = 0$, то в ΔX_i^k и в $\Delta\lambda_i^k$ записываем значения полученные на фазе предиктора $\Delta X_i^k = \Delta X_i^p$ и $\Delta\lambda_i^k = \Delta\lambda_i^p$
 - (b) Иначе $\Delta X_i^k = \Delta X_i^{k-1} + \delta X_i^{k-1}$ и $\Delta\lambda_i^k = \Delta\lambda_i^{k-1} + \delta\lambda_i^{k-1}$
 - (c) Проверяем удовлетворяет ли полученная точка $(X_i + \Delta X_i^k, \lambda_i f + \Delta\lambda_i^p)$ критерию сходимости, если критерий не удовлетворен идем дальше, если удовлетворен, то
 - i. $X_{i+1} = X_i + \Delta X_i^k$
 - ii. $\lambda_{i+1} = \lambda_i f + \Delta\lambda_i^p$
 - iii. По формуле (5.26) уточняем шаг Δl_{i+1}
 - iv. Переходим к пункту (2).
 - (d) Решаем систему (5.24) и получаем новые $\delta\lambda_i^k$ и δX_i^k
 - (e) Присваиваем $k = k + 1$

²Термин “перемещения” здесь использован, т.к. в механике в роли вектора \mathbf{X} выступает вектор перемещений \underline{U} .

(f) Возвращаемся к началу итераций в пункт (а)

Замечание: расширенная матрица жесткости не симметрична, поэтому, если необходимо использовать решатель СЛАУ³, прибегают к схеме, позволяющей разделить систему на две симметричные системы СЛАУ. Этот вопрос будет подробно разобран в пункте 5.4.

5.2 Реализация метода Рикса в Constitutive Equation Studio

CES - Constitutive Equation Studio, пакет анализа моделей материалов, созданный к.ф.-м.н. А.С. Семеновым и другими, уже упоминался выше. Для анализа поведения повреждаемых материалов при мягком нагружении в пакет CES был интегрирован метод Рикса.

Определим переменные и множители, с которыми мы будем работать. При мягком нагружении пользователь задает точки по временной оси и значения тензоров напряжений в этих точках. Не умаляя общности⁴, рассмотрим случай монотонного нагружения, когда тензор напряжений меняется от нулевого до $\boldsymbol{\sigma}_c$. Сопоставим тензору напряжений вектор $\boldsymbol{\sigma}$ в шестимерном пространстве, который определяет симметричную часть тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} \sim \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \}^T. \quad (5.30)$$

Искомый тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ меняется также от нуля до некоторого значения, по аналогии сопоставим ему вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, \}^T. \quad (5.31)$$

Сформулируем первое уравнение системы, как невязку задаваемых напряжений и напряжений вычисленных по деформациям

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \lambda \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (5.32)$$

Для повреждаемых материалов функция F имеет конкретный вид

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) = {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} (1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})), \quad (5.33)$$

где ${}^4\mathbf{C}$ - матрица жесткости неповрежденного материала (аналог тензора жесткости четвертого ранга), а D - мера поврежденности. Приближенная длина дуги в новых обозначениях запишется

$$p(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\lambda) = a^2 \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + b^2 (\Delta\lambda)^2 - (\Delta l_i)^2 = 0. \quad (5.34)$$

³СЛАУ - система линейных алгебраических уравнений

⁴Любой другой случай можно свести к этому.

Здесь стоит остановиться на выборе параметров a и b . Различные варианты дают в общем разные методы.

1. $a = 0, b \neq 0$: приращение деформаций - напряжения вычисляются по деформациям. Этот случай нас не интересует.
2. $a \neq 0, b = 0$: приращение напряжений - приходим к методам равного приращения инкремента нагрузки - методам семейства Ньютона - Рафсона и подобным. Нас этот случай также не интересует.
3. $0 \neq a = b \neq 0$: гипер-сферический метод. Вокруг точки описывается гиперсфера, на поверхности которой происходит поиск решения.
4. $0 \neq a \neq b \neq 0$: гипер-эллиптический метод. Вокруг точки описывается гипер-эллипс, на поверхности которого происходит поиск решения. Наиболее общий случай, который и будем рассматривать.

Так как напряжения с деформациями связаны соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} (1 - D), \quad (5.35)$$

а тензор напряжений меняется от нуля до $\boldsymbol{\sigma}_c$, то автору кажется логичным для уравнения роли приращения инкремента нагрузки и инкремента внутренних параметров - деформации использовать

$$a = \left\| {}^4\mathbf{C} \right\|; \quad b = \|\boldsymbol{\sigma}_c\| \quad (5.36)$$

Можно определять приближенную длину дуги иначе, используя матрицу жесткости (или, например, касательную матрицу жесткости) как весовую функцию скалярного произведения векторов

$$p(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\lambda) = \left({}^4\mathbf{C} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) \cdot \left({}^4\mathbf{C} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) + \|\boldsymbol{\sigma}_c\|^2 (\Delta\lambda)^2 - (\Delta l_i)^2 = 0 \quad (5.37)$$

Касательный приведенный тензор жесткости \mathbf{K}_t соответствует следующей производной в новых обозначениях

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \left({}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} (1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) \right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathbf{C} \cdot \left((1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) \underline{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial D(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (5.38)$$

Тогда фаза предиктора для точки $(\boldsymbol{\varepsilon}^k, \lambda^k)$, сводящаяся к нахождению приращений внутренних переменных $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ по найденному инкременту внешней нагрузки $\Delta\lambda^p$, запишется в следующем виде

$$\Delta\lambda^p = \pm \frac{\Delta l_i}{\sqrt{a^2 (\mathbf{K}_t^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_c) \cdot (\mathbf{K}_t^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_c) + b^2}}, \quad (5.39)$$

конечно, при условии существования обратной матрицы касательной жесткости. В случае вырожденности этой матрицы полагаем $\Delta\lambda = 0$. Если минимальный член тензора \mathbf{K}_t меньше нуля, то выбираем знак минус, иначе выбираем знак плюс. Приращение деформаций просто находится из приращения нагрузки

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{K}_t^{-1} \cdot (\Delta\lambda^p \boldsymbol{\sigma}_c) \quad (5.40)$$

Следующие шаги - уточнение (коррекция) решения до требуемой точности. При этом решается система уравнения вида (5.24). В новых обозначениях эта система переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} K_t & -\boldsymbol{\sigma}_c \\ 2a^2 \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{iT} & 2b^2 \Delta \lambda^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \delta \lambda^i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r^i \\ p^i \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

где K_t - матрица, соответствующая касательному тензору жесткости, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i$ - столбец, соответствующий приращению вектора деформаций на данном инкременте, а r^i - столбец, соответствующий вектору невязки \mathbf{r}^i . Выражения \mathbf{r}^i и p^i для первой итерации корректора выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= r(\boldsymbol{\varepsilon}_k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \lambda_k + \Delta\lambda^p) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) - (\lambda_k + \Delta\lambda^p) \boldsymbol{\sigma}_c \\ p_1 &= p(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta\lambda^p) = a^2 \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + b^2 (\Delta\lambda^p)^2 - (\Delta l^i)^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (5.41), получаем значения $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^1$ (соответствующий столбцу вектор $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^1$) и $\delta \lambda^1$. Теперь приращения деформаций и параметра нагрузки в данном инкременте будет

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^1 \\ \Delta \lambda^2 &= \Delta \lambda^p + \delta \lambda^1 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Находим $\mathbf{r}^2(\boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^2, \lambda^k + \Delta\lambda^2)$ и $p^2(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^2, \Delta\lambda^2)$, опять решаем систему (5.41) и так далее, пока не будет достигнута требуемая точность. Работа метода подробно проиллюстрирована на рисунке 5.1.

5.3 Касательная матрица жесткости

В дополнение приведем явные выражения для касательных матриц жесткости \mathbf{K}_t для различных эквивалентных мер и законов поврежденности. Вспомним выражение для касательной матрицы жесткости

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \left({}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} (1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) \right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \left((1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{E} \mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial D(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \\ &= {}^4\mathbf{C} (1 - D(\boldsymbol{\varepsilon})) - {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial D(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

в котором содержится слагаемое, которое может быть представлено в более развернутом виде с учетом того, что $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = D(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}))$, где $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - эквивалентная мера деформированного состояния

$$\frac{\partial D(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial D(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (5.45)$$

Необходимо отметить, что касательный тензор жесткости не обладает всеми симметриями, которыми обладает тензор упругих модулей

$$K_{ijkl} = K_{jikl} \neq K_{klji} = K_{klij} \text{ и } C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klji} = C_{klij} \quad (5.46)$$

Поэтому следует обратить внимание на порядок следования тензоров в диадном произведении в выражении (5.44).

Вычисление этой частной производной сводится к вычислению двух частных производных, выражения для которых и будут представлены в данном параграфе. Но для начала приведем некоторые вспомогательные частные производные, которые нам могут понадобиться. Вспомним параграф 3.2, в котором приводились основные эквивалентные меры и законы поврежденности. В выражениях для эквивалентной меры деформированного состояния достаточно часто используются главные значения тензора деформации (мера Мазарса, расширенная мера Мазарса, модифицированная мера Мазарса, модифицированная энергетическая мера). Значит нам необходимо уметь вычислять частную производную вида

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.47)$$

где ε_i - одно из главных значений тензора деформаций, которое может быть выражено через три инварианта тензора деформации $\varepsilon_i = \varepsilon_i(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\boldsymbol{\varepsilon}), I_3(\boldsymbol{\varepsilon}))$. Тогда⁵

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \varepsilon_i(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\boldsymbol{\varepsilon}), I_3(\boldsymbol{\varepsilon}))}{\partial I_k(\boldsymbol{\varepsilon})} \frac{\partial I_k(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.48)$$

Значит нам остается только вычислить производные главных значений по всем инвариантам тензора, а затем вычислить производные инвариантов по тензору. Итоговое выражение для частной производной главных деформаций по тензору деформации будет

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right), \quad (5.49)$$

где введены следующие обозначения

⁵Здесь и далее повторяющийся индекс означает суммирование по Эйнштейну.

$$c_0^i = \begin{cases} \frac{2}{3J_2} \cos(\vartheta_i), & \text{если } \gamma \leq -1 \text{ или } \gamma \geq 1 \text{ или } \gamma = 0; \\ \frac{2}{3J_2} (-f'\gamma + f), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.50)$$

$$c_1^i = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma \leq -1 \text{ или } \gamma \geq 1; \\ \frac{4}{3J_2^2} \sin(\vartheta_i), & \text{если } \gamma = 0; \\ f' \frac{4}{3J_3^2}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\gamma = \frac{J_3}{J_2}, \text{ где } J_2 = \sqrt{-\frac{4}{3}I_2(\mathbf{e})}; \quad J_3 = \sqrt[3]{4I_3(\mathbf{e})} \quad (5.52)$$

$$\vartheta_i = \vartheta + \alpha_i, \text{ где } \vartheta = \frac{\arccos(\gamma^3)}{3}; \quad \alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1; \\ \frac{4}{3}\pi, & \text{если } i = 2; \\ \frac{2}{3}\pi, & \text{если } i = 3. \end{cases} \quad (5.53)$$

Имея выражение для частной производной главных деформаций по тензору деформаций (5.49), легко записать частные производные различных эквивалентных мер, содержащих главные значения, по тензору деформаций в виде

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \varepsilon_i} \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right) \right) \quad (5.54)$$

Приведем список искомых частных производных для различных мер деформаций, зависящих от главных значений тензора деформации. Сами меры деформации приводятся в параграфе 3.2.

1. Мера Мазарса

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right) \right)}{\sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2}} \quad (5.55)$$

2. Расширенная мера Мазарса

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right) \right)}{(\langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p)^{1-\frac{1}{p}}} \quad (5.56)$$

3. Обобщенная мера Мазарса

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial \varepsilon} = \frac{(\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} + \frac{1}{\kappa^p} |\langle -\varepsilon_i \rangle|^{p-1}) \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right) \right)}{(\langle \varepsilon_1 \rangle^p + \langle \varepsilon_2 \rangle^p + \langle \varepsilon_3 \rangle^p + \frac{1}{\kappa} (|\langle -\varepsilon_1 \rangle|^p + |\langle -\varepsilon_2 \rangle|^p + |\langle -\varepsilon_3 \rangle|^p))^{1-\frac{1}{p}}}$$
(5.57)

В дополнение приведем частную производную модифицированной энергетической меры по тензору деформаций для изотропного материала. В случае анизотропии упругих свойств, вычисление искомой производной сводится к дифференцированию тензоров поворота \mathbf{P} , приводящих тензор деформаций к главному базису, т.е. к дифференцированию косинусов углов поворота от исходного базиса к главному.

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}^+)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{s^i \left(\frac{1}{3} \mathbf{E} + c_0^i \mathbf{e} + c_1^i \left(\mathbf{e}^2 - \frac{J_2^2}{2} \mathbf{E} \right) \right) \cdot \cdot {}^4 \mathbf{C}}{\tilde{\varepsilon}}, \text{ где } s^i = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i \leq 0; \\ 1, & \varepsilon_i > 0. \end{cases}$$
(5.58)

Все производные от тензора деформации по ЭМДС, которые содержат значения главных деформаций, за исключением модифицированной энергетической меры, могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tilde{\varepsilon}} = a \mathbf{E} + b \mathbf{e} + f \mathbf{e}^2$$
(5.59)

Приведем сводную таблицу всех производных тензора деформации по ЭМДС, содержащих главные значения

Производные тензора деформации по ЭМДС

Мера	a	b	f
Мера Мазарса	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{3\tilde{\varepsilon}} \left(1 + 3c_1^i \frac{J_2^2}{2} \right)$	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle c_0^i}{\tilde{\varepsilon}}$	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle c_1^i}{\tilde{\varepsilon}}$
Расширенная мера Мазарса	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1}}{3\tilde{\varepsilon}^{p-1}} \left(1 + 3c_1^i \frac{J_2^2}{2} \right)$	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} c_0^i}{\tilde{\varepsilon}^{p-1}}$	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} c_1^i}{\tilde{\varepsilon}^{p-1}}$
Обобщенная мера Мазарса	$\frac{\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} + \frac{1}{\kappa^p} \langle \varepsilon_i \rangle ^{p-1}}{3\tilde{\varepsilon}^{p-1}} \left(1 + 3c_1^i \frac{J_2^2}{2} \right)$	$\frac{(\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} + \frac{1}{\kappa^p} \langle \varepsilon_i \rangle ^{p-1}) c_0^i}{\tilde{\varepsilon}^{p-1}}$	$\frac{(\langle \varepsilon_i \rangle^{p-1} + \frac{1}{\kappa^p} \langle \varepsilon_i \rangle ^{p-1}) c_1^i}{\tilde{\varepsilon}^{p-1}}$

Эквивалентная мера дэ Ри содержит в своем выражении первый инвариант тензора деформаций и второй инвариант девиатору деформаций. Поэтому нам понадобятся выражения для частных производных этих инвариантов по тензору деформаций. Выражение для частной производной первого инварианта по тензору

$$\frac{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}, \quad (5.60)$$

а пользуясь выражением

$$I_2(\mathbf{e}) = \frac{1}{6}I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2}I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (5.61)$$

запишем выражение для частной производной второго инварианта девиатора по тензору

$$\frac{\partial I_2(\mathbf{e})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.62)$$

Запишем выражение для частной производной меры дэ Ри по тензору деформаций в развернутом виде

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})} \frac{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial I_2(\mathbf{e})} \frac{\partial I_2(\mathbf{e})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.63)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{\kappa - 1}{2\kappa(1 - 2\nu)} + \frac{\frac{(\kappa-1)^2}{(1-2\nu)^2}I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{2\kappa\sqrt{\frac{(\kappa-1)^2}{(1-2\nu)^2}I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{12\kappa}{(1+\nu)^2}I_2(\mathbf{e})}} \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial I_2(\mathbf{e})} = \frac{-\frac{12\kappa}{(1+\nu)^2}}{4\kappa\sqrt{\frac{(\kappa-1)^2}{(1-2\nu)^2}I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{12\kappa}{(1+\nu)^2}I_2(\mathbf{e})}} \quad (5.65)$$

Итоговое выражение для искомой производной

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), I_2(\mathbf{e}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{6\kappa}{(1+\nu)^2\theta(\boldsymbol{\varepsilon})}\boldsymbol{\varepsilon} +} \quad (5.66)$$

$$\boxed{+ \left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa(1 - 2\nu)} + \frac{(\kappa - 1)^2 I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{(1 - 2\nu)^2 \theta(\boldsymbol{\varepsilon})} - \frac{2\kappa I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{(1 + \nu)^2 \theta(\boldsymbol{\varepsilon})} \right) \mathbf{E}},$$

где введено обозначение

$$\theta(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\kappa \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1^2(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{12\kappa}{(1 + \nu)^2} I_2(\boldsymbol{e})} \quad (5.67)$$

Для эквивалентных мер, не содержащих главные значения и инварианты тензора деформаций и его девиатора, выражения для искомым частных производных получаются намного проще. Так для энергетической меры Лемэтра выражение частной производной эквивалентной меры деформации по тензору деформации запишется

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{{}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{E \tilde{\varepsilon}}. \quad (5.68)$$

Вспомним, что для вычисления тензора касательной жесткости необходимо знать выражение частной производной поврежденности по эквивалентной мере деформации

$$\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \quad (5.69)$$

Вычисление этих производных не составляет сложности. Приведем выражения искомым производных для всех законов поврежденности, рассмотренных в главе 3.

1. Линейный закон поврежденности

$$\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \tilde{\varepsilon} = k \\ 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < k \end{cases} \quad (5.70)$$

2. Билинейный закон поврежденности

$$\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{k_c k_0}{k^{-2}(k_c - k_0)}, & \text{если } \tilde{\varepsilon} = k \\ 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < k \end{cases} \quad (5.71)$$

3. Экспоненциальный закон поврежденности Мазарса

$$\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{k_0}{k^2} (1 - \alpha + \alpha (1 + \beta k) e^{-\beta(k - k_0)}), & \text{если } \tilde{\varepsilon} = k \\ 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < k \end{cases} \quad (5.72)$$

4. Закон поврежденности Гирса

$$\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \left(\frac{k_c - k}{k_c - k_0} \right)^\alpha \left(\frac{k_0}{k} \right)^\beta \left(\frac{\beta}{k} + \frac{\alpha}{k_c - k} \right), & \text{если } \tilde{\varepsilon} = k \\ 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < k \end{cases} \quad (5.73)$$

Это все необходимые выражения для определения касательного тензора жесткости, используемого в методе Рикса. Эти же выражения будут использованы при внедрение этого метода в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR. Остальные детали имплементации метода Рикса приведены в следующем параграфе. Но прежде чем перейти к описанию реализации этого метода в конечно элементном пакете, сделаем ряд замечаний по части сходимости - расходимости метода и дополнительных усовершенствованиях добавленных к стандартному методу Рикса. Наиболее опасной точкой в материале с сильно физически нелинейными свойствами (в данном случае, накопление повреждений, начиная с определенного значения меры деформированного состояния) является точка начала накопления повреждений. Для большинства рассмотренных законов гладкость функции - необходимое условие выполнения теоремы о неявной функции - теряется, это приводит к потери устойчивости фазы корректора и решение рушится. С целью избежания подобных ситуаций, стандартный метод Рикса был дополнен корректором особой точки⁶. Основная идея этого дополнение - отказ от использования корректора, если в фазе предиктора происходит смена знака определителя касательной матрицы жесткости. Вместо этого продолжает работать корректор, но с использованием переменной длины дуги. Алгоритмически эту фазу можно записать так:

1. Новая длина дуги полагается равной половине исходной $l_{new} = l/2$.
2. Из начальной точки строится продолжение решения средствами предиктора с новой длиной дуги (l_{new}).
3. Если касательная матрица новой точки и исходной точки имеют разные знаки, то новая длина дуги $l_{new} = l_{new} - l/4$,
4. Иначе $l_{new} = l_{new} + l/4$.
5. Из начальной точки опять строится продолжение решения средствами предиктора с длиной дуги (l_{new}).
6. Если касательная матрица новой точки и исходной точки имеют разные знаки, то новая длина дуги $l_{new} = l_{new} - l/8$,
7. Иначе $l_{new} = l_{new} + l/8$.
8. И так далее, пока не будет достигнута установленная точность или максимальное число итераций.

⁶Здесь, под особой точкой будем понимать точку разрыва первой производной функции.

9. Конечной точкой выбирается точка, в которой знак определителя касательной матрицы жесткости отличен от знака определителя исходной касательной матрицы с целью дальнейшего подключения корректора на последующих шагах.

Проиллюстрируем работу метода Рикса для в различных ситуациях. В качестве тестового закона в основном будем использовать закон Гирса с параметрами $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$; $\alpha = 2$; $\beta = 2$ и энергетическую меру Лемэтра. На рисунках 5.3, 5.4, 5.5 приведены результаты использования метода в случае одноосного растяжения ($\epsilon_c \sim (300, 0, 0, 0, 0, 0)$), на рисунке 5.6 приведены результаты использования метода в случае двуосного растяжения равными силами ($\epsilon_c \sim (300, 300, 0, 0, 0, 0)$), а на рисунке 5.7 приведены результаты использования метода в случае трехосного нагружения различными силами ($\epsilon_c \sim (300, 200, -300, 0, 0, 0)$).

Работа корректора особой точки приведена на рисунке 5.2.

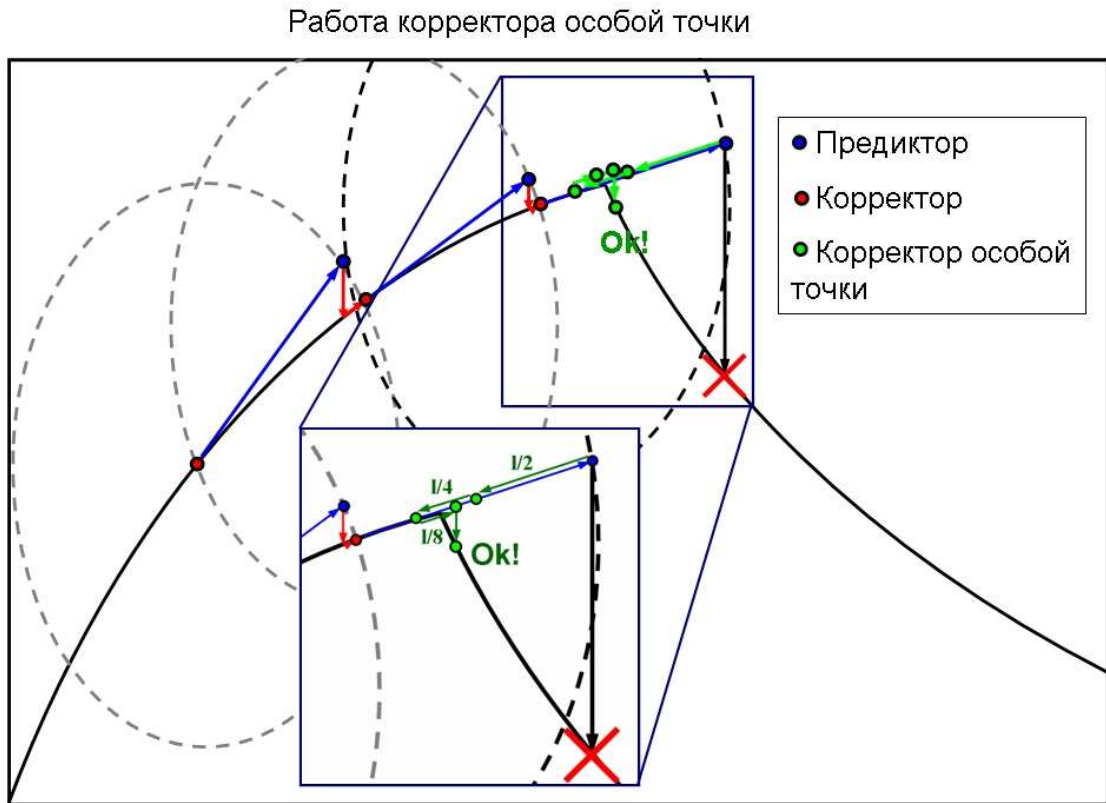


Рис. 5.2. Поясняющая иллюстрация к реализации метода корректора особой точки

На рисунке 5.3 приведены графики зависимости напряжений от деформаций, полученные с помощью метода Рикса дуги при использовании только предиктора для различных значений длины дуги (шага).

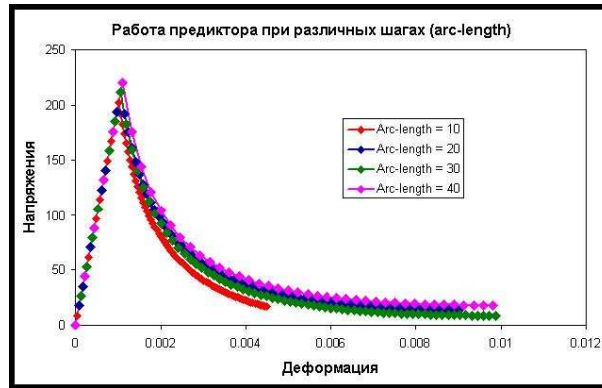


Рис. 5.3. Проверка работы предиктора на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$) для различной длины дуги (шага)

На рисунке 5.4 приведена увеличена часть рисунка 5.3.

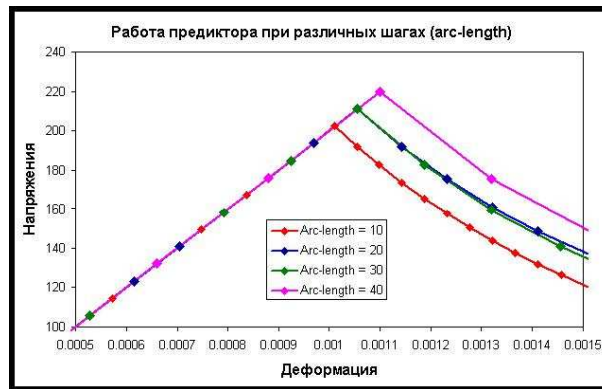


Рис. 5.4. Проверка работы предиктора на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$) для различной длины дуги (увеличенный фрагмент)

На рисунке 5.5 представлена зависимость напряжений от деформаций, полученная с помощью метода Рикса при использовании предиктора и корректора особой точки для длины дуги равной 50.

На рисунке 5.6 представлены зависимости напряжения от деформаций в направлениях приложения двусосного нагружения. Из рисунка видно, что предиктор не в состоянии обеспечить сходимость решения и условие использования корректора становится обязательным для получения качественно правильного результата.

На рисунке 5.7 представлен вариант работы метода Рикса для закона Гирса и различных критериев ЭМДС для двусосного растяжения.

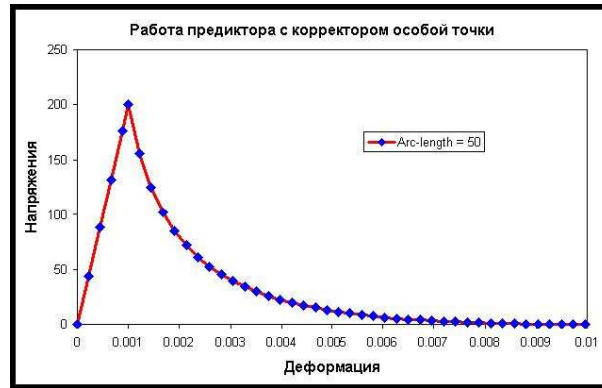


Рис. 5.5. Проверка работы предиктора и корректора особой точки на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$)

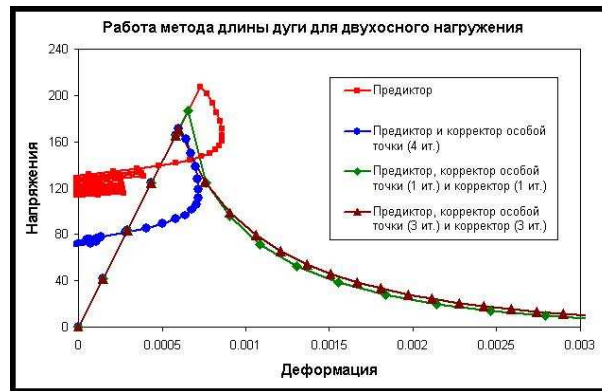


Рис. 5.6. Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$) в случае двухосного растяжения

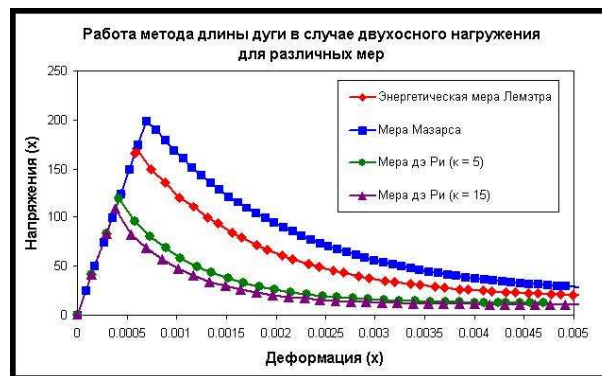


Рис. 5.7. Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$) и четырех критериях ЭМДС в случае двухосного растяжения

На рисунке 5.8 представлены зависимости напряжения от деформаций в трех направлениях приложения трехосного нагружения для закона Гирса и четырех критериев ЭМДС.

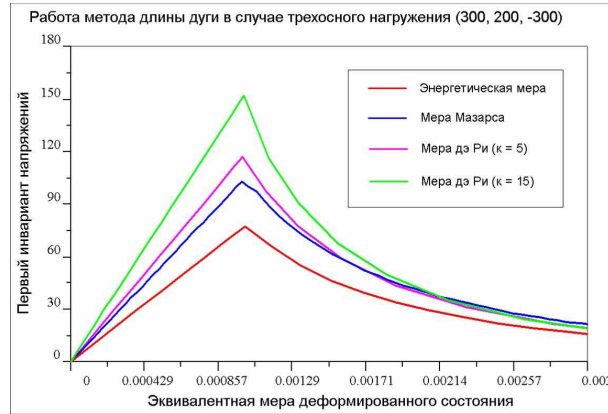


Рис. 5.8. Проверка работы предиктора, корректора особой точки и корректора на законе Гирса ($\alpha = 2$; $\beta = 2$; $k_0 = 0.001$; $k_c = 0.01$) и четырех критериях ЭМДС в случае трехосного растяжения

5.4 Реализация метода Рикса в PANTOCRATOR

Реализация метода Рикса для пакета CES и для конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR различаются двумя важными аспектами В PANTOCRATOR требуется по заданному вектору сил, находить вектор перемещений.

1. Размерности этих векторов в любой, даже в самой примитивной, задаче значительно превосходят размерности тензора напряжений и деформаций, которые вычислялись в CES, и равны n - произведению количества узлов модели на количество степеней свободы в узле.
2. Т.к. в методе Рикса требуется на каждой итерации решать СЛАУ размерностью $n + 1$, то эффективно было бы использовать методы решения для симметричных СЛАУ, которые уже реализованы в PANTOCRATOR. Поэтому следует отказаться от решения системы уравнений с несимметричной матрицей, что продельвается в методе Рикса в CES, а решать два раза СЛАУ с симметричной матрицей размерностью n .
3. Т.к. в PANTOCRATOR метод Рикса определяет связь между силами и перемещениями в узлах, то необходимые касательные матрицы жесткости будут выглядеть незначительно, но иначе.

Для начала введем основные обозначения, используемые в методе конечных элементов.

- $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ - вектор перемещений, который в произвольной точке конечного элемента определяется через перемещения в узлах \mathbf{U} при помощи матрицы аппроксимирующих функций (функций формы) $\mathbf{N}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (5.74)$$

- При линейной связи перемещений и деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^s \quad (5.75)$$

деформации записываются через матрицу градиентов \mathbf{B} , компоненты которой являются производными от функций формы \mathbf{N}

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}. \quad (5.76)$$

- В методе конечных элементов решается система

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^{ext}, \quad (5.77)$$

где $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}))) = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV$ - вектор внутренних сил, $\mathbf{F}^{ext} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dV$ - вектор внешних сил.

- $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$ - матрица жесткости, связывающая внутренние силы с перемещениями

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (5.78)$$

- $\mathbf{K}_t = \int_V \mathbf{B}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] \mathbf{B} dV$ - матрица касательной жесткости или касательная матрица жесткости.

Из определения касательной матрицы жесткости \mathbf{K}_t ясно, что по сути для определения матрицы жесткости в PANTOCRATOR надо определить частную производную тензора напряжений по тензору деформаций, что и было подробно проделано в параграфе 5.3.

Остается решить задачу о решении СЛАУ с несимметричной матрицей. В соответствии с [30] СЛАУ с несимметричной матрицей размерности $(n+1) \times (n+1)$, решаемая на каждой итерации (см. параграф 5)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{F}^{ext} \\ \mathbf{a} & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ p^{k-1} \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{k-1} &= \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}^{k-1}) - \lambda^{k-1} \mathbf{F}^{ext} - \text{вектор невязки} \\ p^{k-1} &= a^2 \Delta (\mathbf{U}^{k-1})^T \mathbf{U}^{k-1} + b^2 \Delta \lambda^{k-1} - \Delta l_i^2 - \text{невязка длины дуги} \\ \mathbf{a} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial a^2 \Delta (\mathbf{U})^T \mathbf{U} + b^2 \Delta \lambda^2 - \Delta l^2}{\partial \Delta \mathbf{U}} = 2a^2 \Delta \mathbf{U} \\ g &= \frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial a^2 \Delta (\mathbf{U})^T \mathbf{U} + b^2 \Delta \lambda^2 - \Delta l^2}{\partial \Delta \lambda} = 2b^2 \Delta \lambda \end{aligned} \quad (5.80)$$

может быть сведена к решению двух СЛАУ с симметричными матрицами размерностью $n \times n$ каждая.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t \delta \bar{\mathbf{U}}^k &= \lambda^{k-1} \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}^{k-1}) \\ \mathbf{K}_t \delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}^k &= \mathbf{F}^{ext} \end{aligned} \quad (5.81)$$

Через решение этой системы относительно $\delta \bar{\mathbf{U}}^k$ и $\delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}^k$ выражаются инкремент нагрузки и инкремент перемещений

$$\begin{aligned} \delta \lambda^k &= - \frac{p^{k-1} + (\mathbf{a}^{k-1})^T \delta \bar{\mathbf{U}}^k}{g^{k-1} + (\mathbf{a}^{k-1})^T \delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}^k} \\ \delta \mathbf{U}^k &= \delta \bar{\mathbf{U}}^k + \delta \lambda^k \delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}^k \end{aligned} \quad (5.82)$$

Откуда в итоге новые значения инкрементов на k -ой итерации будут

$$\begin{aligned} \lambda^k &= \lambda^{k-1} + \delta \lambda^{k-1} \\ \mathbf{U}^k &= \mathbf{U}^{k-1} + \delta \mathbf{U}^{k-1} \end{aligned} \quad (5.83)$$

Замечание: в действительности для некоторых критериев определения ЭМДС, касательная матрица жесткости, как это было показано выше, будет несимметрична. Асимметрия касательной матрицы жесткости незначительна по сравнению с асимметрией глобальной матрицей, используемой в однопроходном методе Рикса. Поэтому, как показали численные эксперименты симметризация касательной матрицы жесткости не приводит к значительным изменениям результатов. Симметризованная матрица \mathbf{K}_t^S

$$\mathbf{K}_t^S = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_t + \mathbf{K}_t^T) \quad (5.84)$$

Часть III

Инженерные приложения механики континуальных повреждений

В бакалаврской работе автора [34] в конечно-элементный программный комплекс PANTOCRATOR [26], создаваемый А.С. Семеновым и другими были имплементированы некоторые законы поврежденности (билинейный закон, законы Гирса и Мазарса) и критерии ЭМДС (энергетический, Мазарса и дэ Ри). При написании магистерского диплома в PANTOCRATOR был добавлен расширенный критерий Мазарса (3.52). В данной в PANTOCRATOR решается несколько классических задач МКП, проводится сравнение с результатами экспериментов и в некоторых случаях с результатами других авторов. Эксперименты, на которых традиционно проверяются модели МКП:

1. Задача о сдвиговой деформации пластины с двумя надрезами (эксперимент Нуру - Мохамеда, см. также [44] и [42]).
2. Задача о четырехточечном изгибе плиты с одним надрезом (эксперимент Шлаген, см. также [50], [36], [49]).
3. Задача о четырехточечном изгибе плиты с двумя надрезами (эксперимент Бажанта и Пфайфера, см. также [50], [42]).

Также в данной части решается две нестандартные для МКП задачи, но очень важные для расчета различных инженерных конструкций:

1. Задача о вытягивании анкера из бетонного блока (эксперимент UA Anchor Project, 2001, см. также [36])
2. Задача о вытягивании профилированной стержневой арматуры из бетонного блока

Раньше подобные задачи решались достаточно приближенными методами с большим количеством допущений и без учета накопления повреждений. Исследование было выполнено по заданию В.В. Белова, заведующего кафедры “Строительные конструкции и материалы” СПбГПУ.

Решение задач механики континуальных повреждений в локальной постановке требует большой аккуратности, равномерности сетки, большого числа инкрементов нагружения в фазе нарастания нагрузки и малого в области убывания нагрузки, грамотного выбора параметров материала и размера элементов. Все это делает решение задач достаточно трудоемким делом. В нелокальной же постановке решение много менее чувствительно в ориентации сетки конечно-элементной модели. В данной части также обсуждаются некоторые аспекты применимости локального подхода, приводятся примеры гипер-чувствительности решения к ориентации конечно-элементной сетки и размера ее элементов, а также количеству шагов интегрирования.

Глава 6

Классические задачи механики континуальных повреждений

6.1 Задача о сдвиге тонкой пластины с двумя надрезами

Рассматривается опыт Нуру-Мохамеда, приведенный в [44] и [42], геометрия и граничные условия для которого представлены на рисунке 6.1. Целью решения этой задачи является демонстрация качественной сходимости результатов и проверка сходимости по сетке.

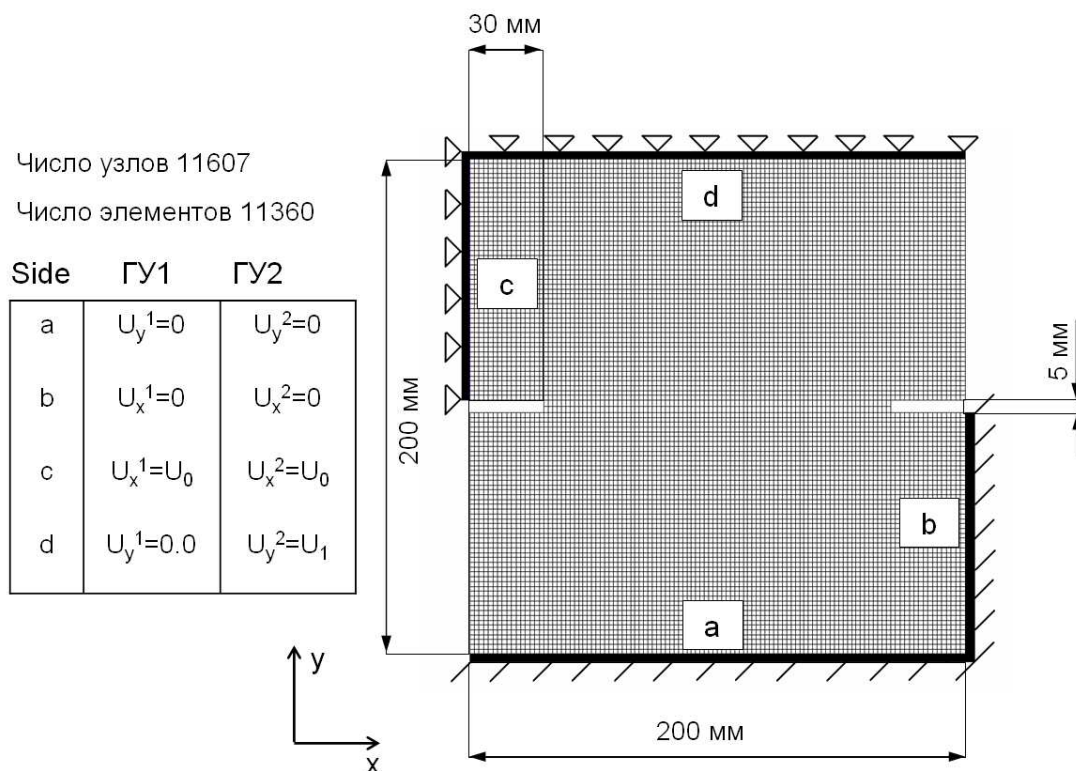


Рис. 6.1. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Десмората

К плите, закрепленной на стороне “а” по вертикальным перемещениям, на стороне “б” по горизонтальным перемещениям, прикладывается жесткая нагрузка: на стороне “с” с начального момента времени $t = 0$ по момент времени $t = t_1$ прикладываются горизонтальные перемещения $U_x = U_0 t / t_1$ и сохраняются неизменными $U_x = U_0$ вплоть до момента $t = t_2$. В момент времени $t = t_1$ на стороне “д” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = U_1(t - t_1) / (t_2 - t_1)$. Натурный эксперимент показал, что при таком приложении нагрузок, в вершинах надрезов возникает две трещины, которые растут в зависимости от соотношения нагрузок U_0 и U_1 , как показано на рисунке 6.2.

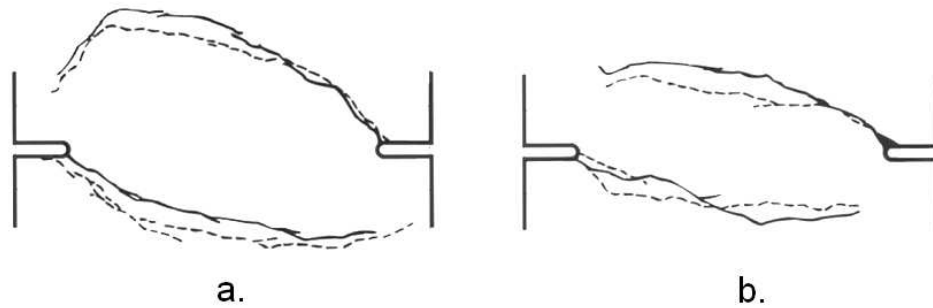


Рис. 6.2. Экспериментальный рост трещин в тесте Десмората для $\gamma_1 = U_0/U_1$ (слева) и $\gamma_2 < \gamma_1$ (справа)

Численный эксперимент был поставлен в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR, при использовании критерия дэ Ри для определения ЭМДС ($\kappa = 15$) и для закона Мазарса для констант $\alpha = 0.9$; $\beta = 100$; $k_0 = 0.001$. Свойства материала: изотропный, изначально однородный (неповрежденный) материал с модулем Юнга $E = 42000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$. Решалось несколько вариантов задач с различными значениями U_0 и U_1 :

- I. $U_0 = 0.5$ мм; $U_1 = 0.5$ мм
- II. $U_0 = 0.7$ мм; $U_1 = 0.7$ мм
- III. $U_0 = 0.4$ мм; $U_1 = 0.7$ мм
- IV. $U_0 = 0.2$ мм; $U_1 = 0.7$ мм

Результаты численного эксперимента представлены на рисунке 6.4 (римские цифры соответствуют номеру теста). Как видно из численного эксперимента поля поврежденности и деформаций достаточно хорошо описывают поля развития микродефектов, и возникающие трещины достаточно точно совпадают с экспериментальными данными.

Результаты анализа сходимости решения по сетке показали, что поле поврежденности зависит от размера элемента, но при достижении определенного размера элементом, конфигурация поля поврежденности перестает меняться, т.е. решение сходится по конфигурации трещины при заданном количестве инкрементов. Т.к. в локальном подходе к проблемам МКП, размер элемента играет роль ПОЭ и заменяет определяющий размер в нелокальном подходе и в соответствии с тестом сходимости

по сетке, размер элемента в этой и последующих задачах выбран около 2 мм, что считается приемлимым для образцов из раствора содержащего только очень мелкие частицы, размер которых значительно меньше 2-х мм [44]. Поля поврежденности, вертикальных деформаций, а также конечно-элементные сетки представлены на рисунке 6.5 для теста IV $U_0 = 0.2$ мм; $U_1 = 0.7$ мм:

- Грубая сетка: число узлов 1974, число элементов 1870, размер элемента около 5 мм.
- Средняя сетка: число узлов 4701, число элементов 4540, размер элементы около 2.5 мм.
- Хорошая сетка: число узлов 11607, число элементов 11360, размер элемента около 1.8 мм.
- Супер сетка: число узлов 27298, число элементов 26910, размер элемента около 1.2 мм.

Для сравнения приведем результаты Десмората [44], использовавшего нелокальную анизотропную модель поврежденности. На рисунке 6.3 представлены поля тензора анизотропной поврежденности в вертикальном и горизонтальном направлениях.

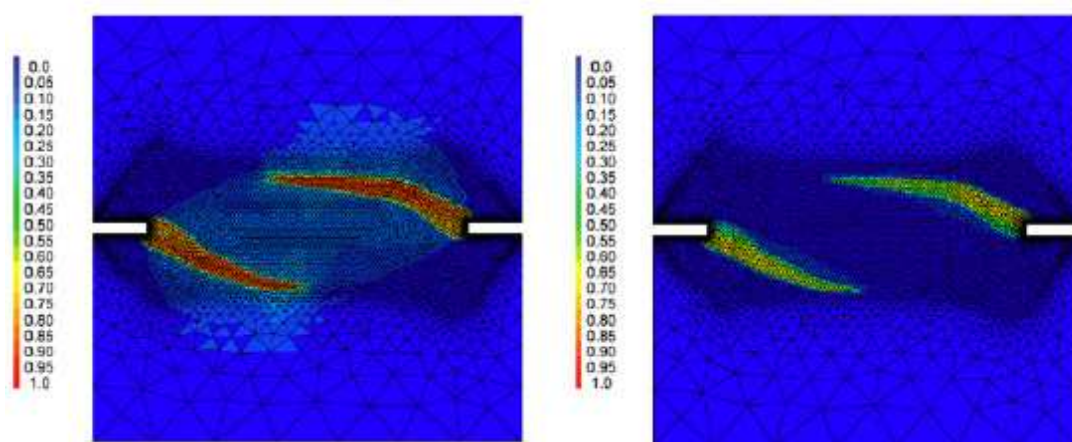


Рис. 6.3. Компоненты тензора поврежденности, численный эксперимент Десмората [44]

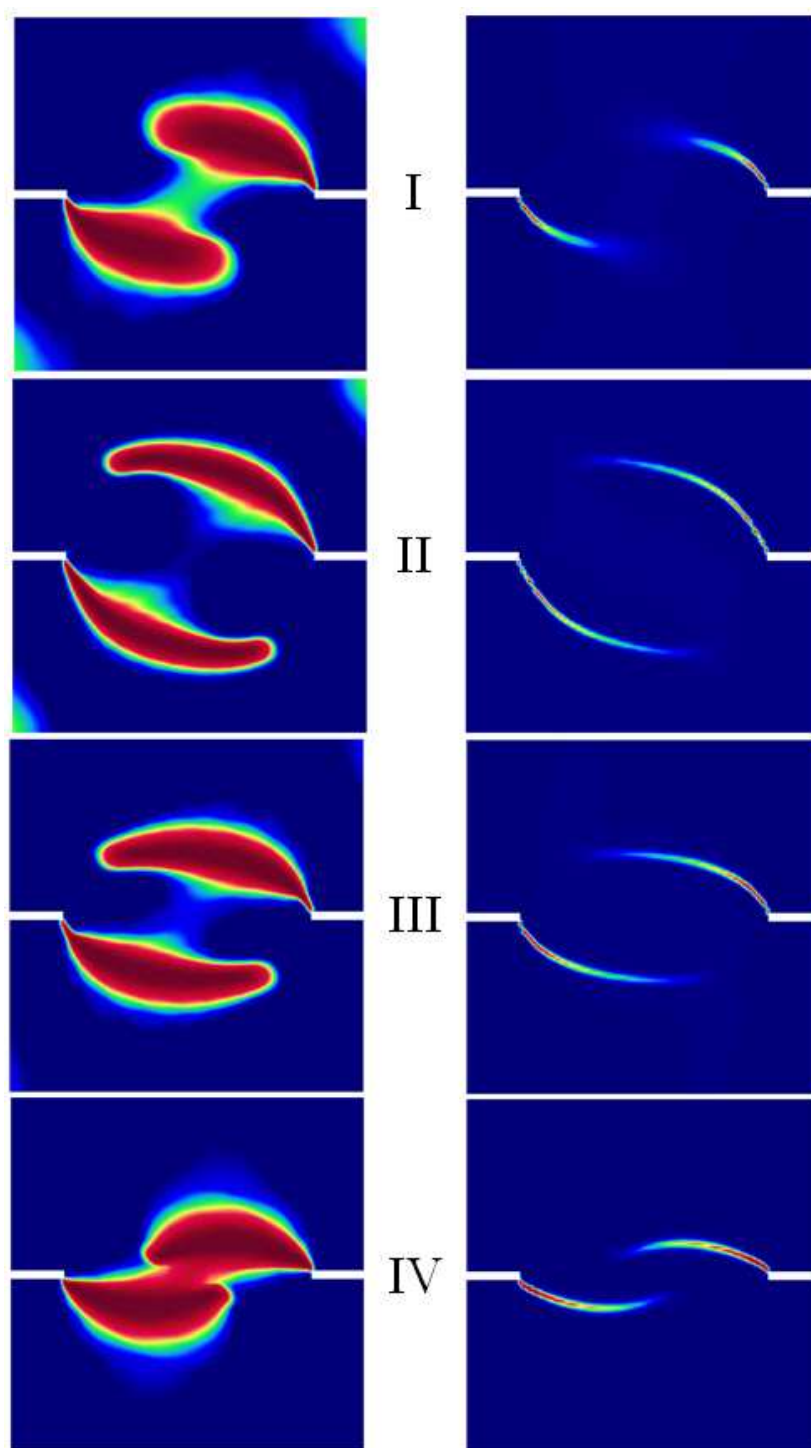


Рис. 6.4. Поля поврежденности (слева) и поля вертикальных деформаций (справа) в тесте Десмората для различных U_0 и U_1

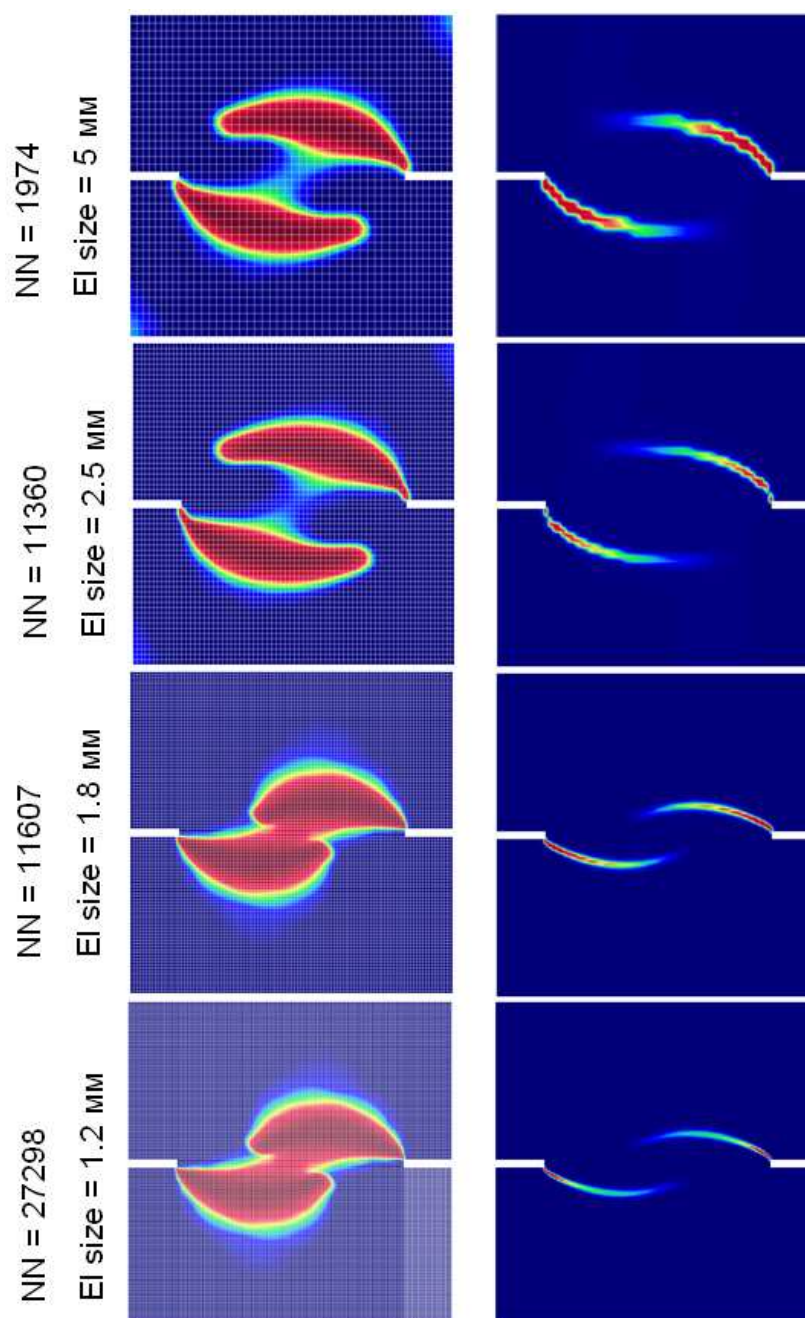


Рис. 6.5. Поля поврежденности (слева) и поля вертикальных деформаций (справа) в задаче Десмората для различных конечно-элементных сеток

6.2 Задача о четырехточечном изгибе балки с одним надрезом

Рассматривается опыт Шлангена, известный в литературе как SEN (single-edge notched) beam test - четырехточечный несимметричный изгиб балки с надрезом. Результаты численного и натурального эксперимента приведены во множестве работ, например в [50], [36], [49]. Геометрия, конечно-элементная сетка и граничные условия представлены на рисунке 6.6.

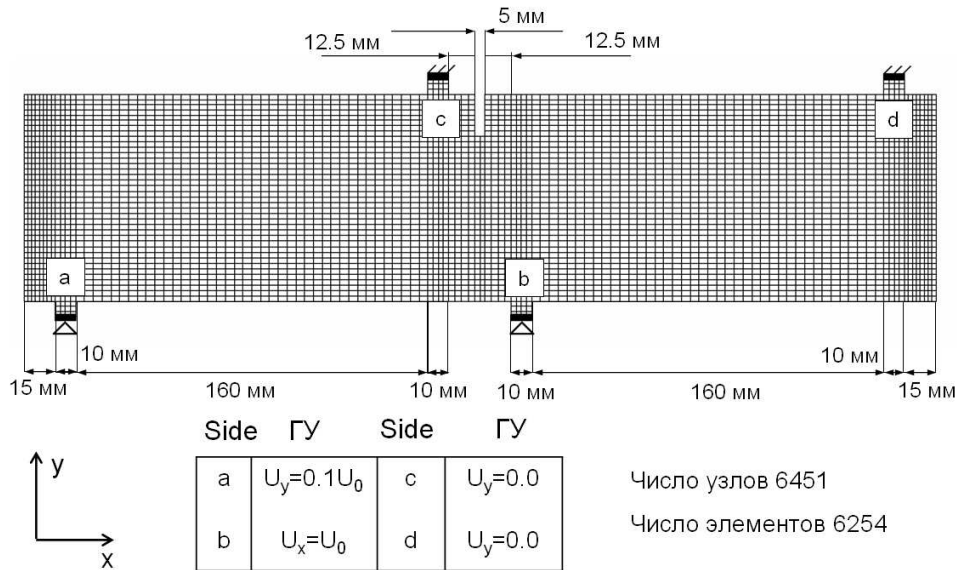


Рис. 6.6. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Шлангена (толщина образца 100 мм)

К стороне “а” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = 1/10U_0$, к стороне “б” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = U_0$, стороны “с” и “д” закреплены по вертикальным перемещениям. Натурный эксперимент показал 6.7, что при мягком нагружении в вершине разреза возникает трещина, которая движется до правой части стороны “б”, при более жестком нагружении возможно образование второй трещины (b) или даже центральной, вертикально соединяющий вырез с основанием [50].

Численный эксперимент был поставлен в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR, при использовании критерия дэ Ри для определения ЭМДС ($\kappa = 25$) и для закона Мазарса для констант $\alpha = 0.96$; $\beta = 350$; $k_0 = 0.000059$. Свойства материала были взяты из эксперимента Балаторе [42]): изотропный, изначально гомогенный (неповрежденный) материал с модулем Юнга $E = 37000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$. При таких параметрах прочность на сжатие $f_c = 54.5$ МПа, на растяжение $f_t = 2.18$ МПа (в эксперименте Балаторе $f_c = 51.7$ МПа, $f_t = 2.18$ МПа).

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 6.8 (поля поврежденности, масштаб деформаций 100) и поля горизонтальных деформаций. Как вид-

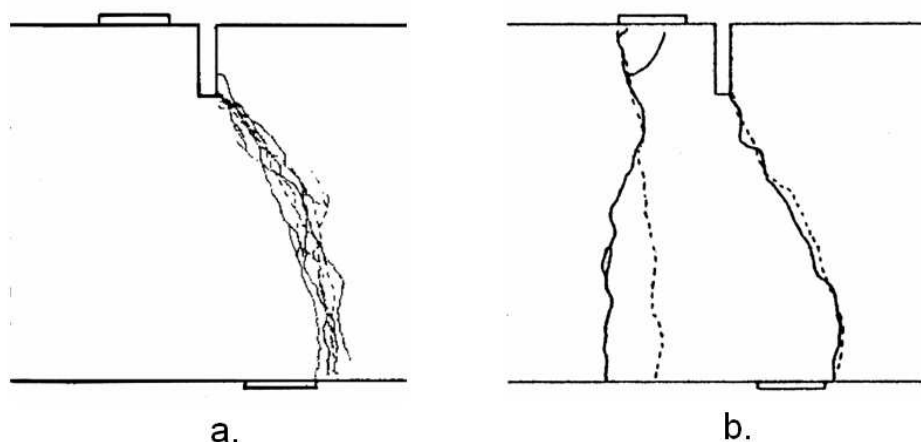


Рис. 6.7. Экспериментальный рост трещины в тесте Шлангена

но из численного эксперимента поля поврежденности и деформаций достаточно хорошо описывают поля развитие микродефектов, и возникающие трещины достаточно точно совпадают с экспериментальными данными.

Как уже упоминалось выше размер элемента в локальном подходе к проблемам МКП определяет ПОЭ и размер микроструктуры. Поэтому в соответствии с данными авторов [50], принимающих для своих расчетов определяющий размер области осреднения в 1 мм^2 , выбран размер элемента около 2 мм . Дальнейшее уменьшение размера элемента не влияет на картину возникающих трещин и поля накапливаемых повреждений при заданных параметрах решения.

Для сравнения приведем результаты численного эксперимента из работы Гирса, Борста и Пирлингса [47], в которой авторы использовали градиентную модель первого порядка для определения ЭМДС (см. параграф 2.2. Определяющие параметры) и результаты численного эксперимента Бажанта [36], использовавшего микроплоскостную модель. На рисунке 6.9 представлены поля поврежденности, полученные авторами для различных инкрементов нагрузки.

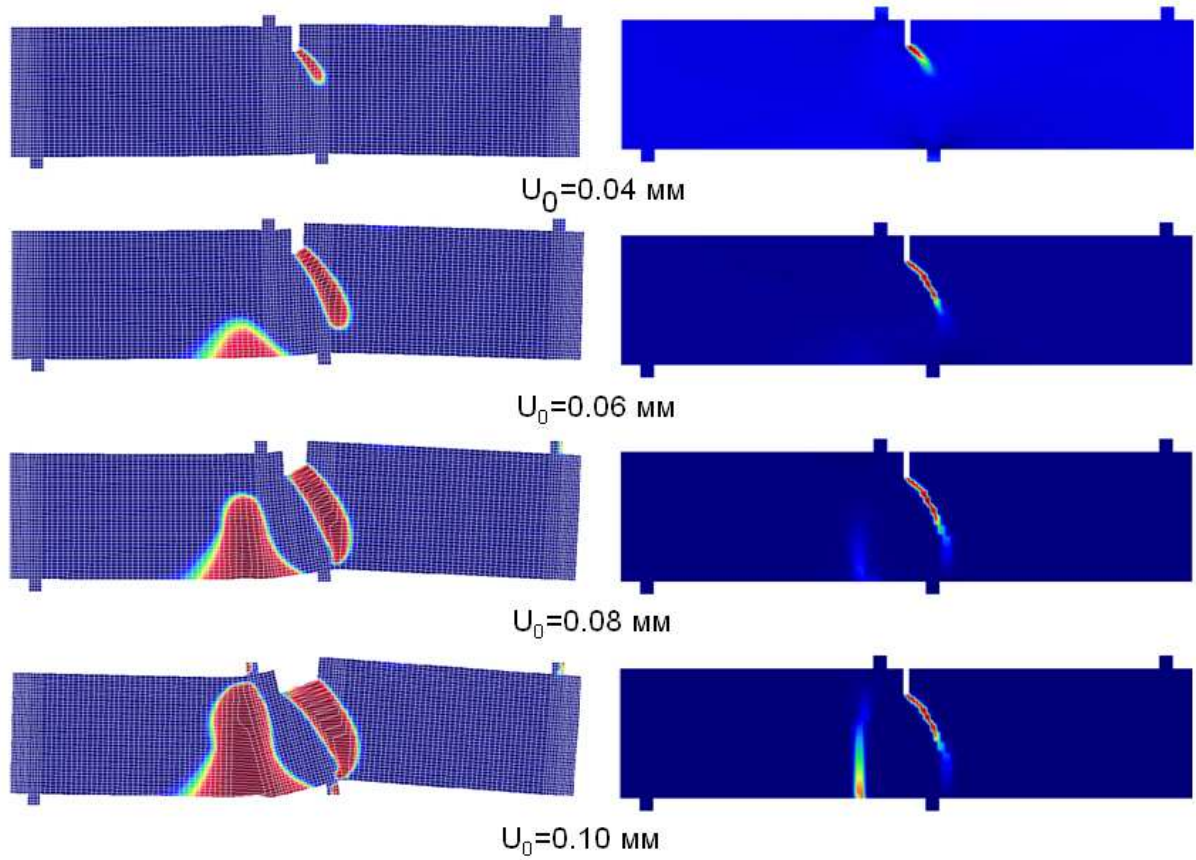


Рис. 6.8. Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Шлагена для различных инкрементов нагружения

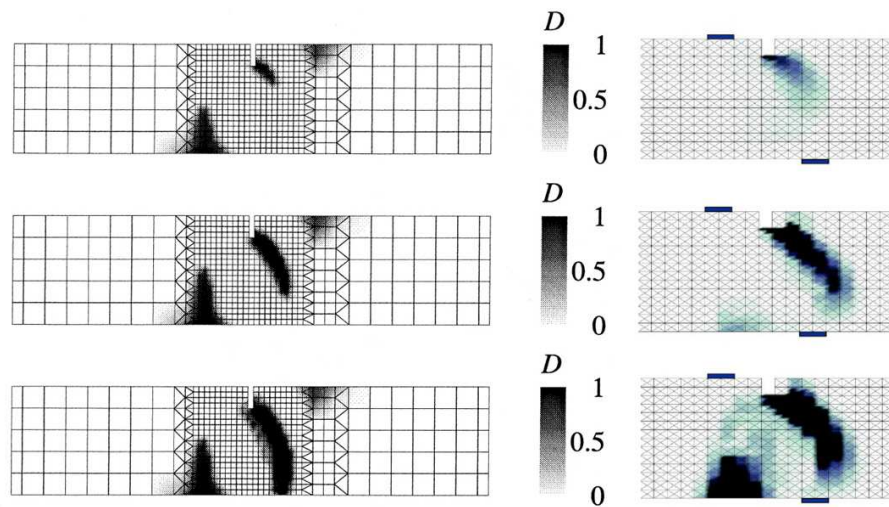


Рис. 6.9. Поля поврежденности для различных инкрементов нагрузки, слева - численный эксперимент Гирса, Борста и Пирлингса [47], справа - численный эксперимент Бажанта [36]

На рисунке 6.10 приведен график зависимости осредненной силы на стороне “b”¹ от перемещений левой верхней границы надреза и экспериментальные данные Шлангена, взятые из работы [49]. Очевидна очень хорошая сходимость результатов по определению максимальной нагрузки, однако в стадии падения силы используемый локальный подход дает значительно заниженное значение силы по сравнению с экспериментом, и в общем это значение зависит от сетки и от количества инкрементов интегрирования - это следствие использования локального подхода, аспекты применимости которого обсуждаются ниже.

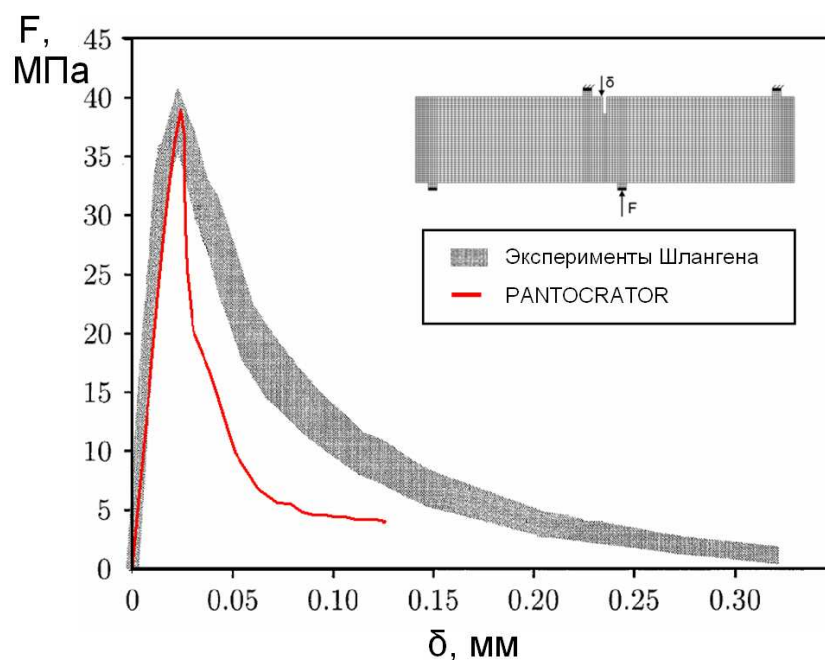


Рис. 6.10. Результаты численного решения задачи об изгибе SEN балки в PANTOCRATOR и экспериментальные данные Шлангена из работы [49]

6.3 Задача о четырехточечном изгибе балки с двумя надрезами

Рассматривается опыт Балаторе, известный в литературе как DEN (double-edge notched) beam test - четырехточечный асимметричный изгиб балки с двумя диаметрально противоположными надрезами. Результаты численного и натурального эксперимента приведены во множестве работ, например работах Кусатиса и Бажанта [42], Бажанта и Пфайфера [37], Борста [50] и Гассера [49]. Геометрия, конечно-элементная сетка и граничные условия представлены на рисунке 6.11.

¹Сумма вертикальных сил по всем узлам стороны “b”

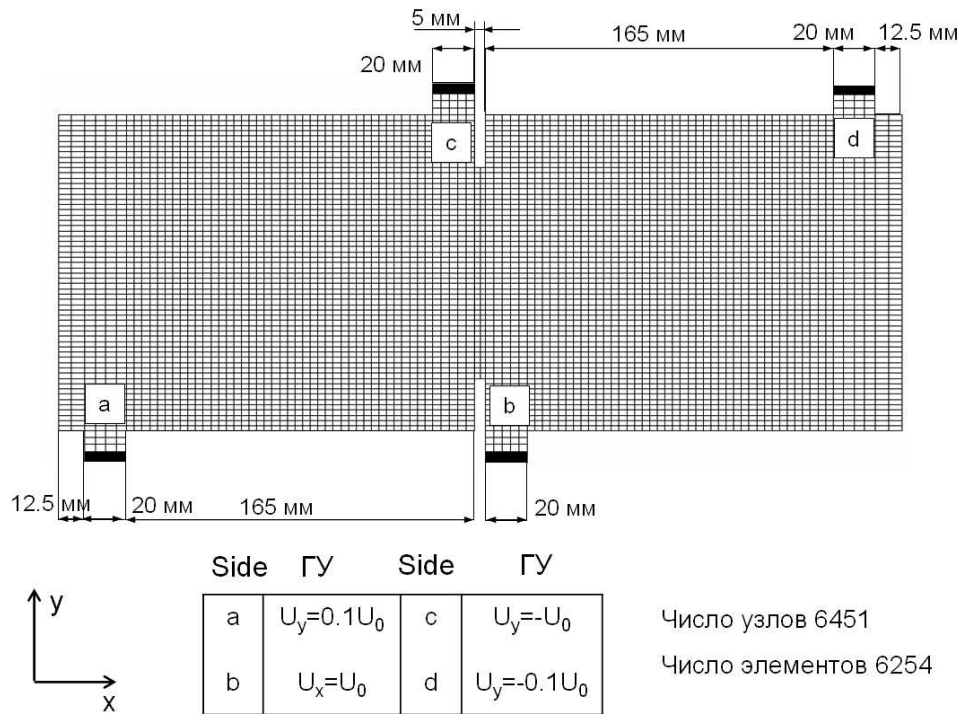


Рис. 6.11. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте Бажанта (толщина образца 100 мм)

К стороне “а” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = 1/10U_0$, к стороне “b” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = U_0$, к стороне “с” прикладываются вертикальные перемещения $U_y = -U_0$, а к стороне “d” $U_y = -1/10U_0$. Натурный эксперимент показал 6.12, что при нагружении в вершине верхнего надреза возникает трещина, которая движется до правой части стороны “b”, также возможно два других варианта образования трещин: система двух асимметричных кривых трещин выходящих из вершин надрезов (b) и антисимметричная система трех трещин, центральная из которых по прямой соединяет надрезы (с), в некоторых экспериментах образовывалась единственная трещина по прямой, соединяющая надрезы.

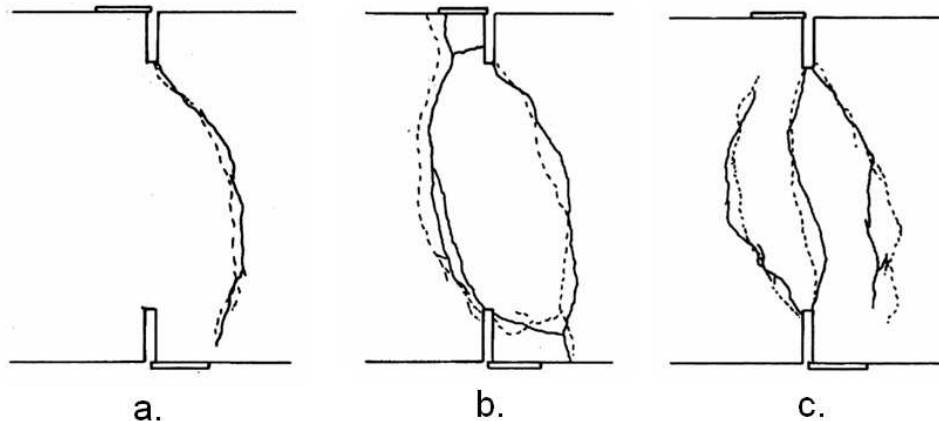


Рис. 6.12. Экспериментальный рост трещины в тесте Балаторе

Численный эксперимент был поставлен в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR, при использовании критерия дэ Ри для определения ЭМДС ($\kappa = 25$) и для закона Мазарса для констант $\alpha = 0.96$; $\beta = 350$; $k_0 = 0.000059$. Свойства материала: изотропный, изначально гомогенный (неповрежденный) материал с модулем Юнга $E = 37000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$. При таких параметрах прочность на сжатие $f_c = 54.5$ МПа, на растяжение $f_t = 2.18$ МПа (в эксперименте Балаторе $f_c = 51.7$ МПа, $f_t = 2.18$ МПа см. [42]).

Результаты численного эксперимента представлены на рисунке 6.13 - поля поврежденности (масштаб деформаций 20) и поля горизонтальных деформаций) при $\kappa = 25$, а на рисунке 6.14 тоже, но при значении $\kappa = 15$ (масштаб деформаций 50). Как видно из численного эксперимента поля поврежденности и деформаций достаточно хорошо описывают поля развитие микродефектов, и возникающие трещины достаточно точно совпадают с экспериментальными данными (вариант (а), (с) на рисунке 6.12). Появления асимметричной системы трещин в численных экспериментах не наблюдалось. На рисунке 6.15 представлены поля поврежденности (масштаб деформаций 5) и поля горизонтальных деформаций для фиктивного материала с параметрами $\kappa = 15$, $\alpha = 0.9$; $\beta = 100$; $k_0 = 0.001$, $E = 35000$ МПа, $\nu = 0.2$.

Как уже упоминалось выше размер элемента в локальном подходе к проблемам МКП определяет ПОЭ и размер микроструктуры. Поэтому в соответствии с данными авторов [50], принимающих для своих расчетов определяющий размер области осреднения в 2 мм^2 , выбран размер элемента около 2 мм. Дальнейшее уменьшение размера элемента не влияет на конфигурацию возникающих трещин и поля накапливаемых повреждений при заданных параметрах решения.

Для сравнения приведем результаты численного эксперимента из работы Гирса, Борста и Пирлингса [47], в которой авторы использовали градиентную модель первого порядка для определения ЭМДС (см. параграф 2.2. Определяющие параметры). На рисунке 6.16 представлены поля поврежденности, полученные авторами для различных инкрементов нагрузки.

На рисунке 6.17 приведен график зависимости осредненной силы на стороне “с” от задаваемых перемещений и экспериментальные данные Балаторе [42]. Очевидно достаточно хорошее совпадение результатов.

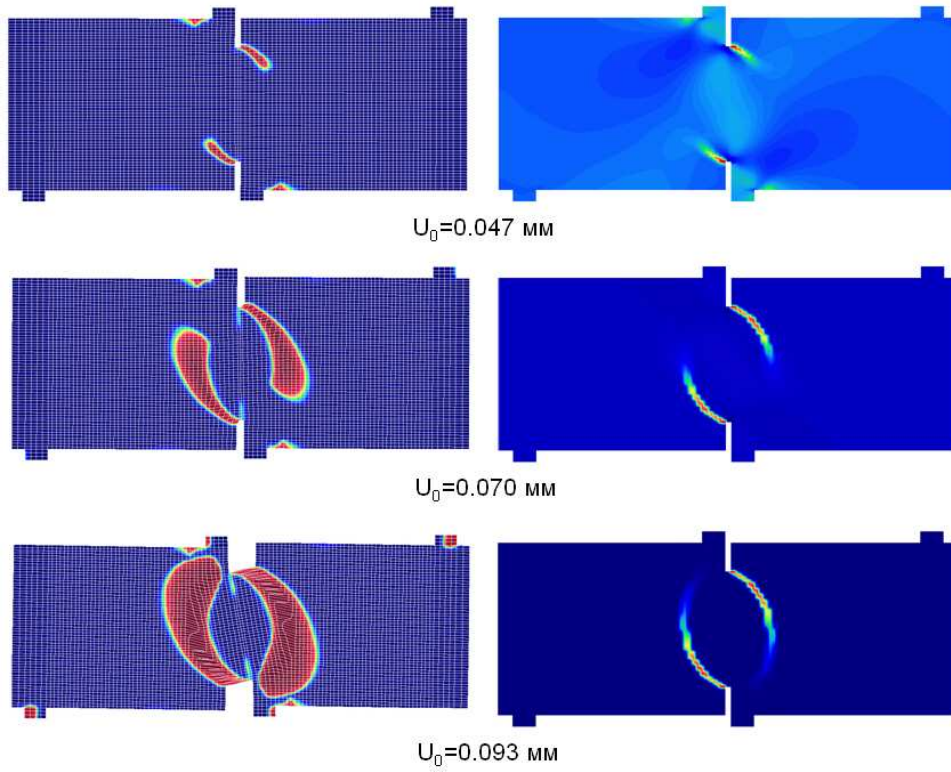


Рис. 6.13. Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для различных инкрементов нагружения при $\kappa = 25$

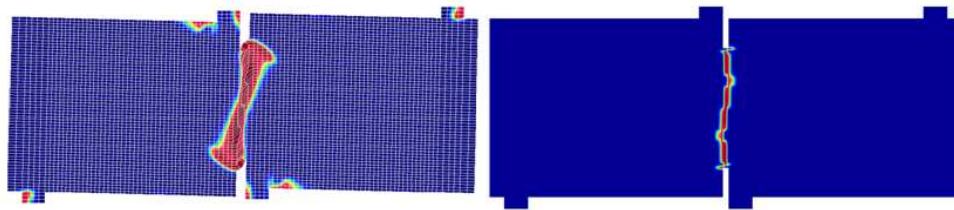


Рис. 6.14. Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для $U_0 = 0.08 \text{ мм}$ $\kappa = 15$

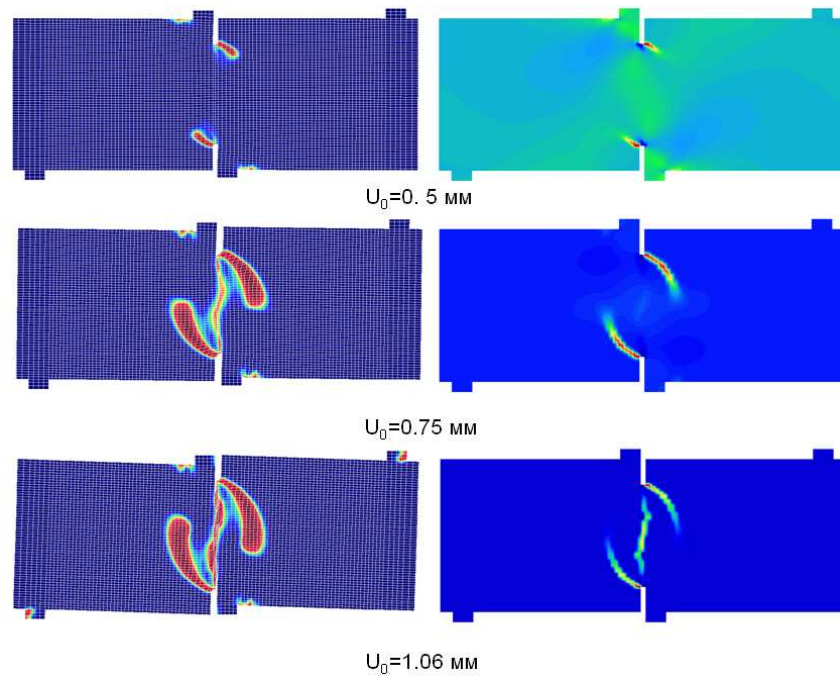


Рис. 6.15. Поля поврежденности (слева) и горизонтальных деформаций (справа) в тесте Балаторе для различных инкрементов нагружения при $k_0 = 0.001$; $\alpha = 0.9$; $\beta = 100$; $\kappa = 15$

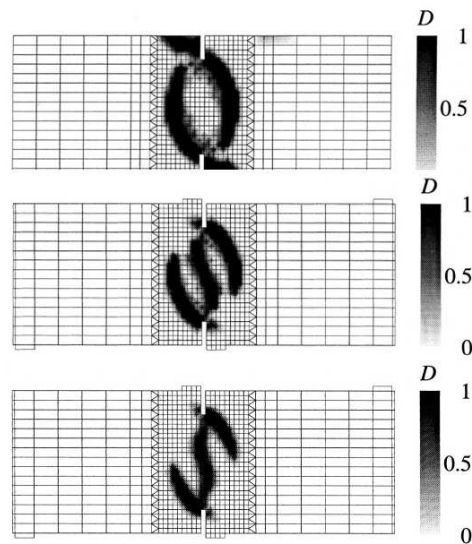


Рис. 6.16. Поля поврежденности для различных инкрементов нагрузки, численный эксперимент Гирса, Борста и Пирлингса [47]

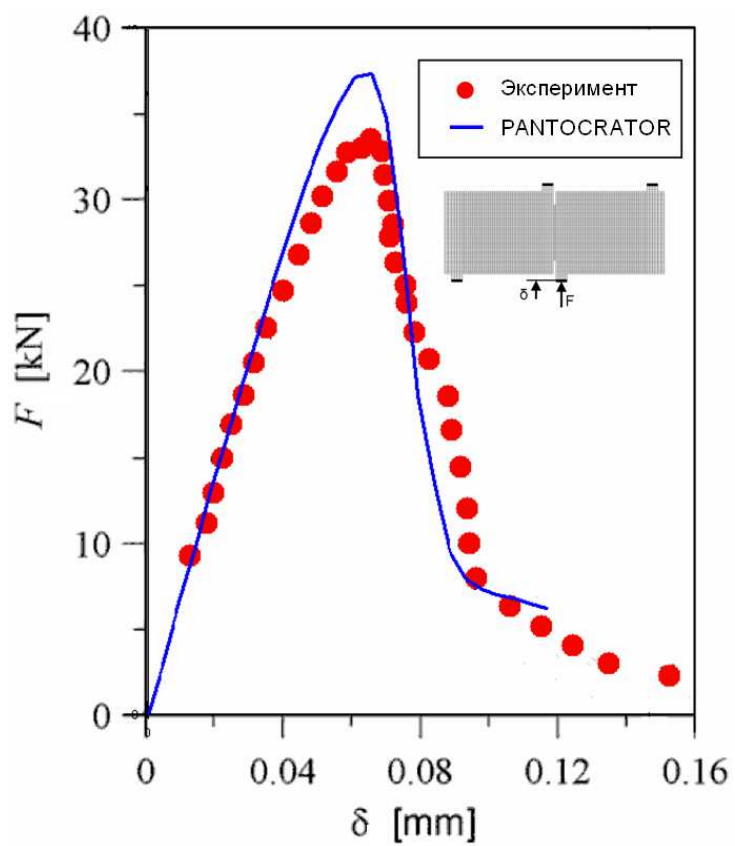


Рис. 6.17. Результаты численного решения задачи об изгибе DEN балки в PANTOCRATOR и экспериментальные данные Балаторе

Глава 7

Инженерные задачи механики континуальных повреждений

7.1 Задача о вытягивании анкера из бетонного блока

Рассматривается натурный эксперимент, проводимый в рамках проекта UE Anchor Project, 2001 (см., например, [36]). Существует много экспериментальных данных, аналитических и численных расчетов, показывающих, что в результате выдергивания анкера образуется коническая трещина. В данной работе повторяется численный эксперимент Бажанта [36], использовавшего нелокальную микроплоскостную модель для моделирования разрушения бетонного блока. Геометрия, конечно-элементная сетка и граничные условия представлены на рисунке 7.1.

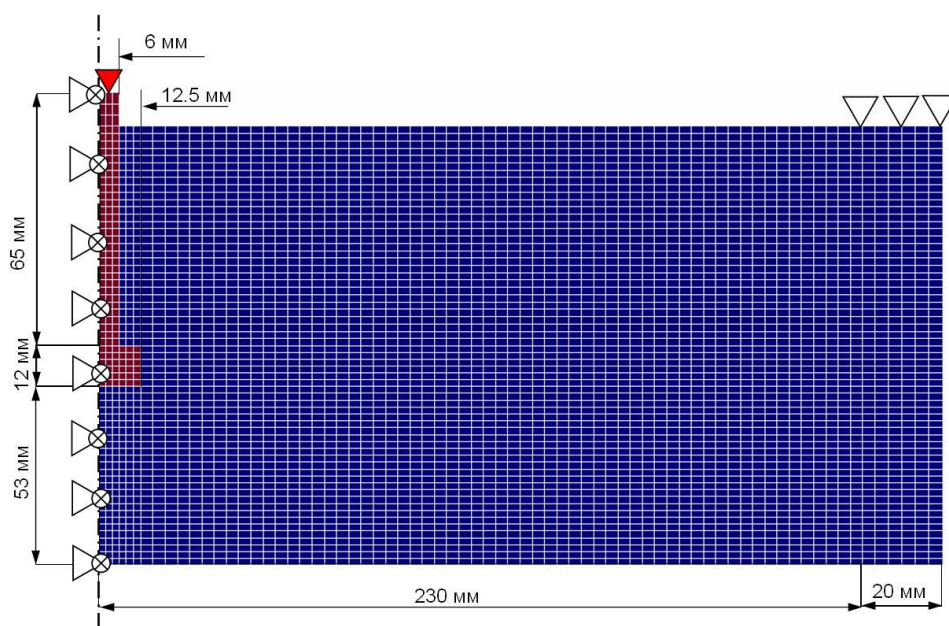


Рис. 7.1. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в тесте о вытягивании анкера

Решается осесимметричная задача, на верхней правой границе закрепляются перемещения по вертикальной оси, а к анкеру прикладывается вертикальная вытягивающая кинематическая нагрузка $U = 0.4$ мм. Параметры материалов: сталь анкера с модулем Юнга $E = 210000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$, бетон с модулем Юнга $E = 35000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$, $\kappa = 10$, $k_0 = 0.00008$, $\alpha = 0.96$, $\beta = 350$, откуда предел прочности на сжатие $f'_c = 28$ МПа, а на растяжение $f'_t = 2.8$ МПа. Численный эксперимент Бажанта показывает, что в результате вытягивания образуется коническая трещина, зарождающаяся у нижней границы анкера, и распространяется под углом около 50° к оси анкера по направлению к верхней границе. На рисунке 7.2 представлено поле распределения главных деформаций в моменты $U = 0.2$; 0.3 ; 0.35 мм, полученное в эксперименте Бажанта.

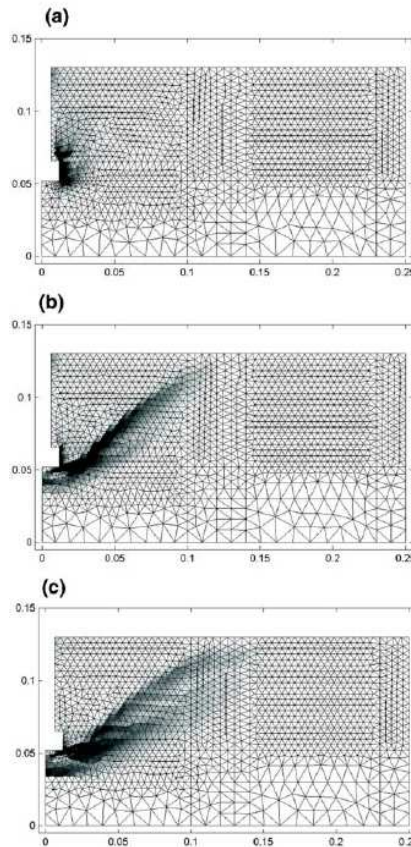


Рис. 7.2. Распределение главных деформаций в численном эксперименте Бажанта [36] (а), (b) и (с) соответственно при нагрузках $U = 0.2$; 0.3 ; 0.35 мм

Численный эксперимент поставленный в программном комплексе конечно - элементного анализа PANTOCRATOR для материалов, использованных в эксперименте Бажанта показал другой характер разрушения. Поля накопления поврежденности представлены на рисунке 7.3. При постепенном увеличении нагрузки повреждения накапливаются, начиная от свободной верхней поверхности вплоть до верхней по-

верхности анкера, далее область поврежденности распространяется от нижнего угла анкера в направлении верхней границы под углом около 60° к оси анкера (см. левый рис. 7.4), далее возникает сдвиговая трещина (mod III) параллельная оси анкера и распространяясь до области с уже накопленной поврежденностью, наклоняясь при дальнейшем увеличении нагрузки на угол около 60° , параллельно первичной зоне поврежденности (см. правый рис. 7.4).

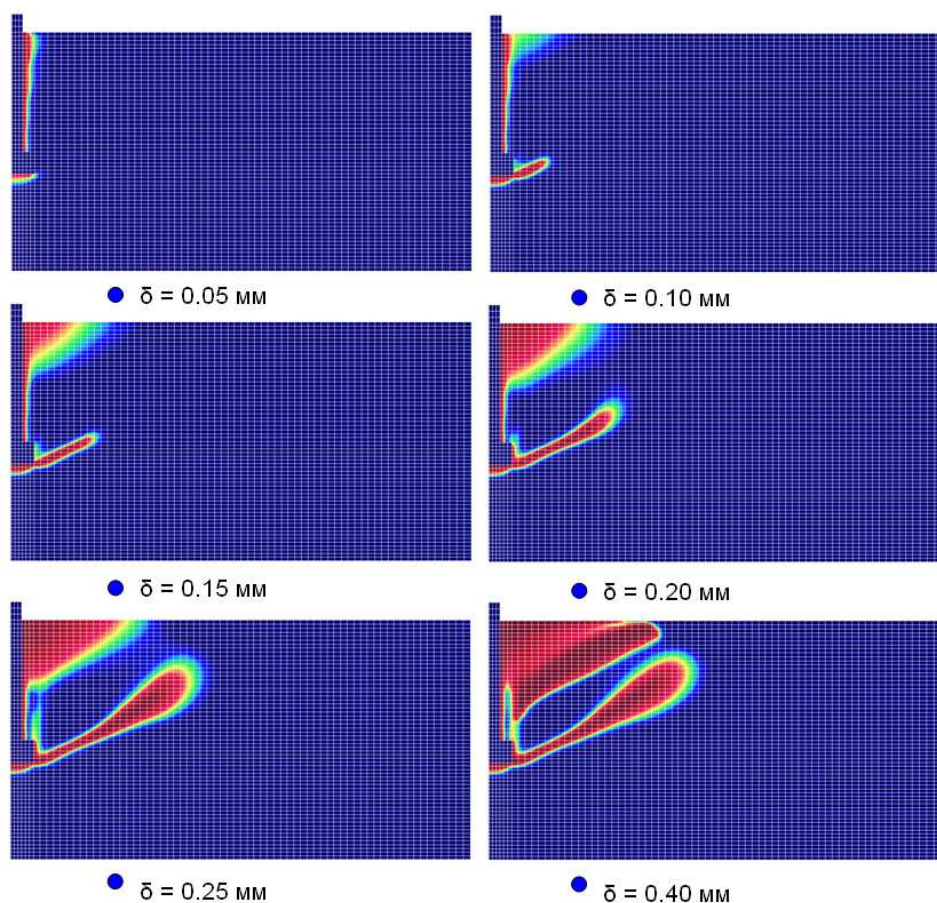


Рис. 7.3. Распределение полей поврежденности в численном эксперименте в PANTOCRATOR при нагрузках $U = 0.05; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25; 0.40$ мм

На рисунке 7.5 представлена зависимость вытягивающей силы от перемещения верхнего торца анкера в натурном эксперименте и численном эксперименте в пакете PANTOCRATOR, синими кружками отмечены точки для которых приведены поля поврежденности на рисунке 7.3.

Как видно из сопоставления численного эксперимента с натурным, зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца полученная численными методами с использованием локальной модели поврежденности очень близка к экспе-

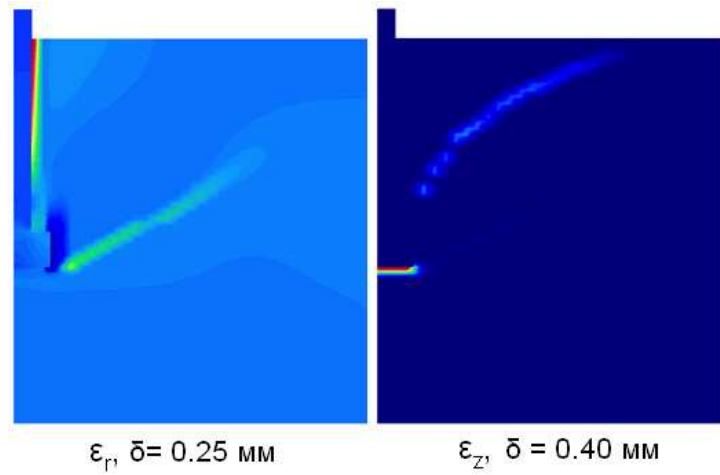


Рис. 7.4. Поле радиальных деформаций при $U = 0.25$ мм - развитие первой трещины, и поле осевых деформаций при $U = 0.4$ мм - развитие второй трещины

риментальной кривой. Это сходство дает некоторые основания предполагать, что качественная картина развития трещин будет близка к картине приведенной на рисунку 7.4. Несмотря на то, что при решении этой задачи не учитывалось трение, оно автоматически присутствует в задаче, т.к. граничный слой бетона у поверхности анкера разрушается, в отличие от эксперимента Бажанта, где отсутствует трение и граничный слой не подвергается значительным деформациям и поврежденность не накапливается.

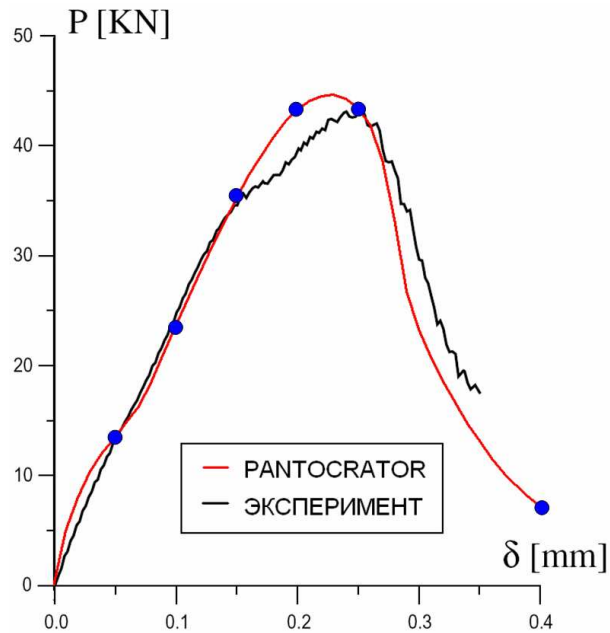


Рис. 7.5. Результаты численного решения задачи о вытягивании анкера в PANTOCRATOR и результаты эксперимента

7.2 Задача о вытягивании профилированного арматурного стержня из бетонного блока

Задача о вытягивании стержневой арматуры из бетонного блока является одной из важнейших задач строительной механики [2], [14]. Решение задач о вытягивании стержневой и проволочной арматуры, профилированной и не профилированной чрезвычайно важно при решении задач о деформировании железобетонных элементов с трещинами [3], [20]. Решение задачи о вытягивании стержня из арматуры - комплексная проблема, требующая учета различных физико - механических свойств арматурной стали, бетона и их взаимодействия:

1. Накопление повреждений в бетоне
2. Пластичность стали.
3. Усадка бетона.
4. Трение пары сталь - бетон.

В данной главе решается задача о вытягивании стержневой арматуры периодического профиля из бетонного блока, с учетом ряда вышеприведенных аспектов этой задачи в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR, созданным и развиваемым под руководством А.С. Семенова [27]. Проводится анализ вклада каждого из параметров в кривую зависимости вытягивающей силы от перемещений.

7.2.1 Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический бетонный блок радиуса R с центрально расположенным арматурным стержнем внутреннего радиуса r_i и внешнего радиуса r_e , расстояние между рифами d , бетонный блок закреплен по перемещениям на расстоянии l от оси стержня (см. рисунок 7.6). При увеличении нагрузки в бетоне развивается система поперечных и продольных трещин. Поперечные трещины образуются в областях рифов арматуры и распространяются под определенными углами α_i к оси стержня, которые зависят от расположения рифа (инициатора трещины) и характера нагружения. Таким образом каждая трещина в пространстве образует коническую поверхность, размер которой также зависит от расположения и характера нагружения. Считаем что радиальные трещины в бетоне отсутствуют [14].

7.2.2 Численный эксперимент

Рассматриваются два типа стержневой профилированной арматуры: с радиусами $r_e = 8$ мм; $r_i = 7$ мм и $r_e = 7.5$ мм; $r_i = 7$ мм с шагами $d = 4$ мм и $d = 10$ мм. В расчетах использовалась арматурная сталь с модулем Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.28$. Предел текучести для арматурных сталей рассматриваемого класса (А - II) в среднем $\sigma_T \approx 350$ МПа и предел прочности $\sigma_T \approx$

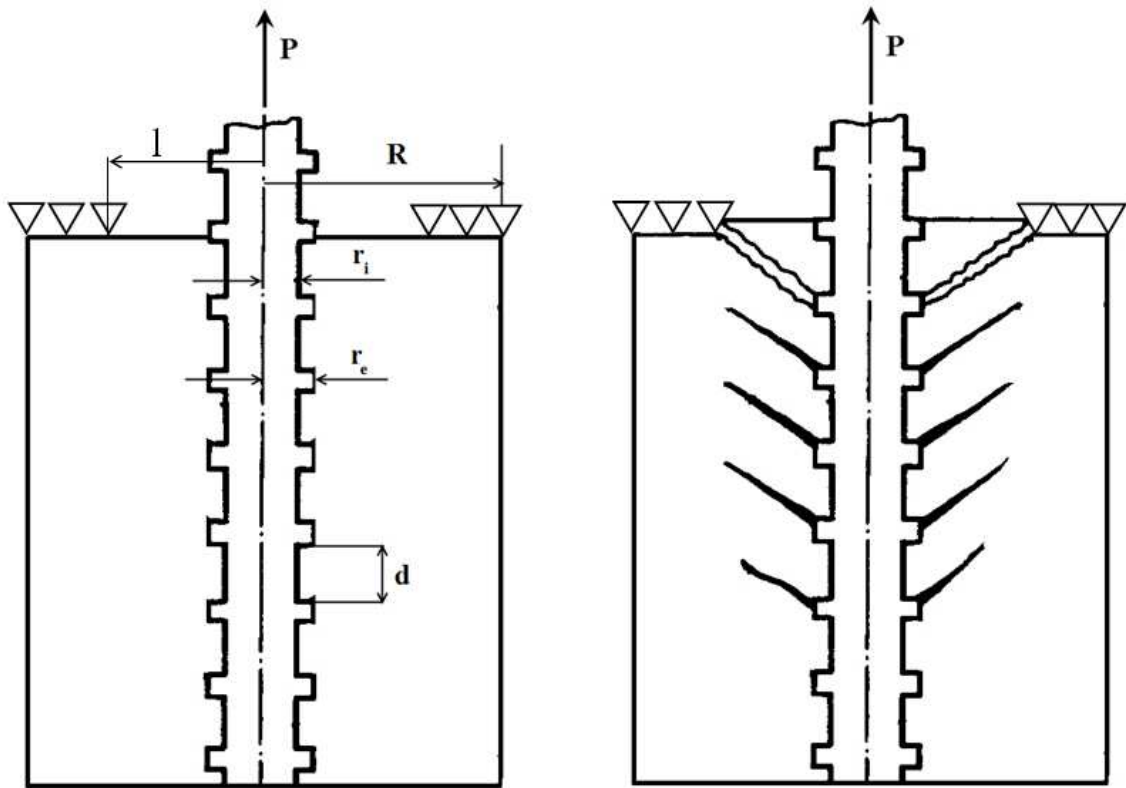


Рис. 7.6. Постановка задачи о вытягивании профилированного арматурного стержня из бетонного блока и схема результатов натурального эксперимента

550 МПа. Модуль Юнга квази-хрупкого материала (бетона) использованного в расчетах $E = 35$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$ - параметры соответствуют тяжелому бетону естественного твердения, относящегося к классу бетонов на растяжение - сжатие В35 с пределом прочности на растяжение $R_{btn} = 1.95$ МПа и пределом прочности на сжатие $R_{bc} = 25.5$ МПа. Откуда находим параметры для закона Мазарса $k_0 = 5.575 \cdot 10^{-5}$; $\alpha = 0.96$; $beta = 750$ и для используемой меры ЭМДС по дэ Ри получаем $\kappa = R_{bc}/R_{btn} \approx 13$. Граничные условия и конечно-элементная сетка для задачи о вытягивании стержневой арматуры из бетонного блока представлены на рисунке 7.7. Первый тип граничных условий - осесимметричная задача, на торце стержневой арматуры прикладывается кинематическая нагрузка - осевые перемещения U в направлении вытягивания арматуры. На верхней границы на расстоянии 50 мм от оси стержня запрещаются вертикальные перемещения. На внешней цилиндрической поверхности ставятся различные граничные условия: (а) - запрещаются радиальные перемещения, (b) - свободная поверхность, (с) - задаются нормальные сжимающие напряжения p , для создания эффекта усадки бетона. Рассматриваются варианты сквозной и несквозной арматуры (без анкеровки).

На рисунке 7.8 представлены результаты решения данной задачи в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR для рифов высотой 2 мм расположенных

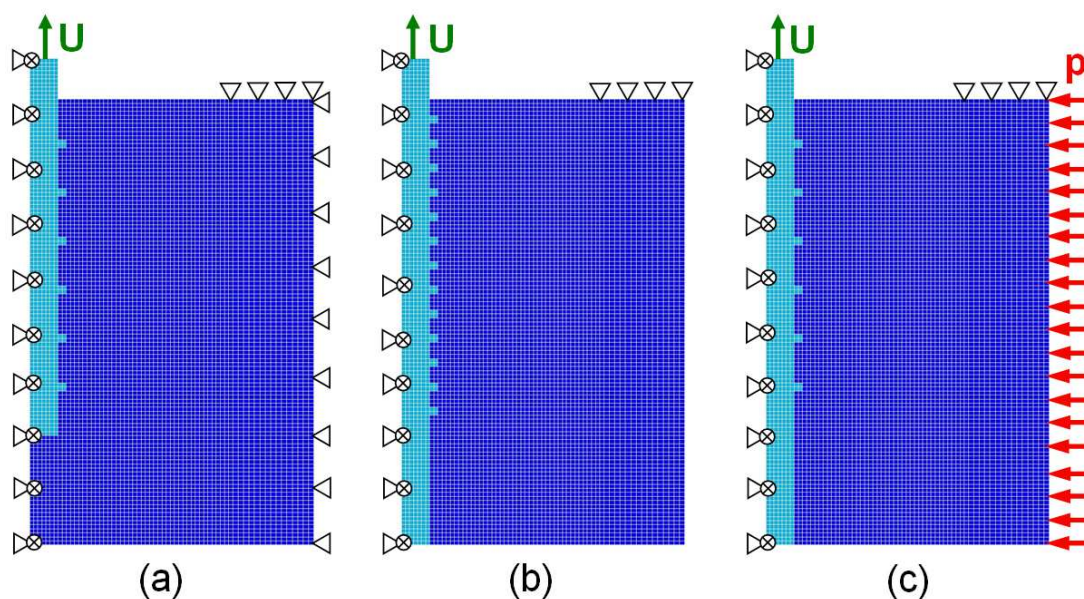


Рис. 7.7. Граничные условия и конечно-элементная сетка для задачи о вытягивании стержневой арматуры из бетонного блока

с шагом $d = 10$ мм для случая граничных условий (а), для несвязной арматуры. Анализируя эти результаты выделим несколько стадий разрушения бетонного образца при вытягивании арматуры:

- Линейно-упругое поведение конструкции
- На границе бетон-арматура вблизи поверхности развивается локализованная поврежденность и распространяется с увеличением нагрузки до первого рифа
- При достижении зоной поврежденности первого рифа, у его дальнего угла уже накапливается поврежденность и при увеличении нагрузки от первого рифа под определенным углом начинает распространяться трещина в направлении свободной поверхности
- При дальнейшем увеличении нагрузки первая трещина продолжает двигаться к границе, а на углу второго рифа накапливается поврежденность и также отходит трещина в направлении к поверхности.
- При образовании второй трещины, у третьего рифа начинает накапливаться поврежденность и образуется третья трещина под новым углом и также движется в направлении к свободной поверхности и т.д.
- При последовательном достижении зоной поврежденности каждого нового рифа образуется новая трещина, а достижение зоной поврежденности основания арматуры соответствует предельной нагрузке прикладываемой к стержню, при дальнейшем увеличении прикладываемых перемещений напряжение в арматуре падает. График зависимости средних напряжений на конце вытягиваемого стержня от задаваемых перемещений для высоких рифов с шагом $d = 10$ мм представлен на рисунке 7.10.

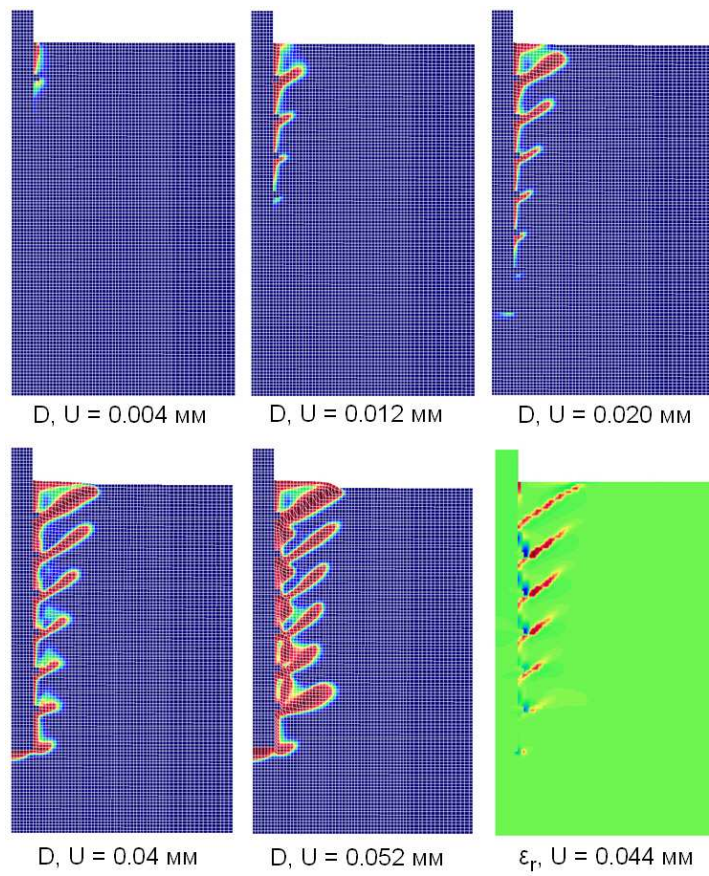


Рис. 7.8. Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для несквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм

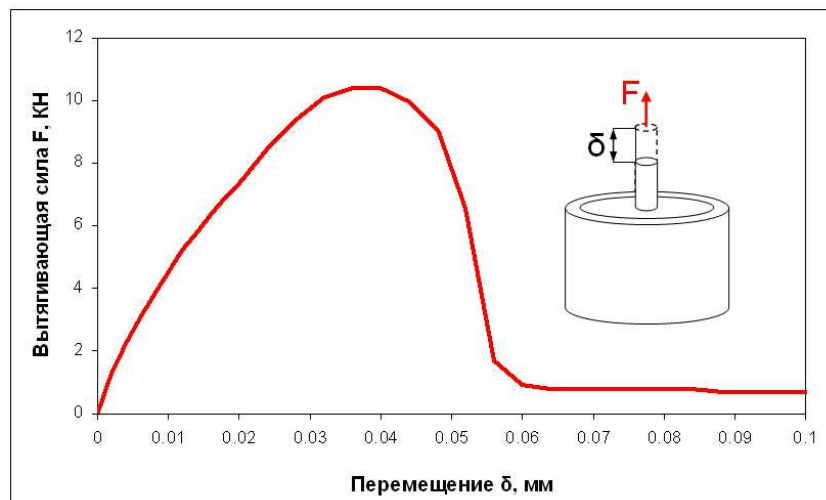


Рис. 7.9. Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для несквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм

Приведем результаты для тех же граничных условий, но при вытягивании сквозной арматуры с шагом $d = 4$ мм и $d = 10$ мм, поля поврежденности и поле радиальных деформаций приведены на рисунке 7.10 для шага $d = 10$ мм, на рисунке 7.11 $d = 4$ мм (масштаб 50), на рисунке 7.12 приведены графики зависимости вытягивающей силы от перемещения торца арматурного стержня.

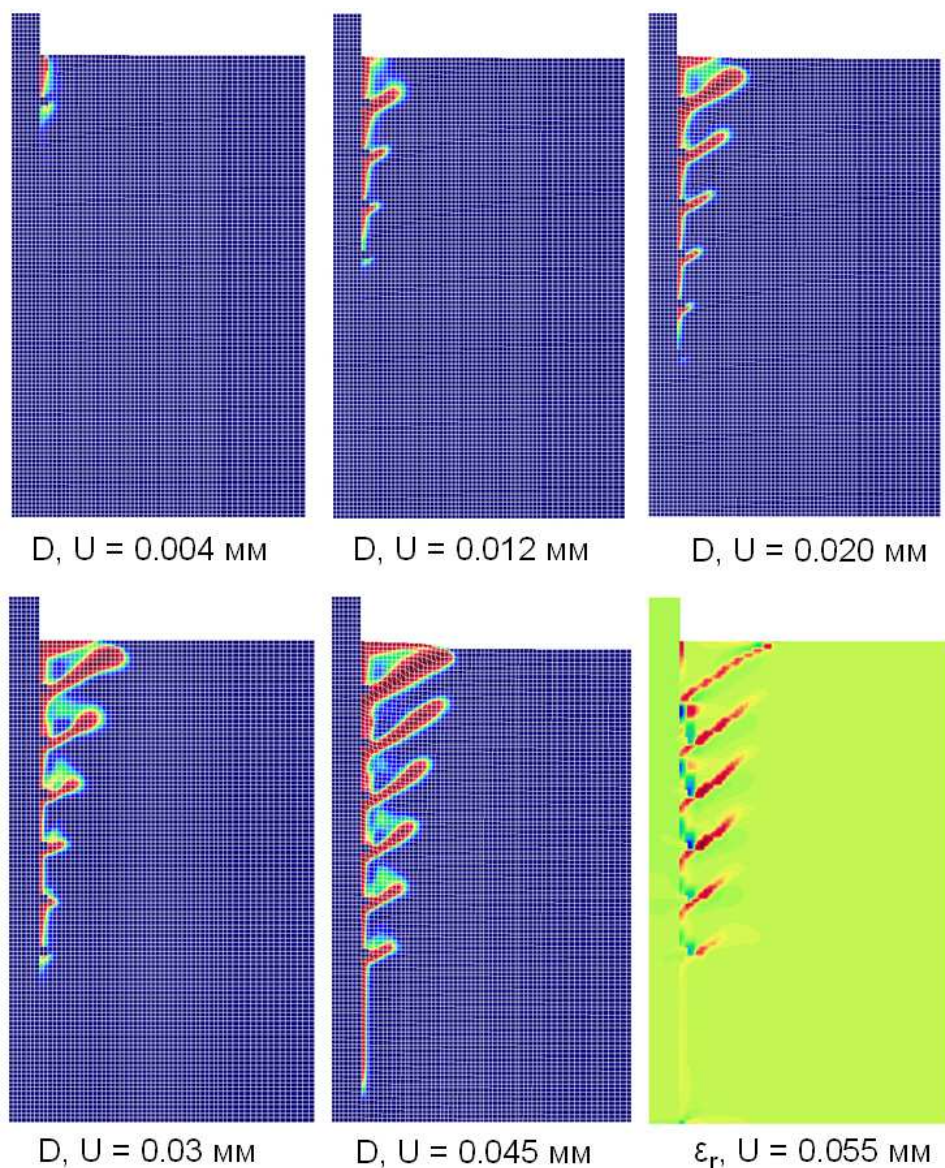


Рис. 7.10. Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм

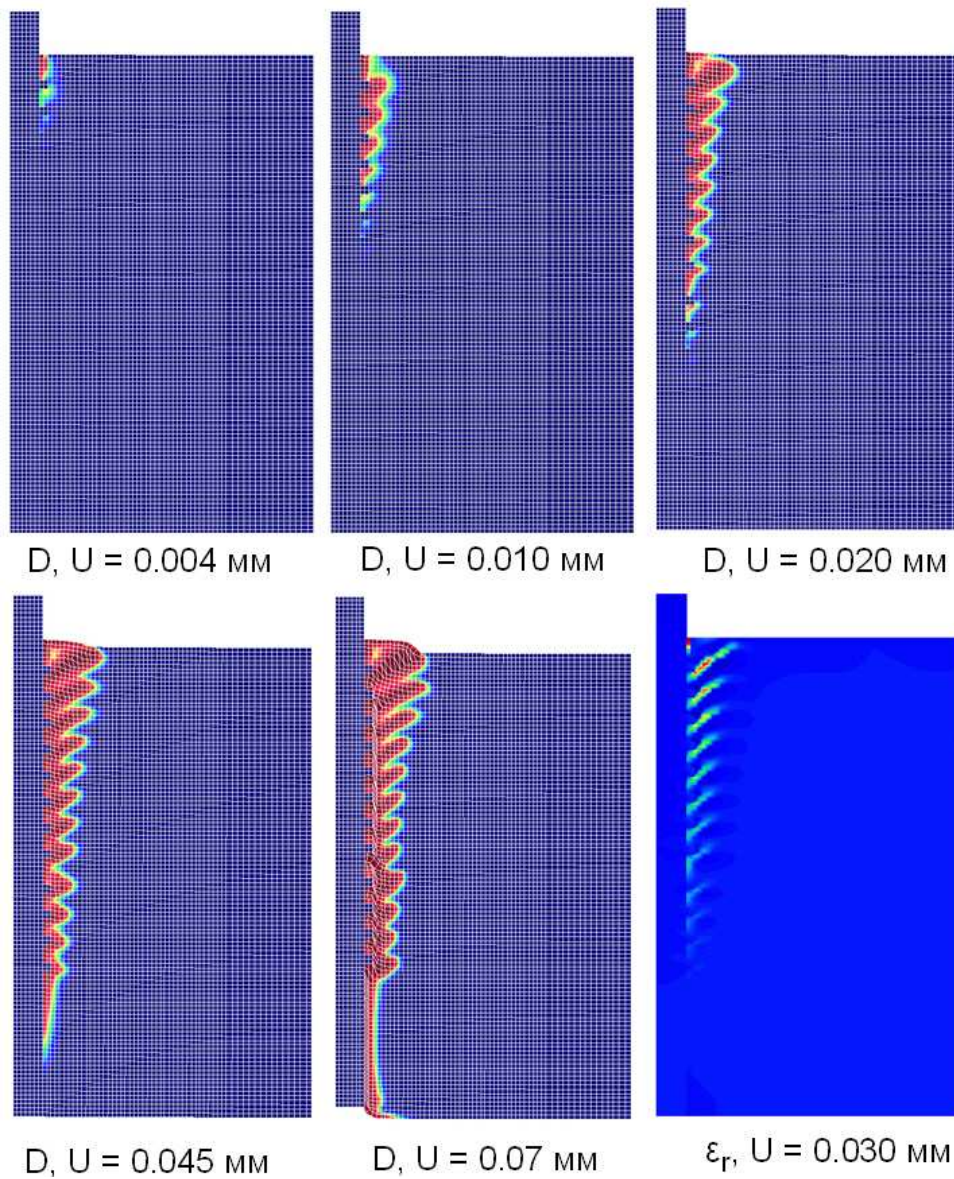


Рис. 7.11. Поля поврежденности и поле радиальных деформаций (внизу справа) для различных значений прикладываемых перемещений для сквозной арматуры с шагом $d = 4 \text{ мм}$

Существенно отличные распределения поврежденности дает учет усадки бетона, смоделированный внешним давлением см. рисунок 7.13. В таком случае при больших давлениях $p = 10 \text{ МПа}$ поперечные трещины практически не образуются, а связь арматуры и бетона теряется вследствие разрушения приконтактного слоя, при уменьшении давления картина распределения поврежденности приближается в результате экспериментов о вытягивании при отсутствии давления. Чем выше давление, тем выше максимальная нагрузка вытягивания см. рисунок 7.14.

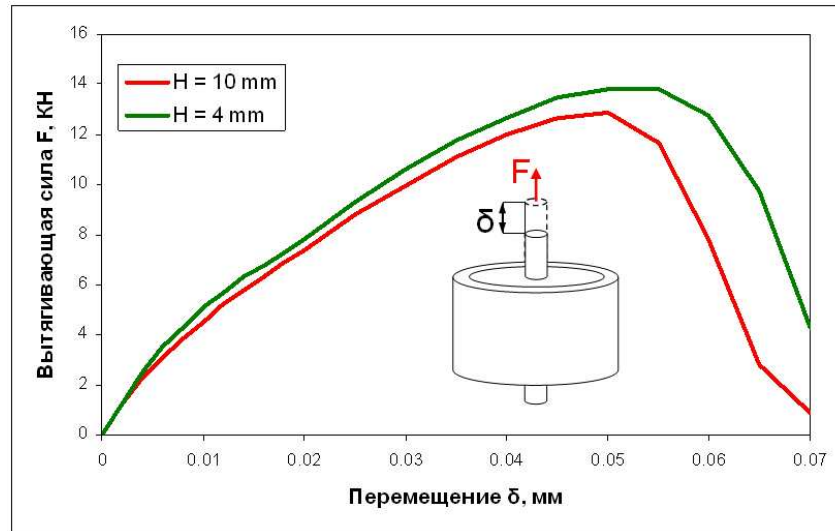


Рис. 7.12. Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для сквозной арматуры с шагами $d = 10$ мм и $d = 4$ мм

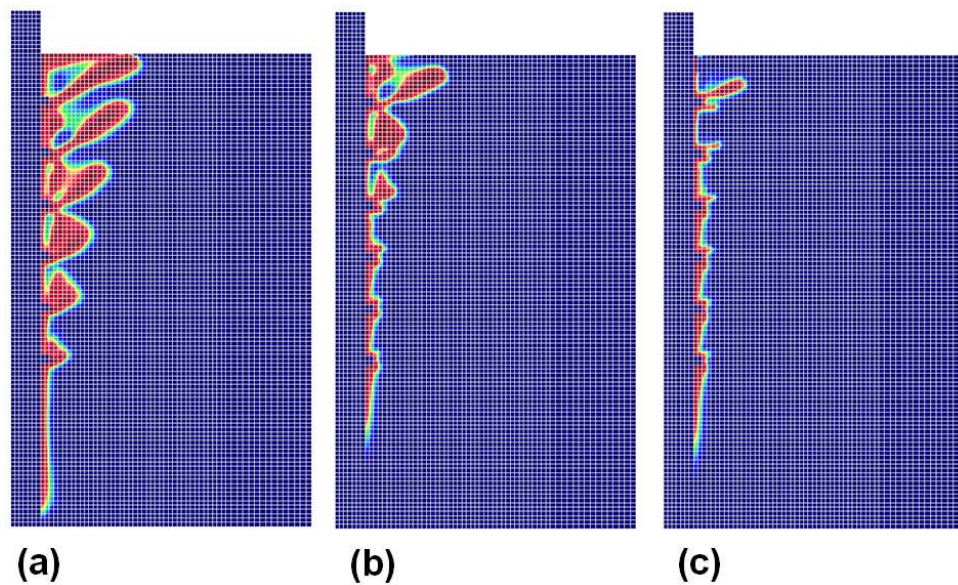


Рис. 7.13. Поля поврежденности для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм при $U = 0.06$ мм и различных величинах прикладываемых давлений: (a) - $p = 1$ МПа, (b) - $p = 5$ МПа, (c) - $p = 10$ МПа

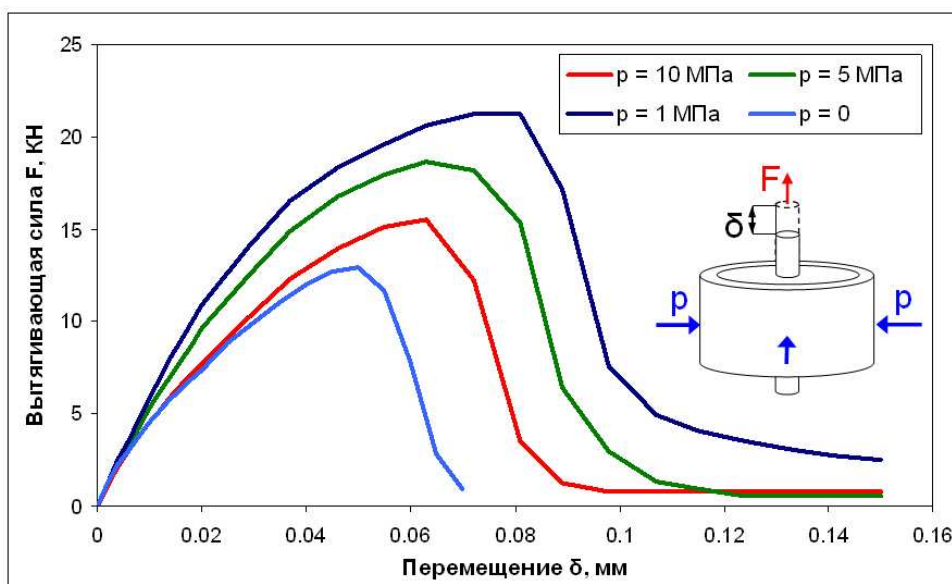


Рис. 7.14. Зависимость вытягивающей силы от перемещений верхнего торца арматурного стержня для сквозной арматуры с шагом $d = 10$ мм при различных внешних давлениях

Глава 8

Недостатки локального подхода

В локальном подходе механики континуальных повреждений существует две серьезные проблемы, давшие толчок развитию нелокальной механики повреждений - это проблема гипер-чувствительности полей поврежденности к конечно-элементной сетке и физически неприемлимая локализация поврежденности в пределах одного элемента. Эти проблемы локального подхода были отмечены в работах Пиетруса [61] (1981), дэ Ри [45] (1995), Бажанта [36] (2004) и многих других. Однако, как демонстрируется в предыдущих параграфах этой главы, локальный подход дает результаты, хорошо сопоставимые с натурным экспериментом и численными экспериментами с использованием нелокального подхода [50], [44]. Возникает вопрос: почему при решении приведенных задач не наблюдалось гипер чувствительности к сетке и поврежденность не локализовалась в пределах одного элемента?

Постараемся ответить на эти вопросы на простом эксперименте о растяжении плиты с двумя диаметрально противоположными разрезами. геометрия задачи представлена на рисунке 8.1. На одной из сторон закрепляются перемещения вдоль оси растяжения $0y$ на противоположной стороне задаются перемещения $U_y = U_0$. Свойства материала: изотропный, изначально гомогенный (неповрежденный) материал с модулем Юнга $E = 35000\text{МПа}$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$.

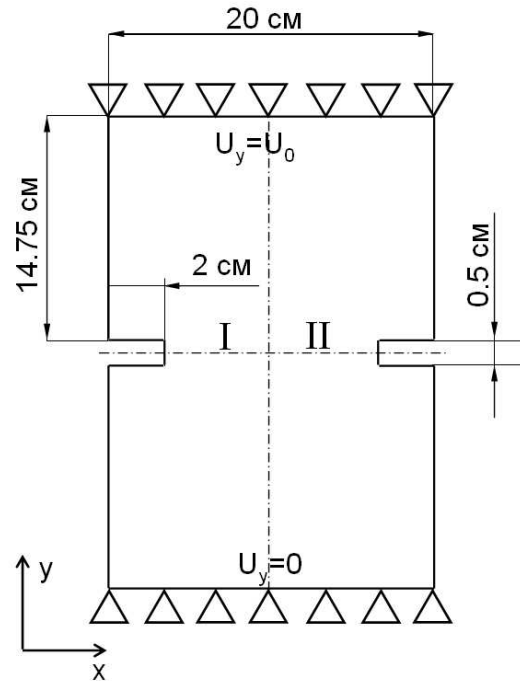


Рис. 8.1. Схема теста о растяжении пластины с двумя разрезами

В силу симметрии будем рассматривать только половину образца (II), ставя на границе симметрии естественные условия симметрии. Протестируем энергетическую меру Лемэтра, меру Мазарса, расширенную меру Мазарса для $\kappa = 5; 10; 15$ и меру дэ Ри для $\kappa = 5; 10; 15$ на экспоненциальном законе поврежденности Мазарса для различных параметров. Все задачи решались в конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR с сеткой представленной на рисунке 8.2

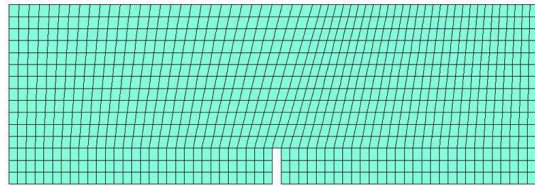


Рис. 8.2. Конечно-элементная сетка в задаче о растяжении пластины с двумя надрезами

Цели проводимых численных экспериментов

- Выяснить возможно ли использование локального подхода для решения задач МКП и в каких случаях.
- Выявить закономерности локализации и гипер-чувствительности.

Результаты численного моделирования показали, что существует связь между количеством итераций, т.е. точности следования по кривой деформирования и локализацией поврежденности, а также связь с гипер-чувствительностью к конечно-элементной сеткой (кэс). Тестировалось большое число вариантов по количеству инкрементов $N_{inc} = 5, 10, 30, 50, 70, 120, 200, 300, 600, 1000$, для которых соответственно приходилось по 1, 2, 6, 10, 13, 19, 24, 35, 54, 78 шагов по инкременту

на стадию от образования трещины в вершине надреза до полного разрушения. На рисунке 8.3 представлены результаты численного эксперимента рассматриваемой задачи для энергетического критерия Лемэтра и экспоненциального закона поврежденности Мазарса с параметрами $k_0 = 0.001$; $\alpha = 0.9$; $\beta = 300$ и для $U_0 = 0.0025$ см для $N_{inc} = 5, 70, 200, 1000$.

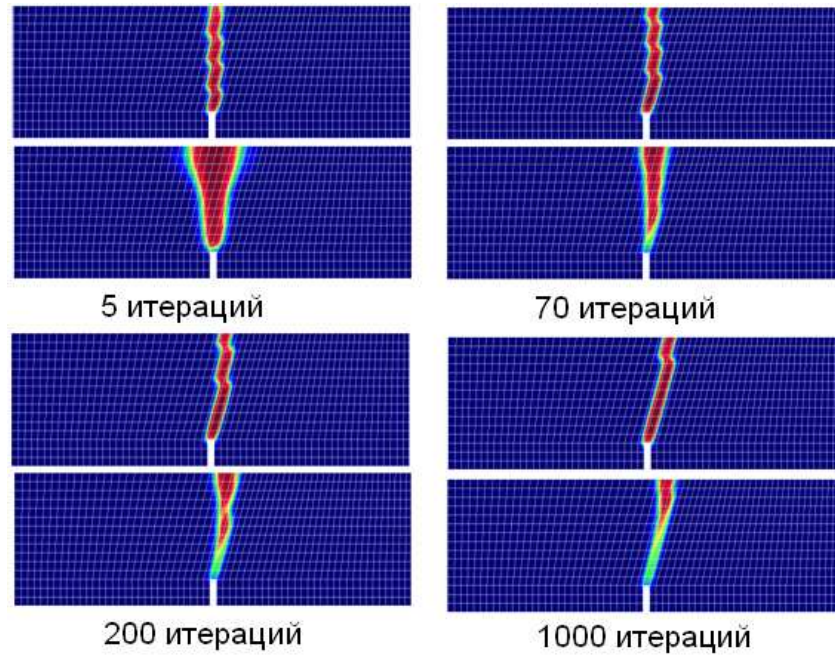


Рис. 8.3. Локализация поврежденности и гипер-чувствительность к сетке

Проведем теперь тест иначе. Будем использовать набор регулярных сеток и решать задачу при постоянном числе инкрементов, итераций и точности: (число инкрементов 30; максимальное число итераций на одном инкременте 7; точность 0.01). Параметры материала $\kappa = 15$ для критерия дэ Ри и $k_0 = 0.001$; $\alpha = 0.9$; $\beta = 300$ для закона Мазарса, материал $E = 35000$ МПа; $\nu = 0.2$. По результатам эксперимента построим графики зависимости приведенной суммарной силы на торце в направлении растяжения от задаваемых перемещений для двух конечно-элементных сеток, содержащих 5085 и 250 элементов (см. рисунок 8.4).

Здесь мы сталкиваемся с еще одной проблемой локального подхода, в общем, тесно связанную с выше разобранный. При увеличении количества элементов в стадии разрушения наблюдается все более резкое падение силы. Это вызвано уменьшением затрачиваемой энергии на развитие поврежденности. Чем меньше размер конечного элемента, тем в меньшей области локализуется поврежденность, тем меньше энергии требуется на развитие поврежденности, отсюда и резкое падение нагрузки - присущее хрупким, а не квази-хрупким материалам. Эта проблема решается уже около 20 лет, начиная с 1984 года и первых работ Бажанта введением нелокальности, т.е. ограничивающего размера, определяющего внутреннюю микроструктуру материала.

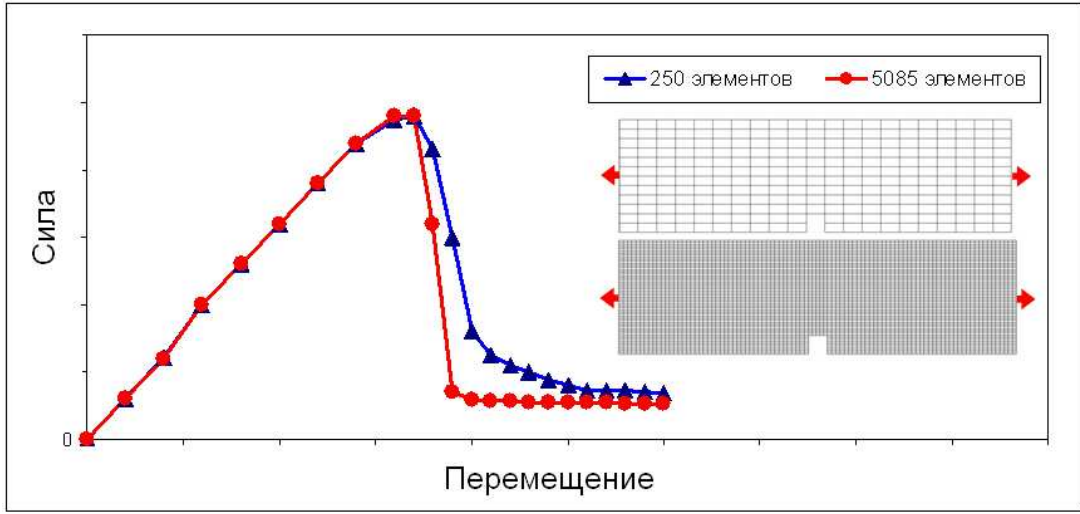


Рис. 8.4. Изменение решения при изменении числа конечных элементов

Обоснуем эту проблему с физической точки зрения. Полное изменение энергии диссипации в теле при вариации поврежденности можно записать в виде

$$W(\delta D) = \int_V (-Y) \delta D dV, \quad (8.1)$$

где Y - трещиновдвигущая сила, а V - полный объем тела. Если разделить весь объем на два объема V_e - объем в котором поврежденность не накапливается $D = 0$ и объем V_d с ненулевой поврежденности $D > 0$, тогда полное изменение диссипации энергии можно записать так

$$W(\delta D) = \int_{V_e} (-Y) \delta D dV + \int_{V_d} (-Y) \delta D dV, \quad (8.2)$$

что при $\delta D = 0$ в V_e приводит к

$$W(\delta D) = \int_{V_d} (-Y) \delta D dV, \quad (8.3)$$

что в свою очередь, при бесконечном уменьшении размеров конечного элемента, иначе при $V_d \rightarrow 0$, и при локализации поврежденности в зоне шириной в один элемент, приводит нас к пределу

$$\lim_{V_d \rightarrow 0} \int_{V_d} (-Y) \delta D dV \quad (8.4)$$

Учитывая, что трещиновдвигущая сила ограничена предельным значением $-Y \leq -Y_c$, где Y_c - соответствует моменту, когда поврежденность достигает критического значения $D = 1$ и более не изменяется, т.е.

$$\int_{V_d} (-Y) \delta D dV < \int_{V_d} (-Y_c) \delta D dV, \quad (8.5)$$

откуда

$$\lim_{V_d \rightarrow 0} \int_{V_d} (-Y) \delta D dV = 0 \quad (8.6)$$

что и приводит к неверным результатам при использовании конечно-элементных сеток с малым размером элементов и при большом числе инкрементов (см. далее).

В заключении проведем простой тест на растяжение прямоугольного стержня длиной 1 см, шириной 0.2 см, с теми же параметрами материала, что были использованы в предыдущем тесте. Будем строить график максимальных осевых напряжений от максимальной осевой деформации рисунок 8.5.

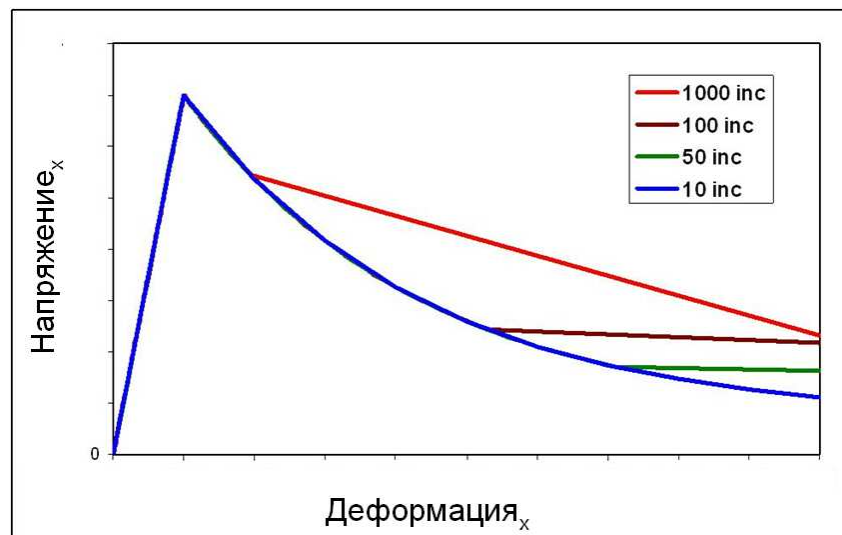


Рис. 8.5. Графики зависимости напряжений от максимальных деформаций при одноосном растяжении для различного числа инкрементов

Как явствует из графика при большом числе инкрементов все деформации “перескакивают” в один элемент (см. рисунок 8.6). Если такое поведение интерпретировать как потерю устойчивости решения, то основываясь на этом можно заключить, что для получения более-менее корректного решения требуется такое количество инкрементов, которое не ведет к потере устойчивости решения.

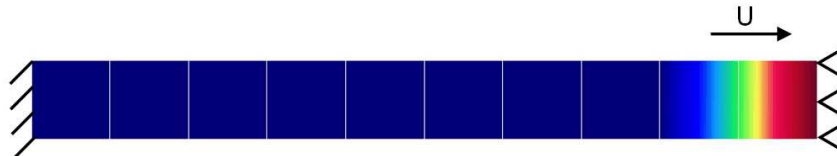


Рис. 8.6. Локализация поврежденности в одном элементе

Основываясь на большом числе проведенных численных тестов, можем заключить, что решение задач МКП в локальном подходе совпадает с решением задач в нелокальном подходе при таком числе инкрементов по нагрузке или перемещениям, которое не приводит к физически неприемлимой локализации повреждений и не меняется при изменении конфигурации конечно-элементной сетки. Так же, основываясь на численных тестах, будем считать, что такое число инкрементов существует для большинства задач МКП. Такой подход используется при решении инженерных задач [54]. Но с другой стороны, этот прием достаточно грубый и объясняется неявной регуляризацией задачи за счет накопления ошибок вычислений. Разумеется, нелокальный подход к проблемам МКП, дает верные результаты независимо от выбора сетки и числа инкрементов, применим для любых задач, физически обоснован и достаточно хорошо изучен и разработан для использования в конечно-элементных пакетах. Существует множество работ, где введены различные варианты нелокальности (см. параграф 2.2):

- Нелокальный подход с использованием осреднения по объему с различными весовыми функциями
- Градиентный подход, являющийся приближением нелокального подхода (наиболее широко распространенный и изученный подход)
- Микрополярная сплошная среда
- Микроплоскостная модель Бажанта
- Вязкостная регуляризация
- Локальное изменение свойств элемента материала в зависимости от изменения его размера
- Использование метода частиц для моделирования бетона: модели Шлангена и ван Меера, модель Седолина, Кусатиса и Бажанта и др.

Возможно, дальнейшее развитие конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR будет связано с введением нелокальности в программу, но это требует значительных изменений программного кода. Существуют способы этого избе-

жать, если использовать сеточный подход к осреднению поврежденности по элементам новой сетки, накладываемой на старую (см. [45]). Но этому подходу, частично присущи некоторые недостатки локального подхода, например сверхчувствительному к сетке.

Сложно прийти к какому-то заключению касательно применимости локального подхода, для определения реакций тел на воздействия в фазе разупрочнения. Грубо говоря, локальный подход неправильно описывает поведение материала в этой фазе, но при аккуратном решении задач, использовании равномерной сетки, определенного числа инкрементов, итераций и параметров материала, применение локального подхода позволяет получить достаточно хорошие приближения не только в фазе увеличения нагрузки, но и в фазе разупрочнения, что и было продемонстрировано на примерах решения различных задач и сравнении с экспериментальными данными.

Глава 9

Заключение

Подведем итоги: выделим основные результаты и наметим возможные варианты продолжения диссертационной работы.

Основные результаты работы:

- Проведен обзор современного состояния механики континуальных повреждений (МКП)
- Подробно приведено термодинамическое описание процессов накопления континуальных повреждений
- Предложено несколько эквивалентных мер деформированного состояния (ЭМДС), проведено сравнение с экспериментальными данными
- На основе модели материала с реономным накоплением повреждений построена новая модель стареющего материала с реономным накоплением повреждений
- Метод Рикса продолжения по параметру подробно описан, модифицирован и интегрирован в пакет Constitutive Equation Studio (CES), созданный и развиваемый под руководством А.С. Семенова
- Все приводимые ЭМДС и законы поврежденности реализованы в CES и конечно-элементном программном комплексе PANTOCRATOR, который также создан и развивается под руководством А.С. Семенова [27]
- Применимость законов механики континуальных повреждений проиллюстрирована на численном моделировании экспериментов Нуру-Мохаммеда, Шлангена и Балаторе. Получено хорошее качественное и количественное соответствие результатов с натурными экспериментами и расчетами других авторов [49], [50], [44], [59]
- По заданию В.В. Белова - заведующего кафедры “Строительные конструкции и материалы” СПбГПУ решен ряд задач по определению зависимости вытягивающей силы от перемещения анкера и профилированного арматурного стержня, вытягиваемых из бетонного блока. Получено качественное и количественное сходство результатов с экспериментами [36], [31]

- Исследованы недостатки локального подхода МКП, проведен ряд численных экспериментов по определению чувствительности решения к КЭ дискретизации

Возможным продолжением работы может стать

- Продолжение развития предлагаемой модели стареющего материала с реономным накоплением повреждений и более подробное сопоставление с экспериментальными данными, а также внедрение модели в CES и PANTOCRATOR
- Внедрение моделей нелокальной МКП в PANTOCRATOR
- Комплексное решение задачи об изгибе железобетонной балки с использованием методов МКП

Литература

1. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В., Нелинейная механика разрушения, Изд-во "Самарский Университет", Самара, 2004
2. Байков В.Н., Сигалов Э.Е., Железобетонные конструкции, Стройиздат, М., 1984
3. Белов В.В., Сопротивление массивных бетонных и железобетонных конструкций с трещинами и швами, диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, ЛПИ, Ленинград, 1998
4. Боровков А.И., Курс лекций "Вычислительная механика", читаемых на МПУ СПбГПУ, 2004-2005
5. Вишневецкий Г.Д., К исследованию ползучести бетона, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, ЛПИ, Ленинград, 1947
6. Гаврилин Б.А., Влияние температурного режима на ползучесть стареющего бетона, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, ЛПИ, Ленинград, 1970
7. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И., Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела, Изд-во "Наука", М., 1988
8. Динник А.Н., Справочник по технической механике, ОГИЗ, 1949
9. Жупиков И.И., Устойчивость и предварительные напряжения в арматуре железобетонных конструкций с учетом ползучести, диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук., МГОУ, М., 2007
10. Карапетян К.С., Экспериментальное исследование ползучести бетона, диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, АН Армянской ССР, Институт Математики и Механики, Ереван, 1966
11. Качанов Л.М., О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН СССР, ОТН, №8, 1958
12. Качанов Л.М., Теория ползучести. Изд-во Физ. Мат. Лит., М., 1960
13. Качанов Л.М., Основы механики разрушения. Из-во "Наука", М., 1974
14. Карпенко Н.И., Общие модели механики железобетона, Стройиздат, М., 1996
15. Котов А.А., К теории ползучести и длительной прочности бетона, Вестник МГТУ, 2002, том 5, №2, стр. 161 - 166
16. Кочетов В.А., Римский бетон, Стройиздат, М., 1991
17. Львовский С.М., Набор и верстка в пакете LaTeX , 2-ое издание, Изд-во КосмосИнформ, М., 1995

18. Пальмов В.А., Курс лекций МДТТ, читаемых на МПУ СПбГПУ, 2002-2003
19. Победря Б.Е., Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. Унив., 1984
20. Прокопович А.А., Сопротивление изгибу железобетонных конструкций с различными условиями сцепления продольной арматуры с бетоном, Самара, НВФ “Сенсоры. Модули. Системы”, 2000
21. Прудников А.П., Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, Интегралы и ряды, Изд-во “Наука”, М., 1981
22. Работнов Ю.Н., Механизм длительного разрушения. В кн. “Вопросы прочности материалов и конструкций”. Изд-во АН СССР, 1959
23. Работнов Ю.Н., Механика деформируемого твердого тела. Изд-во “Наука”, М., 1959
24. Радаев Ю.Н., Континуальные модели поврежденности твердых тел, Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Самарский Государственный Университет, Самара, 1999
25. Трусов П.В., И.Е. Келлер, Теория определяющих соотношений. Часть 1. Пермский Государственный Технический Университет, Пермь, 1997
26. Семенов А.С., сайт конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR www.PANTOCRATOR.narod.ru
27. Семёнов А.С., PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики, Труды V-ой Международной конференции “Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения”, С.-Петербург, 14-17 октября 2003, СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003, сс. 466-480.
28. Семёнов А.С., Носиков А.И., Мельников Б.Е., Описание роста усталостной макротрещины на основе концепции нелокальных континуальных повреждений, Научно-технические ведомости СПбГТУ, 2002, №3 (29), сс. 179-189
29. Семёнов А.С., Мельников Б.Е., Кузнецов С.А., Давыдов И.С., Влияние формы области осреднения и вида подынтегральной весовой функции на нелокальную меру континуальных повреждений, Труды СПбГТУ № 489 “Механика материалов и прочность конструкции”, 2004, сс. 69-88
30. Семенов А.С., Вычислительная пластичность, в печати
31. Холмянский М.М., Контакт арматуры с бетоном, Стройиздат, М., 1981
32. Ястребов В.А., Семенов А.С., Моделирование процессов разрушения квази-хрупкого материала на основе связанных уравнений упруго-поврежденности, Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов “XXXIV Неделя науки СПбГПУ”, 2006, часть 4, секция “Механика и процессы управления”, сс. 78 - 80

33. Ястребов В.А., Семенов А.С., Мельников Б.Е., Процессы хрупкого и усталостного разрушения на основе связанных уравнений упруго-поврежденности в локальной и нелокальной теории, Труды Четвертой конференции молодых ученых научной школы академика В.В. Новожилова “Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела”, вып. 9, сс. 157 - 166
34. Ястребов В.А., бакалаврская работа “Исследование процессов хрупкого и усталостного разрушения на основе связанных уравнений упруго-поврежденности в локальной и нелокальной форме”, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет, 2005
35. Ястребов В.А., Семенов А.С., Мельников Б.Е., Использование экспоненциального закона поврежденности в модели вязко-поврежденного материала, Процессы управления и устойчивость : Труды 38-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Россия, СПб., 9–12 апреля 2007 г., Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007, стр. 227 - 233
36. Z. Bažant, G. Di Luzio, Nonlocal microplane model with strain-softening yield limits, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, 7209 - 7240
37. Z.P. Bažant, P.A. Pfeiffer, Test of shear fracture and strain-softening in concrete, *Proceedings of the 2nd Symposium of the Interaction of Non-Nuclear Munitions with Structures Panama City Beach, FL.*, 1985
38. E. Bellenger, P. Bussy, Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, pp. 577 - 604
39. A. Caballero, C.M. Lopez, I. Carol, 3D meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 195, pp. 7182 - 7195
40. N. Challamel, C. Lanos, C. Casandjian, Creep damage modelling for quasi-brittle materials, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2005, vol. 24, pp. 593 - 613
41. A. Cimetière, D. Halm, E. Molines, A damage model for concrete beams in compression, *Mechanics Research Communication*, 2007, vol. 34, 91 - 96
42. G. Cusatis, Z.P. Bažant, L. Cedolin, Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2006, vol. 195, pp. 7154 - 7171
43. G. Cusatis, L. Cedolin, Two-scale study of concrete fracturing behavior, *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, vol. 74, pp. 3 - 7
44. R. Desmorat, F. Gatuing, F. Ragueneau, Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, doi:10.1016/j.engfracmech.2006.09.12

45. J.H.P. de Vree, W.A.M. Brekelmans, M.A.J. van Gils, Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics, *Computers and Structures*, 1995, vol. 55, No. 4, pp. 581 - 588
46. W.J. Drugan, J.R. Willis, A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, vol. 44(4), pp. 497 - 524
47. R.A.B. Engelen, M.G.D. Geers, F.P.T. Baaijens, Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour, *International Journal of Plasticity*, 2003, vol. 19, pp. 403 - 433
48. P. Evesque, Fluctuations, correlations, and representative elementary volume (REV) in granular materials, *Poudres & Grains*, 2000, vol. 11, pp. 6 - 17
49. T.C. Gasser, G.A. Holzapfel, Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, pp. 2859 - 2896
50. M.G.D. Geers, R. de Borst, R.H.J. Peerlings, Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams, *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, vol. 65, pp. 247 - 261
51. R. Hill, Elastic Properties of reinforced solids: some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963, vol. 11, pp. 357-372
52. R. Jain, Solution procedure for non-linear finite element equations, Project report, 2003
53. L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, S. Ghavamian, An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, vol. 195, pp. 7077 - 7092
54. M. Jirasek, Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches, *International Journal of Solids and Structures*, 1998, Vol. 35, No 31-32, pp. 4133 - 4145
55. J. Lemaitre, R. Desmorat, *Engineering damage mechanics*, Netherlands, Springer, 2005
56. G.A. Maugin, *The thermomechanics of plasticity and fracture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 350 pp.
57. J. Mazars, A description of micro- and macroscale damage of concrete structures, *Engineering Fracture Mechanics*, 1986, vol. 25, pp. 729 - 737
58. C. Papenfuss, S. Forest, Thermodynamical frameworks for higher grade material theories with internal variables or additional degrees of freedom, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2006, vol. 31, pp. 319 - 353

59. R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brakelmans, J.H.P. de Vree, Gradient enhanced damage for quasi-brittle material, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, pp. 3391 - 3403.
60. R. H. J. Peerlings, Enhanced damage modeling for fracture and fatigue, Proefschrift, TU Eindhoven, 1999
61. S.T. Pietruszczak, Z. Mroz, Finite element analysis of the deformation of strain-softening materials, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1981, vol. 17, pp. 327 - 334
62. G. Pijaudier-Cabot, Z. Bažant. Nonlocal damage theory, *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, vol. 10, pp. 1512 - 1533
63. F. Ragueneau, F. Gatuingt, Inelastic behavior of concrete in low and high strain rate dynamics, *Computer and Structures*, 2003, vol. 81, pp. 1287 - 1299
64. A. Rodríguez-Ferran, I. Morata, A. Huerta, Efficient and reliable nonlocal damage models, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2004, vol. 193, pp. 3431 - 3455
65. V.C. Rougier, B.M. Luccioni, Numerical assessment of FRP retrofitting systems for reinforced concrete elements, *Engineering Structures*, in Press
66. B. Schechinger, T. Vogel, Acoustic emission for monitoring a reinforced concrete beam subject to four point bending, *Construction and Building Materials*, 2007, vol. 21, pp. 483 - 490
67. R. Tenchev, P. Purnell, An application of a damage model to concrete at high temperature and prediction of spalling, *International Journal of Solids and Structures*, 2005, vol. 42, pp. 6550 - 6565
68. J.G.M. van Mier, *Fracture processes of concrete*, CRC Press Inc., USA, 1977
69. G.Z. Voyiadjis, R. K. Abu Al-Rub, A. N. Palazotto, Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory, *International Journal of plasticity*, 2004, vol. 20, pp. 981 - 1038

Приложение А

История бетона и железобетона

Бетон - наилучший из материалов,
изобретенных человечеством

П.Л. Нерви¹

Для начала дадим определения понятиям, которыми будем оперировать: бетон и железобетон. Согласно [1 - Советский Энциклопедический Словарь, 1984] “Бетон (франц. beton) искусственный каменный материал, получаемый в результате затвердевания уплотненной смеси вяжущего вещества, воды, заполнителей и в некоторых случаях добавок; один из важнейших строительных материалов. В зависимости от объемной массы бетоны подразделяются на особо тяжелые, тяжелые, легкие и особо легкие. По виду вяжущего вещества бетоны бывают: цементные, силикатные, гипсовые, асфальтобетоны, полимербетоны и др. По назначению различают бетоны обычные (для промышленных и гражданских зданий), гидротехнические, дорожные, теплоизоляционные, декоративные, специального назначения (химически стойкие, жаростойкие, для защиты от ядерных излучений). Основной показатель качества бетона - прочность при сжатии, по которой устанавливается марка бетона.”

“Железобетон, сочетание бетона и стальной арматуры, монолитно соединенных и совместно работающих в конструкции. Термин “железобетон” часто употребляется и как собирательное название железобетонных изделий и конструкций. Бетон в железобетоне воспринимает в основном сжимающие усилия, а арматура - растягивающие; бетон также придает жесткость конструкции и защищает арматуру от коррозии. Железобетон, как самостоятельный материал появился во второй половине XIX-ого века (первый патент получил французский ученый Ж. Манье в 1867 году). В современном строительстве железобетон - один из основных материалов.” Бетон - один из самых популярных материалов современности. Основа и фундамент современного строительства, как гражданского, так и технического. Перечислять области применения бетона можно очень долго: фундаменты, плотины, атомные электростанции, стартовые площадки ракет, дороги, подземные переходы, дома, мосты, взлетные полосы, порты, шпалы, фонарные столбы и многое другое. Бетон использовался даже в, казалось бы, немыслимых для его применения областях: в судостроении, в авиации и

¹Пьер Луиджи Нерви (Nervi) (1891-1979), итальянский инженер и архитектор. Изобретатель армоцемента; (здание ЮНЕСКО в Париже, 1957, с соавторами; Дворец труда в Турине, 1961).

железнодорожном транспорте! В начале XX-ого века было построено много речных, морских судов и дебаркадеров. Сейчас в это трудно поверить, но в экспериментальном порядке изготавливались крылья и фюзеляжи самолетов, железнодорожные вагоны и рамы цистерн, батискафы и подводные лодки!

Цель настоящей главы - углубиться в историю бетона, выяснить причины его долговечности, сравнить с другими материалами, проследить пути его эволюции в истории и постараться угадать возможные направления его дальнейшего развития. Что же послужило стимулом к появлению бетона? Ответить на этот вопрос достаточно просто. Еще в каменном веке, когда люди еще только учились строить жилища, появился первый бетон, точнее, псевдо бетон. А причиной была необходимость иметь местный, прочный и дешевый строительный материал. Поэтому бетон стал использоваться гораздо раньше, чем металлы. Однако наибольшее развитие бетон получил в эпоху древнеримского государства, славившегося своими искусными строителями. Бетон использовался в Древнем Риме, как строительный материал в течение около 700 лет, начиная с IV-ого века до нашей эры. Уже почти 25 веков прошло с тех пор, как появился римский бетон, а некоторые здания, построенные из него, стоят и поныне. Заметим, что некоторые из них постоянно находятся в соленой воде, а некоторые, как например, Пантеон в Риме, пережили несколько крупных землетрясений. Безусловно, стоит отметить римские гидротехнические сооружения, дороги (сохранившиеся и поныне), многослойные полы, своды и купола.

Сразу появляется масса вопросов. Можем ли мы надеяться, что бетонные сооружения, построенные в наши дни, простоят тысячелетия? В чем секрет римского бетона? Сильно ли отличается современный бетон от римского и насколько последующие цивилизации преуспели в создании и развитии бетона? Ответы на эти и другие вопросы позволят нам проследить развитие одного из древнейших искусственных строительных материалов от Древнего Рима до наших дней, сделать выводы и прогнозы.

А.1 История римского строительства

Все дороги ведут в Рим.

Средневековая поговорка

Большой объем строительных работ в Древнеримском государстве дал развитие и широкое распространение бетону. Бетон применялся при строительстве многотысячных амфитеатров, стадионов, терм, мощных крепостных стен и, конечно же, знаменитых римских дорог, протянувшихся на тысячи километров по всей империи и за ее пределами. Расцветом римского зодчества можно считать времена правления Августа-Октавиана². Ему приписывается фраза: “получив Рим кирпичным, оставлю его мраморным”. Император, его семья и знать тратили огромные средства на строительство храмов, портиков и форумов, одетых в мрамор и золото. Во времена императора Августа, примерно 15 - 10 в. до н.э., римским военным архитектором Витрувием³, образованнейшим человеком своего времени, были написаны “10 книг

²Август Октавиан, римский император с 27 г. до н.э. - 14 г. н.э., внучатый племянник Цезаря

³Марк Витрувий Поллион (80-70 год до н.э. - 25 год до н.э.)

по архитектуре” (или “Об архитектуре”)- основной труд его жизни. В книге, которая стала главным пособием по строительству вплоть до эпохи Возрождения, описаны материалы, техника и основные строительные приемы времен архитектора. Еще один император, давший толчок развитию строительного дела - Клавдий. В 49-ом году при нем возводится грандиозный водопровод длиной в 69 километров, 15 из которых проходили под землей, в том числе по акведуку, названному его именем. Другая постройка - большая гавань в Остии, и, наконец, - обширный водоем с плотиной для спуска вод Фуцинского озера. Причем для этой цели был прорыт тоннель длиной в 5640 метров - случай уникальный в строительной практике того времени. Это были грандиозные строительные программы, требовавшие для своего осуществления огромного объема прочного строительного материала.

В 64 году после печально известного опустошительного пожара, продолжавшегося девять дней и практически уничтожившего город, Рим строится заново “по заранее размеренному плану”. В центре города начали возводить золотой дворец Нерона. Улицы были выровнены и расширены. Нерон запретил использование дерева в стенах, установил выравнивать дома по фасаду портиков, строить дома на некотором расстоянии друг от друга, и при каждом доме необходимо было иметь просторный двор. Архитектура времен Флавиев (69 - 96 гг.) представляет собой один из самых блестящих периодов строительного искусства Римской империи. Был восстановлен сгоревший Капитолий, построен храм Мира, дворец Флавиев на Палантине и огромный амфитеатр - римский Колизей.

Император Тит (79 - 81 гг.) приказывает возвести в Риме несколько терм, громадную мемориальную Арку, названную его именем, и огромный дворец на Палантине. Разумеется, такой подъем в строительстве обусловлен притоком средств в государственную казну. В конце I и в начале II веков победоносные войны Траяна (98 - 117 гг.) приносят Риму дополнительное обогащение. Последовавший затем длительный мир привел к расширению торговли и строительству дорог. К этому периоду относятся строительство ряда крупных инженерных сооружений и среди них - большой порт в Ости. В 102 году для контроля над Дакией⁴ Траян приказывает построить большой каменный мост с бетонными опорами через Дунай. Среди мастеров-строителей того времени особо выделялся Аполлодор из Дамаска. Вероятно он был одним из самых образованных и талантливых инженеров Римской империи, так как помимо моста построил ряд крупных и сложных в конструктивном плане сооружений, таких, как форум Траяна, цирк и термы в Риме, названные именем императора. Ему приписывают и строительство одного из самых красивых и выдающихся сооружений мирового зодчества - бетонного Пантеона в Риме. Еще интенсивнее продолжается строительство во времена правления императора Адриана (117 - 138 гг.). Адриан принимал участие в строительстве не только как организатор, но и как архитектор и инженер-строитель. Большую часть своей жизни он провел в поездках по империи. На склоне лет он приказал построить в городе Тибуре близ Рима загородную виллу с бетонными стенами и воспроизвести в миниатюре все то, что так поразило его во время путешествий. А в 132-139 годах по его приказу возводится грандиозный мавзолей и мост в нему, перекинутый через Тибр.

⁴Дакия (Dacia), римская провинция (со 106 года), занимавшая часть территории современной Румынии.

На протяжении полувека, после царствования императора Адриана, строительная деятельность не имела такой интенсивности. Новое оживление в строительстве приходится на времена царствования Септимия Севера (193 - 211 гг.) Он многое сделал для поддержания и восстановления построек прежних императоров, в частности мостов Траяна. На форуме Траяна он поставил статуи великих людей, перенес их со всей Римской империи. В 203 году в честь победы над парфянами и арабами в Риме сооружается на мощном бетонном фундаменте триумфальная арка Септимия Севера высотой 23 метра и шириной 25 метров. При императоре Каракалле (211 - 217 гг.) в Риме строятся самые грандиозные и красивые за всю историю города термы, весь комплекс зданий занимал 16 га и был закончен не многим более, чем за четыре года. В качестве основного строительного материала использовался бетон. Во второй половине III века, после того как усилился натиск варваров на римские границы, началось интенсивное сооружение крепостей и стен по всей обширной империи. При Диоклетиане в 290 году строится амфитеатр в Вероне, сопоставимый по размерам римскому Колизею. В 305 году сооружены громадные бетонные термы Диоклетиана. Они вмещали одновременно до 3200 человек и являлись самым крупным сооружением такого типа, созданным за всю историю римского строительства.

При Константине, 11 мая 330 года произошло торжественное освещение новой столицы Римской империи - Константинополя. Она быстро стала застраиваться и украшаться великолепными зданиями и произведениями искусства, перевезенными из Рима. Римская империя постепенно меняет свой облик, складывается система натурально-замкнутых крепостных отношений. Города принимают вид крепостей, окруженных мощными крепостными стенами. Поместья превращаются в самостоятельные политико-экономические единицы, с владельцем - государем и армией рабов. Империя Рима распадалась. Напор гуннов, аланов и готов усиливался, параллельно, в конце IV века, возник новый социально-политический кризис. В результате 24 августа 410 года вечный город пал.

А.2 Строительные материалы в Риме

Римляне строили свои великолепные сооружения из различных материалов, местного материала в Римской империи было достаточно: натуральные камни, древесина, сырцевой, а затем и обожженный кирпич, песок и галька, применявшиеся в растворе и бетоне. В те времена по всей Италии огромными "островами" стояли лиственные леса, росло много дубовых и буковых деревьев, клена, тополя, ольхи и цитрусовых. Но с ростом могущества империи все больше и больше лесов нещадно вырубалось, что в последствии сказалось не только на экономике, но и на климате государства. Древесина широко использовалась при изготовлении сложной опалубки и кружал⁵ для строительства сводов и куполов из бетона. Большое распространение в качестве строительного материала имели естественные камни. Использовались различные породы, как легкие вулканические: туф, пемза, лава, так и плотные прочные известняки и порфиры. Нередко крупные элементы зданий возводились из каменных блоков без применения раствора, хотя последний к тому времени уже широко

⁵Кружало, опорная дуга (обычно из досок), по которой выкладывается каменный свод.

использовался в строительной практике. Иногда, в особенно ответственных сооружениях для более надежного крепления каменных блоков между собой на их поверхности выдалбливались специальные отверстия для металлических (иногда деревянных или каменных) дюбелей-“скреп”-штырей, особенно в виде ласточкиного хвоста. Отверстия эти впоследствии заливались расплавленным свинцом по специально оставленным для этой цели канавкам.

Для производства бетона, подстилающего слоя в дорожных покрытиях и других целей требовалось большое количество дробленого камня. Поэтому ежедневно огромное количество рабов было занято его переработкой. Отдельные каменные породы являлись сырьем для производства извести и гипса. Их также необходимо было добывать и перерабатывать. Витрувий дает рекомендации относительно выбора песка: “. . . при бутовых⁶ кладках первым делом надо проследить за песком, чтобы он подходил для раствора и не содержал примеси земли”.

Отдельное место в древнеримском строительстве занимал кирпич, сначала сырцевой, а в последствии вытеснивший его в I веке до нашей эры обожженный. Обожженный кирпич изготавливался трех основных видов: треугольный, прямоугольный и квадратный. Причем для кладки стен использовался в основном треугольный кирпич. Особое место кирпичу отводилось при строительстве стен, сводов и куполов из бетона. В стенах, например, кирпич использовался и как опалубка, и как облицовка, в сводах и куполах - несущего каркаса и так далее. Такое удачное сочетание кирпича и бетона впервые в строительной практике было предложено римлянами. Размеры кирпича не были стандартизированы, каждый изготовитель выбирал размеры по своему усмотрению, руководствуясь в основном качеством глины. На каждую партию кирпичей ставилось клеймо изготовителя. Так кирпичи треугольной формы имели размеры сторон от 127 до 508 мм; прямоугольной - от 254 до 381 мм (длина) и от 102 до 152 мм (ширина); квадратный - от 762 до 838 мм. Высота прямоугольных и треугольных кирпичей колебалась от 38 до 51 мм, а квадратных от 51 до 89 мм. Высота кирпичей в одном ряду принималась всегда одинаковой, а швы делались, как правило, тонкими.

А.3 Опус цементум – римский бетон

В Древнем Риме не было слова “бетон”. Оно появилось гораздо позже, в XVIII веке во Франции. Римляне же материал, подобный бетону, называли по-разному. Так, литую кладку с каменным заполнителем они именовали греческим словом “эмплектон” (emplekton). У Витрувия при описании полов встречается слово “удус” (rudus). Однако чаще всего при обозначении таких слов, как раствор, возведении стен, сводов, фундаментов, молот и тому подобных конструкций в римском лексиконе употреблялось словосочетание “опус цементум” (opus caementitium), которым и стали называть римский бетон. Трудно точно сказать, где и когда появился бетон, так как начало его зарождения уходит далеко в глубь веков. Очевидно лишь то, что он не возник таким, каким мы его знаем сегодня, а, как большинство строительных материалов, прошел длинный путь развития. Наиболее ранний бетон, обнаруженный археологами, можно

⁶Бут, крупный строительный камень (главным образом применяется в фундаментах).

отнести к 5600 г. до н. э. Он был найден на берегу Дуная в поселке Лапенски Вир (Югославия) в одной из хижин древнего поселения каменного века, где из него был сделан пол толщиной 25 сантиметров.

История бетона неразрывно связана с историей цемента. Древнейшими вяжущими веществами, используемыми человеком, являлись глина и жирная земля, которые после смешивания с водой и высыхания приобретали некоторую прочность. Использование глины в строительстве восходит приблизительно к десятому тысячелетию до нашей эры. На основе глины и жирной земли приготавливались смеси типа растворов и бетонов, которые в те далекие времена широко применялись при строительстве самых различных построек и сооружений; начиная от простейших глинобитных (землебитных) домов до громадных храмов - зик-куратов. Римский писатель и ученый Плиний Старший (23-79 гг. н. э.) в "Естественной истории" с восхищением пишет о виденных им в Африке и Испании "формованных" стенах таких построек. "... Веками стоят они, не разрушаемые ни дождем, ни огнем, более прочные, чем сделанные из бутового камня". Эти "формованные" стены изготавливались путем трамбования влажного грунта и глины с камнем, уложенных между деревянными щитами опалубки. В этом смысле они являются прототипом современных монолитных бетонных стен. По мере развития использования "бетона" в строительном деле, все более высокие требования предъявлялись к вяжущим материалам. Более, чем за три тысячи лет до нашей эры в Египте, Индии и Китае начали изготавливать искусственные вяжущие, такие, как гипс, а позднее - известь.

Расширялась область применения бетона. Помимо полов стали сооружаться траншеи для фундаментов, которые заполнялись галькой или обломками битого камня, затем заливались раствором глины, битума или извести с песком. И превращались со временем в твердую и относительно прочную массу.

Отдельные примеры связывания мелких камней растворами или использование раствора с крупным заполнителем были известны в глубокой древности у египтян, вавилонян, финикийцев и карфагенян. Наиболее раннее применение бетона в Египте, обнаруженное в гробнице Тебесе (Теве), датируется 1950 годом до нашей эры. По сведениям Плиния Старшего, бетон был применен при строительстве галерей египетского лабиринта и монолитного свода пирамиды Нима задолго до нашей эры. Одним из первых начали применять бетон народы, населяющие Индию и Китай. Великая китайская стена, строительство которой было начато в 214 году до нашей эры, сооружена в основном из бетона. Приготовление бетона и формование из него стен состояло в следующем. Вначале одна часть известкового теста тщательно перемешивалась с двумя частями песка и гравия или песка, строительного мусора и земли. Полученная сухая (очень жесткая) бетонная смесь с небольшим содержанием воды укладывалась слоями толщиной около 12 см между деревянными щитами опалубки и усиленно уплотнялась деревянными трамбовками. После такого уплотнения поверхность каждого слоя слегка увлажнялась водой и на нее укладывался следующий бетонный слой. Процесс повторялся до полного возведения стены. Такой метод строительства довольно широко применялся в Китае еще в 20-х годах XX века при строительстве домов, школ, бань и пагод⁷.

⁷Пагода, буддийский или индуистический храм, хранилище религиозных реликвий.

Народы, жившие на островах Эгейского моря и в Малой Азии, начиная с VII-VI веков до нашей эры, применяли растворы на жирной извести с гидравлическими добавками при строительстве отдельных зданий и гидротехнических сооружений. Уже в наше время в храмах и дворцах знати были обнаружены хорошо сохранившиеся бетонные “набивные” полы (IV-V века до нашей эры). Искусство производства бетона постепенно распространялось в Восточном Средиземноморье и примерно к пятисотому году до нашей эры достигло Древней Греции, где для покрытия стен, в том числе из необожженного кирпича, использовался мелкозернистый известковый бетон. Таким образом были отделаны дворцы царей Креза (560-546 гг. до н. э.) и Атталы. Впоследствии бетон стал применяться в виде бутовой кладки. Пространство между двумя рядами каменной стены заполнялось крупными камнями, а затем заливалось известковым раствором. Витрувий в своем трактате довольно подробно описал несколько видов такой кладки.

Можно предположить, что римские бетонные стены и другие подобные конструкции развились как раз из греческой бутовой кладки путем постепенного расширения бутобетонного ядра за счет уменьшения толщины каменных стен, которые из главного элемента кладки постепенно превратились в тонкую оболочку, играющую уже подсобную, второстепенную декоративную роль.

Заметное применение бетона на территории древнеримского государства началось примерно с конца IV века до нашей эры и продолжалось около 700 лет. За это время в его развитии, как в живом организме, можно проследить четыре важных этапа: рождение, быстрый рост, зрелость и гибель этого материала.

Так, зарождение бетона, т. е. медленное и постепенное внедрение его в римскую строительную практику, длилось более двух столетий (до I века до нашей эры). Второй этап, продолжавшийся до II века нашей эры, сопровождался ускоренным ростом и широким распространением объемов бетонного строительства по всей Римской империи и прилегающим к ней странам. На третьем этапе (в период так называемой зрелости) бетон развивался не так стремительно, но с заметным улучшением свойств, технологии изготовления и принятия новых конструктивных решений. Это был этап качественного роста и развития больших потенциальных возможностей, который продолжался с начала II века до середины III века. Наконец, заключительный, четвертый этап, продолжался менее ста лет и закончился в начале IV века.

Указанное деление эволюционного развития римского бетона на отдельные этапы довольно условно, но позволяет схематично показать весь путь, который прошел этот материал за семь веков своего существования.

А.4 Эволюция римского бетона

Раннеримский бетон или псевдо-, квази- бетон (IV - III века до нашей эры) по качеству был далек от бетона времен второго и третьего этапа, но по принципам приготовления это был тот же материал. В качестве вяжущего использовалась воздушная известь, а заполнителем служили песок и камни с большим количеством грунта. Крупный заполнитель часто превышал размеры 40-60 сантиметров. Раскопки стен Помпеи показали, что бетон представлял собой структуру, напоминающую совре-

менную бутовую кладку. Сердечник структуры - крупные битые камни или крупные валуны, скрепленные известковым раствором, а в качестве облицовки - две параллельные стены из естественного камня, связанных раствором из песка и извести. Такую кладку называли в то время “опус инцертум” (*opus incertum*) или просто “инцертум”. Бетон в ней был очень непрочен, а устойчивость стены сохранялась не за счет связывающей силы раствора, а за счет давления создаваемого массой заполнителя. Облицовочная кладка являлась одновременно и опалубкой.

Начиная со II века до нашей эры, бетон стал использоваться для строительства стен и фундаментов жилых домов, храмов, а также дорог - имевших очень большое значение для Рима, постоянно ведущего войны. Стоит отметить, что римляне не жалели средств на капитальное строительство, руководствуясь принципом “скупой платит дважды”. Справедливо считали, что ремонт и поддержание конструкций могут требовать постоянных затрат, как временных, так и материальных, поэтому практически все что строилось, строилось на века и даже, как показало время, на тысячелетия. Это относится и к дорогам.

С первой четверти I века до нашей эры состав бетона меняется. Размер самого крупного заполнителя уменьшается до размера “с кулак”. Добавление грунта в вяжущий раствор резко снижается. На смену “инцертум” приходит “ретикулат” (*opus reticulatum*): возведение опорной стенки из камней, которые образовывали правильный периодический рисунок.

На юге Италии, в районе Путеол, вместо песка в растворе и бетоне использовали залегающие в том районе пуццоланы. Подобные свойства имели и залегающие возле Рима вулканические породы, но имели другой цвет, поэтому римляне до середины I века нашей эры ввозили эти добавки с юга. В первом веке до нашей эры, во времена Юлия Цезаря, бетоны с добавками пуццоланов⁸ стали использоваться в области их наибольшей эффективности - в гидротехническом строительстве.

Постепенно появляются тенденции к использованию в качестве крупного заполнителя обломков разрушенных зданий. Размер камня, используемого в бетонных основаниях, почти всегда превышает размеры, крупного заполнителя, используемого для возведения стен. Распространяется технология возведения бетонных сводов. В I веке до нашей эры пролеты сводов достигают 20 - 22 метров. Со времен Августа принято отсчитывать второй этап в развитии римского бетона. Отметим, что в первом веке до нашей эры населения Рима превышало один миллион, и городу требовался прочный и долговечный материал для строительства дорог, водопроводов, домов и так далее. Под эти нужды хорошо подходил бетон. В конце первого века возводятся первые крупные общественные постройки с монолитными бетонными стенами и фундаментами - театры в Помпеях и Риме (в частности, известный театр Марцелла - 17 год до нашей эры). Есть сведения, что основания отдельных мостов, которые довольно интенсивно строились в тот период, также были бетонными. К этому времени в основном стандартизируется состав бетонной смеси и технологии его приготовления. Так, крупный заполнитель уже представлял собой камни размером до 100 мм, песок просеивался и для различных работ строго подразделялся по происхождению.

⁸Пуццоланы, горные породы, состоящие из продуктов вулканических извержений (пепла, туфов, пемзы и другие); используются как добавки при производстве пуццоланового цемента, обладающего повышенной стойкостью к разрушающему воздействию пресных и сульфатных вод.

Нередко в качестве крупного заполнителя использовали битую черепицу, называя в этом случае бетонную массу “структура цистация” (*structura cistacea*).

Впоследствии бетон почти полностью вытеснил дерево и каменную кладку из прямоугольного камня, используемую при возведении арок и сводов, и лишь при строительстве наиболее ответственных сооружений, например мостов, по-прежнему использовалась каменная кладка, так как полного доверия к бетону пока не было.

Примерно с середины 60-х годов I в. н. э., в правление Нерона архитекторами Севером и Целером в Риме сооружается громадный по размерам “золотой дом Нерона”, где бетон с большим успехом используется при возведении стен, сводов и куполов. В 90-х годах I века был открыт Колизей, построены термы и триумфальная арка в честь побед Тита, где мощный пятиметровый фундамент был выполнен из трамбованного бетона. В то же время архитектором Рабрием воздвигнут грандиозный дворец на Палатине, своды которого представляли собой кирпичный каркас, заполненный бетоном. К концу I века бетон занял в строительстве лидирующее положение среди основных конструктивных строительных материалов.

Со II века, начиная с правления Траяна и позднее Адриана, расширяется строительство инженерных сооружений из бетона. Однако особое место бетону, как и прежде, отводится при возведении общественных и жилых зданий, особенно при постройке так называемых инсул - многоэтажных домов. Среди них особое место занимает показательное строительство жилого комплекса с типовыми трех-четырёхэтажными инсулами в Остин.

Облицовка из плоского кирпича и черепицы в то время почти полностью вытесняет “ретикулат”. Так выполнены термы Траяны, Торговые ряды Траяна в Риме и Вилла Адриана. Часть набережной Тибра в период правления этого императора также была изготовлена из бетона с облицовкой методом “ретикулат” и чередующимися рядами кирпича.

В 123 году заканчивается в Риме строительство Пантеона, размер бетонного купола которого диаметром 43 метра до XIX в. оставался рекордным для данного типа бетонных конструкций. Основные строительные работы по Пантеону были выполнены при императоре Адриане. Именно при нем строительство из бетона достигает своего наивысшего расцвета, начинается третий период его развития. В Британии, Северной Африке, Германии, Испании - во всех римских провинциях прокладываются дороги, строятся многочисленные оборонительные сооружения, жилые и общественные здания. Бетонные своды этих построек имели несколько другое конструктивное решение, чем прежде. Они выполнялись не в виде кирпичных арок, заполненных бетоном, а в виде сплошного каркаса из кирпича, уложенного плашмя по деревянным доскам, на который сверху набрасывался бетон.

После смерти Адриана намечается постепенный спад бетонного строительства. Это было закономерно и связано с начавшимся политическим и экономическим кризисами, которые на протяжении последующих двух с половиной - трех столетий сотрясали древнеримское рабовладельческое государство.

На общем фоне упадка, несомненно, были отдельные периоды подъема строительного дела. В это время построены термы Каракаллы и Домициана, где бетон был применен в стенах, сводах и бассейнах для купания. В 268 году был закончен

большой храм Минервы Врачевательницы (Minerva Medica). Ее сферический бетонный купол имеет весьма любопытную конструкцию. Каркас свода храма состоит, по мнению французского ученого Шуази, из меридиональных кирпичных арок, пространство между которыми заполнено бетоном. Бетон, хотя и в более ограниченном количестве, продолжал применяться вплоть до IV в. н. э. Наиболее выдающиеся сооружения этого периода условно - четвертого периода - термы Диоклетиана, базилика Максенция и трехпролетная арка Константина. Последние примеры использования бетона в античный период можно встретить в Константинополе, куда в начале IV века переместилась столица римского государства. Так, в частности, нижние части сводов и арок знаменитого Софийского собора в Константинополе, построенного в 540 году, были сделаны из бетона. В последующий период строительство из бетона практически прекращается.

А.5 Известь

Долговечность римского бетона поразительна. Можно лишь удивляться, глядя на отдельные древнеримские здания и сооружения, простоявшие более 2000 лет. Даже их развалины поражают наше воображение. Сегодня мы имеем более прочные цементы для бетона, чем слабые известковые вяжущие вещества римлян, прогнозируем работу железобетонных конструкций на много лет вперед, и все-таки у нас нет полной уверенности, что современные бетонные и железобетонные сооружения выдержат без разрушения хотя бы 100 лет эксплуатации. Почему же стоят бетонные сооружения римлян? Вероятно, они владели какими-то секретами, которые со временем были утрачены? Попробуем разобраться в этом сложном вопросе. Правда, для этого нам потребуется пройти по всей длинной технологической цепочке изготовления и производства римского бетона.

Для того чтобы каменный скелет превратился в монолитный искусственный камень, нужен прочный и желателно дешевый клей. В качестве такого клея, а точнее - его основного композита, римляне использовали воздушную известь, хотя были случаи применения гидравлической извести и вяжущего типа роман-цемента.

Известь получают из обычного известняка, известняка-ракушечника, мела, мергеля - то есть всех тех горных пород, в которых основным компонентом является кальцит. Серый бутовый камень, из которого выкладывают фундамент, мрамор, мел - все они в большей или меньшей степени содержат кальцит. В зависимости от его относительного содержания известняки, например, называются чистыми (не менее 98% кальцита) и мергелистыми. Древние строители предпочитали чистые белые известняки, считая, что именно из них можно получить наиболее качественное вяжущее вещество.

Однако известняк еще не известь, и им невозможно склеить камни или кирпичи. Для этого он должен пройти длинный путь последовательных превращений - обжиг, дробление и гашение в воде...

За несколько тысячелетий до новой эры люди научились получать готовую известь из известняка. Со временем объемы строительства из камня и кирпича росли и требовали все больше и больше извести, поэтому вместе с увеличением выпуска

кирпича и камня росла и совершенствовалась технология получения извести. Особенно больших успехов достигли в этом деле древние римляне. Марк Порций Катон (234-149 года до нашей эры), консул и цензор Римской Республики, примерно в 160 году до нашей эры описал устройство печи и процесс обжига известняка. По его данным печь имела форму усеченной пирамиды с шириной внизу 2,96 метра, вверху 0,79 метра и высотой 5,92 метра. Устраивалась она обычно на крутом склоне холма, чтобы не мешал ветер. Иногда к печи пристраивали выступающую над поверхностью земли верхнюю часть, что увеличивало объем и улучшало тягу. Топку отделяли от пространства, занятого камнем, колосниковой решеткой, препятствующей падению камня в огонь.

Основное внимание при производстве извести римляне уделяли выбору сырья. Катон рекомендовал для этого белый, наиболее чистый известняк, не считая пригодным пестрый, содержащий глинистые примеси материал. Этому же мнения придерживались Витрувий, Плиний и Палладий (IV век нашей эры). Известняк обжигали при температуре порядка 900° С. При этом окончание процесса обжига определяли по уменьшению количества дыма в пламени.

Римляне различали три вида извести: негашеную, погашенную в тесто, которая употреблялась при отделочных работах, и погашенную в порошок, идущую исключительно для кладки стен.

Для изготовления кладочных растворов обожженную и измельченную в небольшие куски воздушную известь гасили водой так называемым сухим способом. Для этого известь погружали в воду и затем рассыпали на воздухе или укладывали ее слоями, которые затем опрыскивали водой и покрывали слоем песка для сохранения выделяемого тепла, способствующего гашению. Эти способы, применяемые порой и теперь, не обеспечивали полноты гашения, так как оставляли в порошке более крупные, неразмешанные и непогасившиеся зерна извести. Для штукатурных работ известь затворяли избыточным количеством воды задолго до употребления и выдерживали в ямах до полного гашения. Образующееся тесто тщательно секли острыми металлическими секирами и перемешивали до равномерно жирной и “липкой” консистенции, Витрувий справедливо считал, что без этого кусочки недожженной извести не успеют погаситься до начала работ и будут продолжать гаситься в штукатурке, образуя дутики, которые приведут к поверхностным разрывам и трещинам. Для наиболее ответственных работ и приготовления специальных замазок (мальт) известь гасили не водой, а вином, перетирая со свиным салом и смоквой. Обычно римские законы не разрешали применять известь, гашенную менее чем за три месяца до начала строительства. Особенно тщательно и долго гасили известь, предназначенную для штукатурных работ. У древних строителей существовали специальные правительственные постановления, запрещающие употребление гашеной извести раньше истечения нескольких лет со дня затворения ее водой. Плиний Старший упоминает в своей “Естественной истории” о том, что древние законы о сооружениях запрещали применять для штукатурки известь, гашенную менее чем за три года до начала строительства. В то время считали, что, “...чем старее известь, тем лучше”. Этим, по мнению Витрувия, достигалась надежность гашения, от которой зависела прочность сооружения.

К XIX веку сроки гашения извести намного сократились, но многие строители придерживались старых правил, считая законы древних строителей непогрешимыми. Так, русский зодчий Ф. М. Казаков при постройке здания Сената в Кремле приказал выдерживать известь в творильных ямах до шести месяцев, а Д. Жилярди считал, что этот срок должен быть около двух недель. Впоследствии время выдержки извести было уменьшено до трех дней, а сегодня известь гасят за несколько часов, используя для этой цели специальные установки - гидраторы.

Качество извести проверялось государственными контролерами при помощи небольшой лопатки, которую погружали в известковое тесто. Если после выдергивания лопатки на ней оставались отдельные комки, считалось, что известь еще не созрела для производства работ. Если же лопатка выходила из теста сухой и чистой, это показывало, что известь утратила свои вяжущие свойства. И только когда при вытаскивании лопатки к ней прилипал по всей поверхности ровный слой известкового теста, известь считалась годной к употреблению. Интересно, что Витрувий был первым, кто сделал попытку теоретически обосновать процесс обжига и твердения извести. Его объяснение сводилось к взаимодействию четырех первичных элементов, из которых состоит материя - земли, воды, огня и воздуха. Сегодня многим такое объяснение покажется наивным и даже смешным. Однако не следует забывать, что Витрувий описал это явление 2000 лет назад, и еще долго после него сущность процесса обжига известняка оставалась неясной. Первые научные объяснения такому взаимодействию химических элементов дал в 50-х годах XVIII века Дж. Блэк. Процессы же твердения современных кальциевых цементов исчерпывающе не разъяснены и поныне.

Прошли века, но принцип получения извести, отработанный древними римлянами, остался прежним. Изменилась лишь технология ее получения и гашения. На смену кустарному производству пришли автоматизированные заводы с большой производительностью, позволяющие получать продукт, однородный по составу, с улучшенными характеристиками.

Однако при рассмотрении технологии получения извести из известняка мы не продвинулись по пути расшифровки римского секрета.

А.6 Физико-химические свойства

Попробуем проследить основной путь превращения белого чистого известняка в прочный и плотный камень с современных научных позиций.

Если обжигать куски добытого в карьере известняка на сильном огне, то из камня по мере увеличения температуры будут последовательно выделяться вода и углекислый газ с образованием углекислоты. При температуре порядка 900° С из известняка выделяется безводный продукт оксида кальция, т. е. белые куски негашеной извести. Это первое превращение известняка. Если, же на грудку камней извести вылить ведро воды, известь зашипит, закипит, вздуется и над ней поднимется густой белый пар. Белые куски извести быстро превращаются в мелкий порошок. Через минуту кипение прекратится. Известь из негашеной превратилась в гашеную, а полученный порошок - в так называемую "пушонку". Пушонка - сухой на ощупь порошок. Вылитая на негашеную известь вода химически соединилась с ней. Произошло второй

превращение известняка.

Смешаем еще раз пушонку с водой. Кипеть, т. е. гаситься, она уже не будет, а просто превратится в тесто с техническим названием гидроксида кальция. Чем больше добавлять в него воды, тем более жидким становится известковое тесто. Если это тесто плотно закрыть сверху грунтом, то оно не затвердеет десятки лет и при этом еще станет очень пластичным, наподобие сливочного масла. Если же тесто оставить на воздухе, то оно скоро покроется твердой корочкой и постепенно окаменеет. Жидкое тесто - третье превращение известняка. Это почти готовый клей. Слово "почти" означает, что таким тестом нельзя хорошо склеить кирпичи или камни, так как чистое известковое тесто быстро рассохнется и растрескается. Чтобы этого не произошло, необходимо тесто смешать с песком. Такая смесь будет называться известковым раствором, а процесс перехода растворной смеси в твердый камень - четвертое и одновременно пятое превращение известняка. Это наиболее важный и сложный этап при твердении гашеной извести. Переход известкового раствора или бетона в камень-известняк или карбонат кальция известен как карбонатное твердение известковых вяжущих веществ. При обычной температуре он складывается из двух одновременно протекающих процессов: испарения свободной воды из известкового теста (четвертое превращение), с постепенным образованием кристаллического каркаса из гидроксида кальция (пятое превращение).

Процесс кристаллизации гидроксида кальция протекает весьма медленно. Испарение воды вызывает постепенное слипание его мельчайших частиц в более крупные и их кристаллизацию. Растущие кристаллы срастаются между собой, образуя известковый каркас, который окружает частицы песка. Эти два процесса протекают почти одновременно и проходят достаточно интенсивно только в присутствии влаги и углекислого газа. Пленка углекислого кальция, образующаяся в первый период твердения раствора на его поверхности, затрудняет попадание углекислоты во внутренние слои гидроксида кальция. В результате процесс карбонизации почти приостанавливается, и твердение камня идет, главным образом за счет кристаллизации, при которой необходима пониженная влажность и положительная температура.

В результате образования слабых кристаллических сростков прочность раствора на воздушной извести получается очень незначительной и к 28 суткам твердения составляет в среднем 0,5 МПа. Помимо этого полученное соединение не стойко к воде и морозу. Правда, впоследствии в результате протекающего процесса карбонизации, прочность такого раствора и бетона увеличивается в 5-7 раз и более, но сам процесс протекает очень медленно - на протяжении десятков и сотен лет. Очевидно, что римлян с их интенсивным строительством не устраивала не только низкая прочность бетонов и растворов на воздушной извести, но и то, что они твердели только на воздухе и не могли твердеть в условиях влажной среды. Потребности в гидравлических вяжущих веществах подтолкнули античных строителей к выявлению принципиально новых добавок для бетонов и растворов, с помощью которых можно было избавиться от перечисленных недостатков.

Сегодня мы хорошо знаем, что для того чтобы улучшить качество бетонов и растворов на воздушной извести, надо слабый и растворимый в воде гидроксид кальция (известковое тесто) перевести в более стойкое и нерастворимое соединение, например,

в гидросиликат кальция. Для этого необходимо добавить в него активный кремнезем. Реакция в этом случае идет только в присутствии воды, хотя полученное новое соединение - гизросиликат кальция - почти не растворяется в воде. Активный кремнезем в отличие от пассивного - обыкновенного кварцевого песка, получил название гидравлической добавки за свою способность твердеть и набирать прочность не только на воздухе, но и в воде.

Римляне, конечно, не подозревали о сложных процессах, происходящих при смешивании воздушной извести с гидравлической добавкой, но, используя опыт этрусков и греков, они хорошо знали, что если к известковому тесту добавить не просто обыкновенный песок и камни, а кирпичный песок и кирпичные камни; то такое соединение будет способно твердеть в воде, а полученный при этом искусственный камень окажется гораздо прочнее, чем бетон или раствор на одной воздушной извести с обыкновенным песком и галькой. Впоследствии кирпичную или черепичную добавку стали называть цемянкой. Обычно цемянку применяли в виде тонкомолотого порошка или пыли для водонепроницаемых штукатурок, бетонных полов и подобных покрытий, главным образом в сырых местах. Кроме этого, ее использовали в виде муки в штукатурках водопроводных каналов, давяльных площадок для вина и резервуаров виноделен, рыбозасолочных ванн, а также для защиты бетонных сооружений от износа и разрушения.

Помимо цемянок, т.е. - искусственных гидравлических добавок, римляне широко применяли естественные добавки вулканического происхождения. Им даже приписывали честь открытия этих добавок, точнее, их действия на воздушную известь, так как вулканические камни использовались в строительной практике очень давно. Витрувий описывает эти добавки следующим образом: "...существует определенный порошок естественного происхождения, используя который можно добиться великолепного результата. Его находят в Байях и в землях вокруг Везувия. Это вещество при смешивании с известью и камнем не только придает прочность сооружению, но даже при устройстве дамб в открытом море прочно схватывается под водой".

К таким добавкам относились: санторинская земля, добываемая на греческом острове Тире, рейнский трасс, расположенный на территории современной Германии, и туфф, залегающий мощными пластами почти по всей Италии. К ним также относились многие другие горные породы вулканического происхождения, получившие общее название пуццоланы. Особенно широкое применение получили подобные добавки, залегавшие в районе древних Путеол (совр. Поццуоли). Одним из первых сооружений, при строительстве которого была использована пуццолана в качестве гидравлической добавки в бетон, был волнолом в окрестностях Неаполя близ Путеол, сохранившийся до наших дней. Несмотря на то, что туфовые блоки из этого волнолома подверглись эрозии, сам пуццолановый раствор между ними хорошо сохранился. В зависимости от назначения раствора или бетона римляне применяли различные соотношения между известью и пуццоланой. Однако наиболее распространенным был состав 1 : 2 - на 1 часть извести, 2 части пуццоланы. Прочность такого бетона, вероятно, составляла 5-10 и более МПа.

Итальянскую пуццолану, как и греческую санторинскую землю, в большом количестве применяют и теперь в гидротехническом строительстве в разных странах.

На Канарских островах, где пуццолана, как и в Италии, встречается повсеместно, соотношение между известью и пуццоланой принималось 1 : 5. Из бетонов таких составов построены гидротехнические и ирригационные сооружения, которые стоят в течение многих веков.

Воздушная известь в сочетании с пуццоланой и другими гидравлическими добавками была практически единственным гидравлическим цементом того времени, поскольку гидравлическая известь и роман-цемент применялись, как полагает большинство ученых, эпизодически и в ограниченном количестве. Таким образом, в применении гидравлической добавки к воздушной извести заключена одна из главных отгадок секрета, долговечности римского бетона. Американские ученые уже давно заинтересовались этим вопросом и в середине 70-х годов нашего века получили новое вяжущее - геополимерный цемент - аналог древнеримского известково-пуццоланового вяжущего. По мнению зарубежных специалистов, новые цементы более долговечны и прочны, чем современные портландцементы.

А.7 Рецепты римского бетона

Когда инженеры-строители начинают профессиональный разговор о бетоне, то их в первую очередь интересует его прочность, морозо- и водостойкость. Для того чтобы бетон и бетонные сооружения обладали всеми требуемыми характеристиками, необходимо точно знать рецепт бетона - состав, т. е. соотношение всех его компонентов. В конечном виде состав бетона записывают в виде весового или реже объемного соотношения, например, 1 : 2 : 4 (цемент : песок : щебень или гравий), т. е. на одну часть цемента приходится две части песка и четыре части щебня или гравия. Определив заранее расход цемента и воды, можно, пользуясь указанным соотношением, легко вычислить расход каждого из заполнителей. Однако перед тем, как подойти к рецептам для бетона, необходимо выяснить еще один важный вопрос - роль заполнителей - песка и крупных камней в бетоне. Как они влияют на свойства бетона, да и нужны ли они вообще в бетоне?

Сразу же необходимо сказать, что без заполнителей нельзя изготовить “хороший” бетон. Присутствие их в бетоне, как было установлено, значительно улучшает строительно-технические свойства материала и, в первую очередь, такие, как водонепроницаемость, деформативность и прочность. Кроме того, заполнители намного дешевле вяжущих веществ, поэтому экономически более выгодно, чтобы в бетонной смеси их было как можно больше.

Несомненно, что, начав работать с бетоном, римляне не могли не обратить внимания на качество заполнителей. Так, для удобства их применения уже с середины I века до нашей эры вводится классификация заполнителей по виду породы, загрязненности, а также в зависимости от назначения будущего бетонного сооружения. Об этом свидетельствуют работы археологов и древних авторов. Так, по виду и условиям залегания пески подразделялись, как и теперь, на речные, морские и горные (овражные), или как их называли прежде - котлованные. При этом существовало дополнительное разделение каждого вида песка по окраске и загрязненности. Витрувий писал о том, что “...Есть следующие сорта горного песка: черный, серый, крас-

ный и карбункул (песок вулканического происхождения). Из них наилучшим будет тот, который скрипит при растирании в руке”. В большинстве случаев он советовал применять чистые “без примеси земли” пески. Так, для кладки стен и сводов Витрувий рекомендовал только мытый песок, а для штукатурных работ - очищенный речной. Морской песок, по его мнению, в большинстве случаев нежелателен, так как содержит примеси солей, которые ведут к выцветанию стен. При этом, как пишет Витрувий, наличие в песке соли, обладающей гигроскопическими⁹ свойствами, затрудняет высыхание раствора, задерживая тем самым сроки строительства. Такое утверждение не противоречит современным техническим условиям на мелкий заполнитель. Есть сведения, что заполнители для бетона (особенно пуццолановые) обязательно промывались.

Интересны указания римлян по заготовке бутовых камней и щебня для бетона, “Надо добывать камень не зимою, а летом,- пишет Витрувий,- и оставлять его вылеживаться на открытом воздухе два года до начала стройки. Тот камень, который за это двухлетие будет поврежден непогодой, пойдет на фундамент, остальной же, оказавшийся непорченным, пойдет для надземной части здания как испытанный природою и могущий сохранить свою прочность...”

Методы определения чистоты заполнителей были весьма простыми, а требования к ним более жесткими. “...Если насыпать песок на белое полотенце и затем потрясти или подбросить его и он не оставит пятен и землистого осадка, то будет годен...” (Витрувий). Особое значение для бетона имеет зерновой (гранулометрический) состав его заполнителей. Песок и щебень или гравий должны состоять из зерен различной величины, тогда объем пустот в них будет минимальным, а чем меньше объем пустот в заполнителе, тем меньше требуется вяжущего вещества для получения плотного бетона.

О том, что римляне придавали большое значение зерновому составу заполнителей, говорят результаты испытания их сооружений, выполненных в наше время. Так, при исследовании римских развалин в Англии было выявлено, что из 58 бетонных образцов стен 55 имели заполнитель с одинаковой наибольшей крупностью, прошедший сквозь сито с отверстием 12 мм. Из 209 образцов бутовой кладки 200 имели заполнитель с наибольшей крупностью 19 мм и удовлетворительную по сегодняшним требованиям область зернового состава. Зерновой состав заполнителей из бетонов моста Траяна и водопровода близ Кельна также показал большое сходство с современными требованиями. Есть и еще ряд подобных примеров. Следует также отметить частое использование дробленого щебня, причем “...не тяжелее фунта” (т. е. 327 грамм), как требует этого Витрувий.

Вероятно, к началу I века нашей эры римскими строителями было установлено, что заполнитель оказывает вполне определенное влияние на свойства бетона. Этот вывод подтверждается многочисленными примерами. Так, при строительстве Колизея в бетоне был применен заполнитель трех видов: для фундаментов - плотный и тяжелый щебень из высокопрочной лавы, для стен - более легкий известняк, а в сводах и перекрытиях - легкая пемза и туф.

Теперь вновь обратимся к составу бетона - его рецептуре. Можно представить,

⁹Гигроскопический, о веществах, материалах: способный вбирать в себя влагу окружающей среды.

какими искусными “кулинарами” должны были быть античные мастера-строители, если, не имея под рукой механизированного оборудования и даже элементарных весов, они получали достаточно качественные по составу бетоны и растворы.

О выборе состава раствора в зависимости от назначения и вида применяемого песка имеются определенные указания Витрувия и других античных авторов. Относительно же состава бетона таких указаний ни у кого из них нет, за исключением туманных рекомендаций Плиния Старшего. Однако, если вспомнить, как готовился бетон в Древнем Риме, станет ясным, почему там не было специальных рекомендаций о его составе.

Бетон в то время приготавливали в основном отдельным способом, т. е. отдельно в специальных емкостях замешивали известковый раствор и укладывали его слоями в опалубку, чередуя со слоями крупного заполнителя. Поэтому, если состав раствора был необходим в первую очередь для получения требуемой консистенции смеси и всегда указывался в правилах производства работ, то количество щебня или гальки, по-видимому, играло второстепенную роль, и поэтому не учитывалось. Правда, в отдельных видах гидротехнических работ количество щебня в общем объеме бетона все-таки задавалось. Так, Плиний приводит состав гидротехнического бетона из извести, пуццоланы и битого туфа в пропорции 1:2:1. Другой вид бетона без указания состава, употреблявшийся для постройки цистерн, состоял, по Витрувию, из чистого песка, щебня или булыжника весом не более одного фунта и самой хорошей извести. Можно предположить, что в то время уже существовали элементарные методы расчета состава раствора, так как римлянам были хорошо известны способы определения объема геометрических тел и они могли рассчитывать общее количество раствора и бетона на любой заданный объем. Вяжущее вещество и заполнители принимались в зависимости от назначения работ в соотношениях, указанных выше, а количество воды подбиралось “на глаз”. При этом важно подчеркнуть, что римляне были хорошо осведомлены о том, что избыток воды в смеси всегда нежелателен, на что указывал, в частности, Плиний. Воду поэтому, скорее всего, заливали в смесь не всю сразу, а постепенно, доводя раствор до требуемой консистенции.

С тех пор как в конце XVIII века в Европе появились первые машины по испытанию материалов, стали испытывать и образцы римского раствора и бетона, отобранные из различных сооружений. Правда, было обнаружено, что данные имеют немалый разброс, который усугубляется различным сроком службы сооружений - в пределах 50-350 лет. Однако отдельные выводы по результатам испытаний сделать можно. Можно предположить, что прочность древнеримских вяжущих в зависимости от их вида была в пределах 0,5-15 МПа; в частности, для воздушной извести 0,5-1 МПа; для гидравлической 1,5-2 МПа; для известково-цемячного и известково-пуццоланового цемента 3- 10 МПа и вяжущего типа романцемента 5-15 МПа.

Очевидно, что производимые в то время бетоны также обладали различной прочностью в зависимости от вида вяжущего, водовяжущего отношения, тонкости помола пуццолановых добавок и других трудно учитываемых факторов.

В 80-х годах нашего века западногерманские ученые провели серию испытаний бетонных образцов, взятых в районе Кельна, Зальбурга и других городов Западной Германии - бывшей римской провинции. Бетонные образцы были отобраны из

стен домов, сводов зданий, стен бассейнов и других сооружений. При этом было обнаружено, что прочность на сжатие бетонных образцов имела от 0,5 до 50 МПа в зависимости от вида сооружений, хотя преобладающей оказалась прочность порядка 7-12 МПа. Максимальное значение прочности - 50 МПа - обнаружено у бетонных полов. Стены и своды зданий показали гораздо меньшую прочность, а бетон из стен бассейна - всего 0.5 МПа. Это свидетельствует о том, что римляне, изготавливая водонепроницаемые сооружения, не стремились получить при этом прочный бетон.

Основываясь на многочисленных описаниях римских сооружений и результатах испытаний, можно предположить, что римские бетоны в зависимости от вида применяемого вяжущего и заполнителя имели среднюю плотность от 700 до 2200 кг/м³, водопоглощение 5-20% и пористость порядка 20-40%.

Несмотря на такие большие диапазоны значений физико-механических показателей испытанных образцов, большинство римских бетонных сооружений оказались долговечными. Это подтверждает выводы отдельных исследователей о том, что ни прочность, ни пористость бетона не могут служить основным критерием при определении его долговечности. Вероятно, значения этих показателей наиболее важны в течение первых лет работы конструкции, а в дальнейшем их значение нивелируется.

Сегодня трудно оценить и проанализировать составы римского бетона только по соотношению их компонентов при большом количестве неизвестных, тем более, что данные относительно действительного состава бетона и его структурных характеристик у многих исследователей вызывают сомнения. Можно лишь утверждать, что хорошее современное состояние отдельных бетонных сооружений Древнего Рима свидетельствует о превосходном качестве применяемого исходного материала, рационально подобранном составе бетона и надлежащем качестве строительных работ.

А.8 Формование бетона

Как уже говорилось ранее, при возведении стен применялась каменная опалубка, хотя по мнению некоторых ученых, сначала формировалась бетонная стена, а потом уже отделялась камнем или кирпичом, после твердения бетонного ядра. На рисунке А.1 представлены виды каменной опалубки, использовавшиеся в Риме: неправильная (*opus incertum*), правильная (*opus reticulatum*), из кирпича (*opus tectacium*) и смешанная (*opus mixtum*). Первые три вида приведены в хронологическом порядке их применимости. Кирпичная опалубка появилась в I веке нашей эры и стала особенно популярна при императоре Тиберии (14 - 37 года). Сцепление кирпича с бетоном, который нарочно изготавливали пористым и шероховатым с одной стороны и гладким с другой, было прочнее и надежнее, чем при использовании естественных камней. Иногда кирпичная кладка совмещалась с кладкой естественного камня, уложенного по форме “ретикулята”. Отметим, что у правильной кладки, пришедшей на смену неправильной было преимущество только во внешнем облике стены, прочность же стены была меньше. Также во времена Тиберия для облицовки стен использовалась специально приготовленная черепица. Помимо каменных, кирпичных и черепичных опалубок, применялись и деревянные опалубки из струганных досок и щитов.

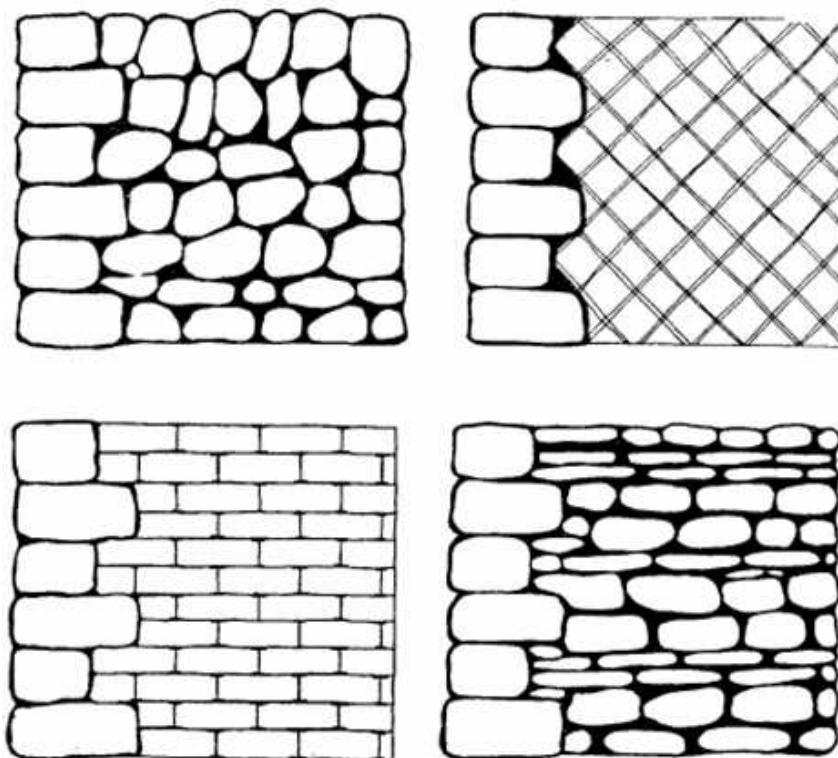


Рис. А.1. Виды каменной опалубки, слева направо: opus incertum, opus reticulatum, opus tectacium, opus mixtum

Наиболее сложной для изготовления считалась опалубка сводов и куполов. Такая опалубка делалась деревянной и устраивалась по деревянным кружалам, которые опирались или на специально приготовленные выступы в стене или на леса, в зависимости от ширины пролета. Зачастую такая опалубка усиливалась кирпичными каркасами, промежутки между которой заполнялись бетонной смесью. Древесину старались экономить, поэтому для возведения массивных перекрытий, сначала на легкой деревянной опалубке создавался тонкий бетонный свод, а уж затем бетонировалось все перекрытие.

После возведения опалубки приступали к бетонированию, это была очень тяжелая и ответственная работа, ведь от того, как уложена и уплотнена бетонная смесь зависят все основные свойства бетона.

Приведем, к примеру, данные о соотношении качества уплотнения и прочности бетона на сегодняшний день: недоуплотнить на 1% значит проиграть 5% в прочности, недоуплотнить на 5-10% - проиграть от трети до половины прочности! Сегодня при уплотнении бетонов используется метод вибрации, но римляне технически не могли себе этого позволить и использовали послойный метод укладки, уплотняя каждый слой с помощью трамбования. Стоит отметить, что каждый каменный слой посыпался пылью и каменной крошкой. На этот счет есть два предположения. Первое предположение, крошка посыпалась для того чтобы не застывший бетон не прилипал к ногам и трамбовкам рабочих. Второе предположение было выдвинуто архитектором А. Башкировым, слой пыли и крошки служил специальным "прокладочным" антисейсмическим слоем. Те же способы применялись при уплотнении дорог, полов и даже штукатурки.

Так в чем же секрет долговечности и прочности римского бетона? На сегодняшний день существует несколько мнений. Французский архитектор Ж. Ронделе (1734 - 1829), изучая римские сооружения и проводя опыты, пришел к выводу, что ключ к превосходному качеству римского бетона - это тщательное перемешивание и хорошее уплотнение свежееуложенной смеси. До него предполагалось, что секрет в определенном рецепте изготовления извести, но эту гипотезу опроверг сравнительный химический анализ бетонов, не выявивший никаких существенных изменений. При этом римские бетоны содержат до сих пор не полностью карбонизировавшуюся известь. Современный английский исследователь Ф. Финкелдей убежден, что у римлян не было никаких особенных секретов, а долговечность достигалась применением известково-пуццоланового вяжущего и рационального состава бетона. При этом римляне использовали умеренное количество воды в бетонной смеси. “Ученый был настолько поражен долговечностью и прочностью сооружений из римского бетона, что настойчиво призывал вернуться к старым технологическим методам, цементам и заполнителям.”

Вот два ответа, не опровергающие друг друга. С обоими учеными можно согласиться. А можно и самому заняться изучением сохранившихся до наших дней римских бетонных конструкций и, может быть, все-таки обнаружить секрет долговечности римского бетона.

А.9 Сооружения из римского бетона

А.9.1 Римские дороги

Utilitas, firmitas, venustas¹⁰

Витрувий

Дороги прославили Древний Рим. Дороги - это торговые пути, пути сообщения, которые способствовали развитию Древнего Рима, его культуры и цивилизации. По ним перевозили награбленную в завоеванных странах добычу, перегоняли тысячи рабов.

В начале II в. во времена Траяна существовало уже около 100 тыс. километров государственных дорог, преимущественно с твердым покрытием. Они были хорошо обустроены и содержались в отличном эксплуатационном состоянии. На основных дорогах Рима через каждую римскую милю (примерно 1,5 км) устанавливались дорожные знаки. Предусматривались станционные дома-гостиницы и ремонтные службы. Все это способствовало их большой пропускной способности. Так, по свидетельству современников, император Август мог в течение светового дня проезжать по римским дорогам 185 км, а Тиберий за сутки покрывал расстояние в 350 км. При четкой работе всех служб и быстрой смене лошадей в среднем удавалось проезжать до 300 км в день.

Вероятно, большинство дорог Древнего Рима строилось в соответствии с требованиями первых “технических условий”, так называемых “12 таблиц”, разработанных

¹⁰Utilitas, firmitas, venustas! (лат.) Польза, прочность, красота!

еще в 450 году до нашей эры. Согласно этому документу дороги по ширине делились на следующие части (полосы): семита (*semita*) или пешеходная полоса шириной 30 см, итер (*iter*)- полоса для всадников и пешеходов шириной не более 92 см; актус (*aktus*)- полоса для одноупряжных повозок и экипажей шириной 122 см и двухполосная виз- (*via*)- основная проезжая часть шириной около 244 см. Таким образом, если считать, что семита, итер и актус проходили с обеих сторон дороги, то общая их ширина с учетом двойной виа составляла, приблизительно от 7 до 10 м. В более поздние времена империи этим размерам перестали строго следовать.

Первой стратегической дорогой римлян считалась Аппиева, проложенная в 312 году до нашей эры цензором Аппием Клавдием Крассом. Это была наиболее широкая мощеная дорога, соединившая Рим с Капуей. Именно вдоль нее были распяты на крестах шесть тысяч рабов, восставших под предводительством Спартака. Длина Аппиевой дороги составляла 540 км, а ширина 7 - 8 метров. Как и большинство крупных дорог Древнего Рима, она, невзирая на рельеф местности была на большей части прямая, как луч. Аналогичной была «виа Фламиния»- Великая Северная дорога, построенная приблизительно в 220 году до нашей эры. Это была, пожалуй, самая длинная по протяженности дорога, которая шла от Рима к северу Италии через Альпы и далее - по берегу Адриатического моря в Византию. Считается, что до конца I века до нашей эры почти весь Италийский полуостров был пересечен дорогами, ведущими в Рим.

В то время в римских городах была распространена прямоугольная координатная сетка расположения домов с длинными и прямыми улицами. Это не значит, что все улицы были такие. Внутри кварталов улицы, наоборот, были узкими и кривыми, но главные улицы отличались от них. Они нередко имели ширину 12 м, а в отдельных городах, как, например, в Кельне, расстояние между фронтонами зданий достигало 32 м. Основная дорога там с учетом тротуаров имела ширину 22 м, а без учета тротуаров 11 - 14 м.

В пределах города на дорогах обязательно устраивался тротуар шириной от 0.5 до 2.4 метров, который отделялся от проезжей части бордюрным камнем высотой около 45 сантиметров. Основание таких дорог обычно дренировалось при помощи специальных водостоков и кюветов, а поверхность дорог всегда была приподнята над уровнем земли и имела небольшой уклон к периферии.

Общая толщина римских дорог составляла от 80 до 130 сантиметров, хотя отдельные из них достигали 240 сантиметров. Как правило, дороги были многослойными, из четырех-пяти слоев, со средними слоями из бетона, хотя абсолютной уверенности в этом нет. Нижний слой многих дорог представлял собой основание из каменных плит толщиной 20-30 сантиметров, которые укладывались на хорошо уплотненное земляное полотно через растворную стяжку, с последующим выравниванием их песком. Второй слой толщиной 23 сантиметра состоял из бетона (битого камня, уложенного в раствор). Третий слой толщиной тоже 23 сантиметра был из мелкогравийного бетона. Оба бетонных слоя тщательно утрамбовывались. Это была самая сложная и изнуряющая часть работы, которую выполняли в основном рабы и иногда воинские подразделения. Последний, верхний слой дороги покрывался большими каменными блоками площадью 0.6-0.9 квадратных метров и толщиной около 13 сантиметров.

Считается, что большая часть Аппиевой дороги сооружена именно так.

Таким образом, по данным ряда исследователей, занимавшихся изучением римских дорог, можно констатировать, что обязательным элементом римских дорог являлся слой бетона толщиной около 30 см, который укладывался между каменными плитами основания и каменной брусчаткой верхнего покрытия. Французский инженер М. Флере еще в начале XIX века описал устройство римской дороги с гравийным покрытием. Грунт, по его сведениям, вырывался на глубину до четырех футов (120 сантиметров), после чего дно траншеи тщательно уплотнялось окованными деревянными трамбовками. На дно заливалась известково-песчаная постель толщиной в один дюйм (2,5 сантиметра), на которую укладывался слой плоских широких камней. Поверх этих камней снова заливали слой раствора и хорошо уплотняли. Следующий слой толщиной 9-10 дюймов (23-25 сантиметров) состоял из бетона, где крупным заполнителем были камни булыжника и гравия. Помимо них использовали также черепицу и каменные обломки разрушенных зданий. Выше этого слоя укладывался новый слой бетона на более мелких камнях, толщина которого составляла около одного фута (30 сантиметров). Последний верхний слой толщиной три-три с половиной фута (90-105 сантиметров) состоял из крупного гравия или щебня, который особенно тщательно утрамбовывался в течение нескольких дней.

Более дешевые дороги состояли из каменной засыпки толщиной 13 сантиметров, перемешанного слоя грунта, известняка и песка толщиной 46 сантиметров, слоя уплотненного грунта толщиной около 46 сантиметров и верхнего слоя из булыжника и битого камня. Были и другие разновидности дорог. Так, в Лондоне сохранилась древнеримская дорога с толщиной дорожной одежды 230 см, сделанная полностью из бетона с покрытием из белых черепичных плит. Интересно, что вся бетонная масса дороги заключена между каменными подпорными стенками.

В римских дорогах была тщательно продуманная система дренажа, поэтому толстая масса бетона при отрицательных температурах не растрескивалась. Дорожное покрытие не имело температурных швов и было пригодным в основном для мягкого итальянского климата. В северных провинциях Римской империи уже можно было наблюдать трещинообразование, поэтому в более поздний период империи римляне почти прекратили строить дороги с применением бетона.

Трасса римских дорог размечалась с помощью двух параллельно натянутых веревок, которые определяли ее ширину. Прямолинейность обеспечивалась с помощью прибора "грома", хотя чаще для этой цели пользовались более простым, но эффективным способом - с помощью дыма от далеко расположенного костра и какой-либо промежуточной точки.

Так, например, римские дороги в Англии не отклонялись от своей оси более чем на 1/2-1/4 мили на каждые 20-30 миль длины. На строительство дорог стонялось большое количество рабов. Привлекались также воинские части и свободное население. Громадный объем каменных материалов добывался и перерабатывался вручную. При этом большие камни раскаляли на кострах, а затем обливали холодной водой.

Большинство римских дорог эксплуатировалось еще в XIX веке, а отдельные сохранились и до наших дней. Интересно, что римлянам был известен природный асфальт и даже в сочетании с песком и битым камнем, но они не использовали его для

одежды верхнего покрытия дорог.

Таким образом, можно отметить достаточно мощную и прочную одежду дорог Древнего Рима, составляющую от 0.8 до 1.3 метра, а в отдельных случаях до 2.4 метра. По современным понятиям дороги такого типа выполнены с чрезмерным запасом прочности. К примеру, дорожная одежда современных дорог такого типа для аналогичных климатических условий не превышает 60-70 см, включая морозозащитный слой и слой износа. Конструкция дорог, подобных Аппиевой, может быть применена для самых тяжелых эксплуатационных нагрузок нашего времени, порядка 15 т на ось автомобиля. Недаром эта одна из самых старейших дорог мира, построенная 2300 лет назад, эксплуатируется и поныне.

Римские дороги обладали рядом других достоинств: наличием в отдельных из них специального слоя износа из естественных камней; возможностью приготовления бетона непосредственно на месте работ; широким применением извести, которая ввиду большой растяжимости по сравнению с современным портландцементом дает бетоны повышенной трещиностойкости. И, конечно, одним из основных достоинств римских дорог является их большая долговечность, доказательством чего служит хорошее состояние отдельных из них в наше время. Например, ремонт римских дорог в Испании проводился только раз в 70 - 100 лет. Аппиева дорога, сохранившаяся до наших дней, и улица в Помпеи представлены на рисунке А.2.



Рис. А.2. Слева - Аппиева дорога, справа - улица в Помпеи

А.9.2 Водопроводы и акведуки

Акведуки - главное свидетельство величия Римской империи.

Фронтин

В эпитафии части, повествующей об акведуках, вынесено изречение крупного государственного деятеля Римской империи Секста Юлия Фронтина, жившего на рубеже первого и второго веков нашей эры. Юлий дважды был консулом, успешно воевал в Британии, а на склоне лет получил почетную и высокую должность водного смотрителя. Находясь на этом посту, он досконально изучает все технико-экономические аспекты строительства и эксплуатации акведуков и вводов и впоследствии пишет труд «Водопроводы города Рима», использовавшийся при строительстве оных вплоть до падения Римской и даже в последующие века.

Как и в Древней Греции, в Риме очень трепетно относились к воде. И, конечно же, столица империи нуждалась в большом количестве чистой пресной воды. Однако римляне не первыми изобрели водоводы и акведуки: еще в VII веке до нашей эры близ города Ниневии был построен большой водопровод длиной 40 километров. Для переброски его через долину реки был построен пяти пролетный мост - акведук, представлявший собой открытый канал, проложенный в искусственно сооруженном каменном ложе шириной около двух метров.

В Риме водопроводы начали строить, начиная с VI века до нашей эры. Первый большой водопровод соорудил Аппий Клавдий, известный строитель Аппиевой¹¹ дороги. Протяженность водопровода была 16,5 километров, а открыт он был в 312 году до нашей эры, в год открытия одноименной дороги. В 272 году до нашей эры был заложен второй в Риме водопровод, его протяженность достигала 79 километров. Третий водопровод построили в 144 году до нашей эры. Строительство этого водопровода считалось значительной вехой в республиканский период Римской истории. Особенно впечатляет в этом строении - акведук, поднявшийся почти на 60 метров над уровнем Тибра. Общая протяженность водопровода достигала 91 километра, из которой надземная часть составляла почти 12 километров. Суточный объем подаваемой воды составлял 200 тысяч кубических тонн. Заметим, что сложность водоснабжения города заключалась в том, что сам город располагался на семи холмах, окруженных равнинной территорией - Кампанией.

Во времена царствования Августа, во главе многих строительных работ был друг и зять императора полководец Марк Випсаний Агриппа, курировавший строительство самого красивого акведука Понт-дю-Гара, расположенного на юге Франции. Этот акведук соединял части водопровода Вирго (Virgo), доставлявшего воду к городу Ниму. Акведук, представляющий собой трехъярусную каменную аркаду, был построен над долиной реки Гордон. Строился из громадных тесанных блоков, массой до шести тонн, которые скреплялись без раствора, «насухо». Длина этого акведука 269 метров, а высота - 50 метров. Водовод, проходивший поверху акведука, был закрыт каменными плитами во избежание засорения воды. Также имя Агриппа известно тем, что он создал организацию, называемую «водяной командой», впоследствии «водяное ведомство», отвечающее за все стадии доставки воды в города. Ведомство содержало в своем штате много специалистов и следило за водонапорными башнями,

¹¹ В Римской империи все крупные сооружения называли по именам своих строителей, точнее, людей, финансировавших это строительство. Ими зачастую являлись крупные государственные деятели, а нередко консулы и сами императоры.

водохранилищами, водопроводами и акведуками. Часть несла службу за городом для обеспечения быстрых ремонтных работ, часть дежурила у фонтанов и водонапорных башен.

Последний римский каменный акведук был построен во времена Клавдия в 41 - 45 году. Впоследствии акведуки строились только из бетона и кирпича. Так как в городах требовалась разводка воды, водопроводы вблизи и внутри городов располагались над землей. Крупнейшей аркадой акведука была аркада Палантинского ветвления, высотой 20 метров. Она состояла более чем из двухсот арок, пролетом около восьми метров с толщиной опорных столбов до двух с половиной метров. Почти вся она была сделана из бетона. Развод воды по домам горожан осуществлялся с помощью керамических и свинцовых труб, имевших четкую стандартизацию по размерам. Днища и стены каналов водоводов были сделаны из бетона со слоем штукатурки или каменными, а крыша из плоских каменных плит, уложенных плашмя, или двухскатная. А со времен Нерона крыша делалась бетонной и цилиндрической. Размеры канала делались такими, чтобы человек, не нагибаясь, мог пройти по каналу - высотой 1.5 - 3 метра, а шириной 0.6 - 1.2 метра.

Стоит отметить, что римлянами разработали бетонные трубы, имевшие квадратное внешнее сечение с размером сторон - 21 сантиметр и круглое отверстие диаметром 6 - 8 сантиметров. Трубы изготавливались в виде отдельных звеньев длиной около метра, а соединялись они стык в стык раствором и бетоном.

Всего в Риме в лучшие времена было одиннадцать водопроводов общей протяженностью пятьсот километров. Потребление воды составляло около 560 тысяч кубометров в день, т.е. около пятисот литров воды на человека. Рим был самым обеспеченным водой городом мира. Фотографии сохранившихся римских акведуков представлены на рисунке А.3.



Рис. А.3. Слева - акведук Пон-де-Гард, Франция, справа - римский акведук в Сеговии

А.9.3 Бани - термы

Основными потребителями воды в городах были фонтаны, канализационные системы, цистерны-хранилища и, конечно же, бани-термы. Термы в Древнем Риме были

неотъемлемой частью светской жизни, в них богатые римляне проводили до половины своего дня, переходя из залы в залу, из парной в массажную, из массажной в залы с бассейнами, затем в прохладные залы и т.д. При хозяине обычно был раб-банщик - бальнеатор. Наряду с общественными банями были и частные.

Нашим современникам, сложно вообразить тот размах, с которым строились бани-термы во времена римского господства. То, что называется общественными банями сегодня, даже отдаленно не напоминает римские общественные бани. Римские термы были величественными произведениями строительного искусства, комплексы бань занимали огромные пространства и поражали своим изяществом. Обогрев помещения производился с помощью подпольных печей. Воздух, нагреваемый печами, направлялся под перекрытия пола или по кирпичам с полостями для обогрева стен.

Именно при строительстве терм наибольшее распространение получил бетонный купол, достигавший порой в диаметре тридцати метров. Самыми известными и впечатляющими сооружениями являлись комплексы терм императоров Каракаллы и Диоклетиана (рисунок А.4).



Рис. А.4. Реконструкция терм Каракаллы (слева), Диоклетиана (справа)

Стоит отметить и знаменитую римскую канализацию, равной которой не было вплоть до середины XIX века! А каналы канализации изготовлялись зачастую из бетонных блоков. А общественные туалеты Древнего Рима украшались мрамором и скульптурами богов, сиденья выполнялись также мраморными с фигурными подлокотниками и часто с фигурой богини Фортуны над сиденьем. Это были заведения, где люди встречались, обменивались информацией и приглашениями на обеды. Некоторые археологи, находя такие сооружения, путали их с храмами.

Древний Рим славится не только своими храмами и дворцами, но и портами, мостами, гаванями и тоннелями. Масштабы строительства некоторых подобных сооружений были достигнуты только во второй половине XIX века! А вместе с падением Великой Римской империи перестали строиться дороги и инженерные сооружения на многие века.

После распада Римской империи возник дефицит рабочей силы, а вдобавок кустарно-ремесленный способ ведения хозяйства в средние века привели к тому, что бетон практически вышел из употребления и был почти забыт вплоть до XVIII века. Также этому способствовала отмена рабства. Безусловно, только рабы занимались дроблением камней, замесом раствора, уплотнением бетона. Трудоемкость этих процессов

“заморозило” производство бетона в свободном обществе вплоть до создания техники, способной помочь человеку решить технологические трудности изготовления бетона.

Нет сомнений в том, что основным фактором широкого распространения римского бетона был политико-экономический строй римского государства. Но не стоит забывать и о технических достижениях древних римлян, сыгравших тоже немаловажную роль. Это открытие особых свойств пуццолановых добавок, применение только чистых составляющих вместо грунта в составе вяжущего, понимание важность обеспечения хорошего уплотнения бетона, которому римляне уделяли особое внимание и не жалели времени и рабов. Во II веке римлянами были разработаны новые вяжущие материалы типа романцемента, позволившие сильно улучшить физико-механические свойства получаемого бетона. Также важно отметить обязательный контроль качества всех компонентов при получении и приемке всех компонентов входящих в состав бетона, а также строгое следование методике.

До недавнего времени считалось, что римляне не применяли железную арматуру в бетоне. В одной из книг Ветрувия есть упоминания о добавлении ивы и тростниковых побегов при строительстве небольших сводов, но не более того. Но недавно на территории Австрии, неподалеку от города Клагенфурта - бывшей римской провинции Норикум - обнаружены в бетонном перекрытии свода отопительного канала вкладыши полосового железа шириной 2 - 3 сантиметра и толщиной 4 - 6 миллиметров. Сооружение датируется 15 годом нашей эры. Арматура, в виде сплетенных сеток, обнаружена в одном из перекрытий в термах Траяна в Риме. Но это были только эпизодические случаи применения железобетона. Вызвано это было, вероятно, труднодоступностью и дороговизной металла, а также техническими трудностями изготовления и недостаточным качеством раствора, плохо прилипавшего к металлу. Можно констатировать, что железобетон не получил массового применения во времена римской империи, так же как и асфальтобетон.

А.10 История бетона в Новое время

Итак, опус цементум был забыт на многие века. Но остались римские строения, дороги, мосты и акведуки, а также двенадцать книг Ветрувия по всем аспектам создания и применения бетона. Где же вновь возникает бетон? Как он применяется? Что меняется? Отметим основные вехи в дальнейшей истории развития бетона. В XIII веке вновь начинается использование бетона, правда эпизодическое. Качество раствора сильно ухудшается, секреты гашения извести, и производства водоупорного бетона с пуццолановыми добавками теряется. В 1414 году в одном из швейцарских монастырей были найдены книги Витрувия. В 1499 году Фра Джованни Джиокондо (Fra Giovanni Giocondo) применяет пуццолановый раствор в опорах моста Парижской Богоматери в Париже - это первый известный случай использования бетона в масштабном строительстве со времен падения Римской империи. В 1678 году Джозеф Моксон (Joseph Moxon) пишет в своих трудах о “скрытом огне” в извести, являющемся причиной ее разогрев при добавлении воды. В 1774 Джон Смитон (John Smeaton) открывает известный факт того, что негашеная известь в композиции с другими материалами дает при гашении и последующей кристаллизации очень твердый и прочный материал.

В 1779 году Бри Хиггинс (Bru Higgins) получает первый патент на гидравлический цемент, штукатурку для наружных работ, а в 1780 году пишет работу под названием “Эксперименты и наблюдения направленные на улучшение процессов приготовления и использования гидравлического цемента и приготовления извести”. В 1793 году Смитон доказывает известный еще римлянам факт: добавление обожженной глины в негашеную известь, дает раствор, упрочняющийся в воде. Он использует этот раствор для при перестройке Маяка в английском городе Корнвэле, а в последствие пишет книгу по созданию и использованию подобных материалов. В 1796 Джеймс Паркер (James Parker) получает патент на настоящий гидравлический цемент, получаемый при обжиге известняка содержащего глиняные частицы - романцемент, иногда называемый цемент Паркера. В 1800 году Вильям Ессоп (William Jessop) использует бетон при масштабном строительстве Западно-Индийского дока в Великобритании. Не уступающая Англии Франция начинает использовать романцемент в 1802 году. Через десять лет, в 1812-1813 годах французский инженер Льюис Викат (Louis Vicat) изготавливает искусственный романцемент, приготавливая смесь из обожженной глины и негашеной извести. Выдается много патентов на романцемент: Эдгар Добс - 1810, Морис Сан Легер из США - 1818, Джон Тикел и Абрам Чемберс - 1820. Еще несколько исследователей в Англии получают искусственно романцемент и называют его британский цемент.

В 1824 году английский каменщик Джозеф Аспдин (Joseph Aspdin) изготавливает и патентует первый портландцемент, как смесь известковой пыли и глины в печи высокой температуры. А назвал его так изобретатель, потому что готовый цемент был так же хорош, как камень, добываемый к английских каменоломнях в Портланде. Портландцемент - наиболее часто используемое вяжущее в наши дни. В 1825-1830 годах в США и Канаде строятся несколько заводов по производству бетона. А в 1828 году впервые используется портландцемент в инженерных целях - И. Бруннел (I. Brunnel) заделывает пробоину в тоннеле через Темзу. А в 1830 году в Нью-Йорке строятся первые здания с монолитными стенами с применением аналогичного портландцементу цемента.

Годом начала эры портландцемента считается 1860 год. Ведутся исследования по спеканию портландцемента, до образования клинкера¹².

А в 1867 году Джозеф Монье (Joseph Monier) из Франции и Вильям Ванд (William Wand) из США выдвигают идею о создании бетонных балок, армированных металлом. По некоторым источникам эту идею выдвинул Жозеф-Луис Ламбо (Joseph Louis Lambo) и даже построил судно, используя армированный бетон, в 1848 году. А в 1889 году уже строится первый мост из армированного бетона. В то же время появляются заводы, производящие портландцемент. Повсеместно появляются и патентуются вращающиеся печи для обжига. В Шотландии строится бетонная дорога с очень хорошим покрытием, но через некоторое время разрушается из-за изменения температуры.

Французский химик Анри лэ Шателье (Henri Le Chatelier) на основе разделения окисей кальция на группы разрабатывает теорию правильного дозирования извести при производстве портландцемента. Разным группам он присваивает новые назва-

¹²Цементный клинкер, здесь полупродукт, получаемый в виде гранул при обжиге тонкоизмельченной смеси известняка с глиной.

ния: Алит (силикат трикальция), Билит (силикат двукальция), Селит (алюминоферрит тетракальция). Он же впервые выдвигает гипотезу, что твердение цемента связано с образованием кристаллов вследствие реакции цемента с водой. В США для замедления процессов застывания в портландцемент стали добавлять гипс.

Томас Эдисон тоже вписал свое имя в историю развития бетона, построив несколько дешевых и уютных бетонных домов в Нью-Джерси, 11 бетонных кораблей и запатентовав вращающуюся печь для обжига - карусельную печь. В строительстве все с большим размахом используется бетон и армированный бетон, например Огюст Перре (August Perret) в 1902 году построил жилой дом, нагрузка в котором распределялась не на стены, а на колонны, балки и плиты, сделанные из железобетона. Конструкция здания в значительной мере повлияло на судьбу железобетона, ускорив темпы его применения в градостроительстве.

В Риме, прародителе современного бетона, в 1911 году строится железобетонный мост Рисорджименто пролет которого превышает 100 метров. В 1914 году завершается строительство Панамского канала. При строительстве шлюзов используется железобетон, причем дно шлюзов имеет толщину двадцать футов (около 6 метров), а стенки - до 60 футов (около 18 метров) у основания. Применение железобетона при строительстве столь масштабного гидросооружения дает толчок к строительству дамб и гидроэлектростанций из этого материала.

В начале XX стандартизируются тесты для измерения физико-механических свойств бетона и создаются первые объединения, такие как РСА (Portland Cement Association - 1916 год). Тогда же Стефан Стефаниан из Колумбии патентует первый грузовик - бетономешалку. Все более быстрыми темпами внедряется бетон в строительство, патентуются различные устройства, бетономешательные машины. Во Франции разрабатывается предварительно напряженный бетон (Eugene Freyssinet - 1927). Строятся огромные параболические баракы для самолетов в Орли (Франция), известное на весь мир здание оперы в Сиднее, самая высокая телебашня (553 метра, Торонто, Канада) и самое высоко здание в мире - Sears Tower Place (527 метров, Чикаго, США). Строятся первые крупные дамбы. Уже в 1954 изобретается и начинает использоваться скользящая опалубка.

Новая эра в развитии бетона наступает с введения волокнисто армированных бетонов в 1970 году. Через десять лет изобретается пластификатор для бетона. А в 1985 году частицы диоксида кремния вводятся в цемент, что заменяет пуццолановые добавки. Во Франции строится виадук Мийо (рис. А.5 - А.6) длиной 2460 метров, стоящий на семи бетонных опорах, высота самой высокой 334 метра! А по всему миру строятся огромные небоскребы из железобетона, которые стоят и будут стоять еще многие века!



Рис. А.5. Владук Мийо, Франция



Рис. А.6. Владук Мийо, Франция

Приложение В

Техника безопасности

Данная магистерская работа выполнялась с использованием персонального компьютера (ПК). На ПК производилась разработка и тестирование программного кода, работа с другими программными продуктами для произведения численных расчетов, а также набор текста диплома. На человека, работающего с ПК, в наибольшей степени влияют следующие факторы:

- психофизиологические факторы
- микроклиматические условия
- освещенность рабочего места
- уровень шума на рабочем месте
- электробезопасность
- пожарная безопасность

В.1 Учет психофизиологических факторов

В комплексе мероприятий по совершенствованию организации труда важная роль отводится внедрению научно-обоснованных режимов труда и отдыха, улучшению условий труда. Основная цель рационального труда и отдыха поддержание работоспособности на оптимальном уровне. Необходимость чередования труда и отдыха обусловлена физиологическими закономерностями и играет большую роль в поддержании трудового ритма. Работоспособность работника в течение рабочего дня не является величиной стабильной. Основные фазы работоспособности:

- выработка и нарастающая работоспособность
- высокая, устойчивая работоспособность
- падение работоспособности в результате развивающегося утомления.

Оптимальный режим труда и отдыха должен включать паузы. При благоприятных условиях труда высокий уровень работоспособности составляет не менее 75%

рабочего времени. Период выработки составляет не более 40 минут, а восстановительный период не более 10-15 минут. Наибольшая работоспособность инженерно-технических работников наблюдается с 10 до 12 и с 16 до 18 часов. Рекомендуется делать перерывы по 8-10 минут каждые 2 часа в первой половине дня и 5-8 минут через каждый час во второй половине дня.

В.2 Требования к микроклиматическим условиям

К микроклиматическим условиям рабочего места относятся: температура, относительная влажность, скорость движения воздуха на рабочем месте, атмосферное давление. Данный вид деятельности относится к категории Ia, к которой относятся работы с интенсивностью энергозатрат до 120 ккал/ч (до 139 Вт), производимые сидя и сопровождающиеся незначительным физическим напряжением. В помещении ВЦ эти характеристики должны соответствовать нормам ГОСТ 12.1.005-88 и СНиП 2.04.95-91: СанПиН 2.2.4.548-96 “Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений”:

- температура окружающей среды 22 - 24 °С в холодное время года и 23 - 25 °С в теплый период года (повышение или понижение температуры воздуха на 10-12 °С приводят к понижению работоспособности на 15)
- относительная влажность воздуха 40 - 60 %
- скорость движения воздуха не более 0.1 м/с
- интенсивность теплового облучения не более 70 Вт/м² при размерах облучаемой поверхности 25-50 % от поверхности тела
- воздух должен содержать не более 0.3% углекислоты и 0.01% угарного газа

Для обеспечения установленных норм метеорологических параметров и частоты воздуха в лаборатории вычислительной техники применяется как обще-обменная искусственная, так и естественная вентиляция.

В.3 Требования к освещённости

Важным фактором для предупреждения зрительного и общего утомления является правильная освещенность рабочего места. Поэтому необходимо соблюдать действующие нормы освещенности рабочих помещений - освещенность в помещении должна соответствовать СНиП 23-05-95 “Естественное и искусственное освещение” и СанПиН 2.2.1/2.1.1.1278-03 “Гигиенические требования к естественному, искусственному и совмещенному освещению жилых и общественных зданий”. Согласно нормам, освещение в помещениях с ПК должно быть смешанным: естественным (за счет солнечного света) и искусственным. Рекомендуется:

- Обеспечить постоянство освещенности в пространстве и во времени, для чего источники света должны быть закреплены (можно использовать поворачивающиеся передвижные лампы), а колебания напряжения сети должны находиться в пределах санитарной нормы 220 ± 5 В.
- Свет должен падать слева. Рекомендуемая мощность ламп 50-70 Вт.
- Освещенность на поверхности стола в зоне размещения рабочего документа, согласно СанПиН должна быть 300-500 лк. Освещение не должно создавать бликов на поверхности экрана. Освещенность поверхности экрана не должна быть более 300 лк.
- Стены, оборудование, мебель должны иметь матовое покрытие с коэффициентом отражения 0,7-0,8 от потолка и более низким от стен и пола (0,6 и 0,3 соответственно). Этого достигается с помощью окраски потолка в белый цвет, а стен - в светло-желтые и оранжево-желтые цвета.
- Отношение яркости между рабочими поверхностями не должно превышать 3:1-5:1, а между рабочими поверхностями и поверхностями стен и оборудования 10:1.
- Обеспечить отсутствие “ослепления”, что достигается изъятием из поля зрения блестящих поверхностей, а также увеличением высоты подвеса светильников, выбором светильников с рассеянным светом.

В.4 Требования к уровню шума

В соответствии с ГОСТ 12.1.003-83 допустимый уровень шума на рабочем месте 50 дБ. Также уровень шума на рабочем месте регулируется СН 2.2.4/2.1.8.562-96. Источниками шума в ВЦ являются:

- печатающие устройства
- множительная техника
- серверы
- электромеханические вентиляторы охлаждения
- трансформаторы

При сверхнормативном уровне шума рассеивается и притупляется внимание работников, на 10-15% снижается производительность труда, растет число профессиональных заболеваний. Нормируемые уровни шума обеспечиваются путем использования малошумного оборудования, применения звукопоглощающих материалов для внутренней облицовки помещений, а также различных звукопоглощающих устройств (перегородки, кожухи, прокладки и т. д.). Находящееся рядом с рабочим местом другое оборудование, являющееся источником шума, должно быть перенесено в другое помещение.

В.5 Требования электробезопасности

Электробезопасность должна обеспечиваться: конструкцией электроустановок, техническими способами и средствами защиты, организационными и техническими мероприятиями. Электроустановки и их части должны быть выполнены таким образом, чтобы работающие не подвергались опасным и вредным воздействиям электрического тока и электромагнитных полей, и соответствовать требованиям электробезопасности. Для питания ПК служит трехфазная сеть напряжения 220/380 В и частотой 50 Гц. Техническими мероприятиями по обеспечению электробезопасности персонала являются защитное заземление и зануление (ГОСТ 12.1.019-79 “Общие требования электробезопасности” и ГОСТ 12.1.030-81). ГОСТ 12.1.030-81 распространяется на защитное заземление и зануление электроустановок постоянного тока частотой до 400 Гц, которые необходимо применять:

- при номинальном напряжении 380В и выше переменного тока, 400В и выше постоянного тока во всех случаях
- при 40-380 В переменного тока и 110-440В постоянного тока - в условиях повышенной опасности.

Для защиты от поражения электрическим током согласно ГОСТ 12.1.019-79 служат:

- защитные оболочки
- защитные ограждения (временные или стационарные)
- безопасное расположение токоведущих частей и их изоляция
- изоляция рабочего места
- использование малых напряжений
- защитное отключение электроустановки
- предупредительная сигнализация, блокировка системы в случае неисправности

В.6 Требования пожарной безопасности

Согласно ГОСТ 12.1.004-91 существуют следующие опасные факторы:

- пламя и искры
- повышенная температура окружающей среды
- токсичные продукты горения и термического разложения
- пониженная концентрация кислорода

Противопожарная защита обеспечивается следующими мерами:

- Применение средств пожаротушения, установка сигнализации и устройств тушения, ограничивающих распространение пожара, мероприятия по эвакуации людей, наличие средств индивидуальной защиты и средств противодымной защиты.
- Наличие противопожарных перегородок и отсеков, устройств автоматического отключения систем.
- Планировка эвакуационных путей и выходов.
- Оповещение людей.
- Технические средства для эвакуации и спасении людей.
- Наличие огнетушащих средств.

Не допускается размещение складских помещений, а также пожаро- и взрывоопасных производств над и под залами ЭВМ, а также в смежных с ними помещениях. Система вентиляции ВЦ оборудуется устройством, обеспечивающим автоматическое отключение при пожаре, а также огне-, дымо- задерживающими устройствами. Подача воздуха к ЭВМ для охлаждения осуществляется по самостоятельному воздуховоду. Присоединение этих воздуховодов к общему контролеру допускается только после огне- дымо- задерживающих клапанов. Система электропитания ЭВМ должна иметь блокировку, обеспечивающую отключение в случае останова системы кондиционирования и охлаждения. Промывка ячеек и других съемных устройств горючими жидкостями допускается только в специальных помещениях, оборудованных приточно-вытяжной вентиляцией. В здании ВЦ предусматривается автоматическая пожарная сигнализация. В залах ЭВМ: за подвесными полками, в хранилищах информации, кладовых запасного оборудования необходимо устанавливать извещатели, реагирующие на дым. Во всех других помещениях ВЦ допускаются типовые пожарные извещатели. На случай пожаров ВЦ оборудуются автоматическими установками объемного (газового) тушения с выходом огнегасительного вещества в кабельные каналы и потоки. В здании ВЦ и в машинном зале должно быть не менее двух эвакуационных выходов. Проходы в помещениях, коридоры и рабочие места не следует загромождать различными предметами, особенно огнеопасными.