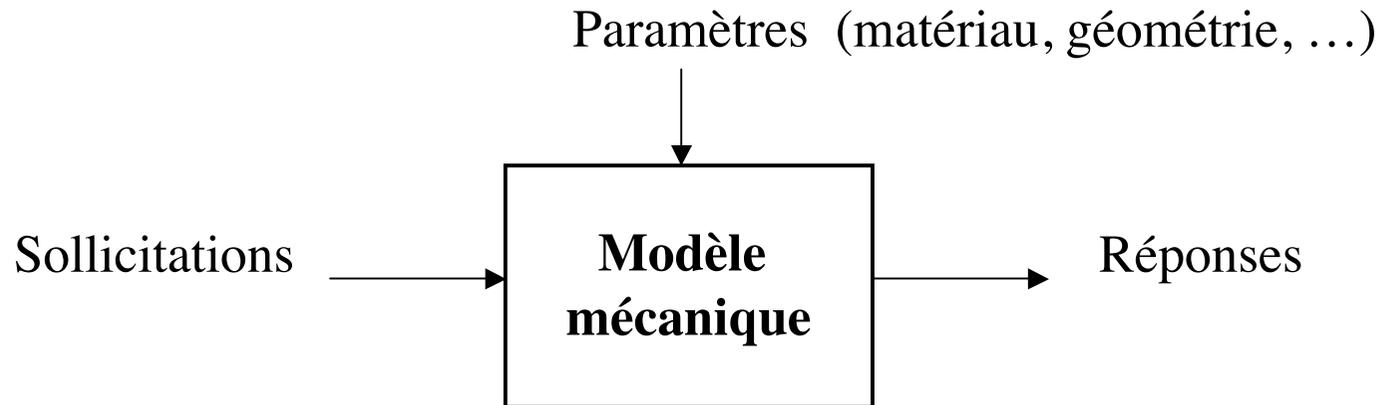


**Sur le paradoxe de l'efficacité d'une
approche multidimensionnelle
pour
la simplification des modèles en mécanique des matériaux**



D. Ryckelynck

D. M. Benziane, Y. Bienvenu, J. Besson, G. Cailletaud, S. Cantournet, S. Cartel, V. Courtier,
F. Daim, F. Feyel, A. Kaabi, A. Musienko, B. Sarbandi, F. Vincent



Comment exploiter une représentation à variables séparées pour des équations inséparables?

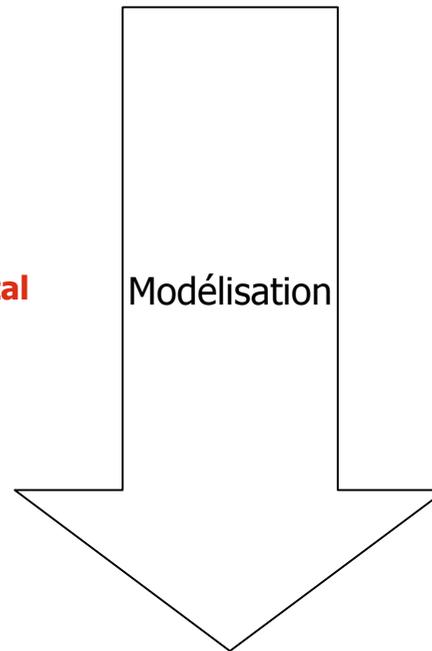
Nous proposons une méthode comparable à une recherche d'une solution symétrique.

Remarque liminaire sur la difficulté de décrire l'état des milieux continus.

Etapas de la modélisation en mécanique

Mécanique des systèmes discrets

- Paramétrage de la géométrie
- **Paramétrage de l'état du système**
- Description des liaisons ou des énergies
- Choix du système mécanique isolé
- **Formulation du principe fondamental**
- Résolution
- Analyse des résultats



Mécanique des milieux continus

- **Description de tous les états admissibles**
- **Formulation du principe fondamental**
- Description des relations de comportement et des liaisons
- Choix du système mécanique isolé
- Paramétrage de la géométrie
- **Paramétrage de l'état du système**
- Résolution
- Analyse des résultats

Le paramétrage de l'état est l'étape ultime de la formulation des équations.
L'intuition du mécanicien est complétée par des outils mathématiques et algorithmiques très élaborés.

Plan de l'exposé

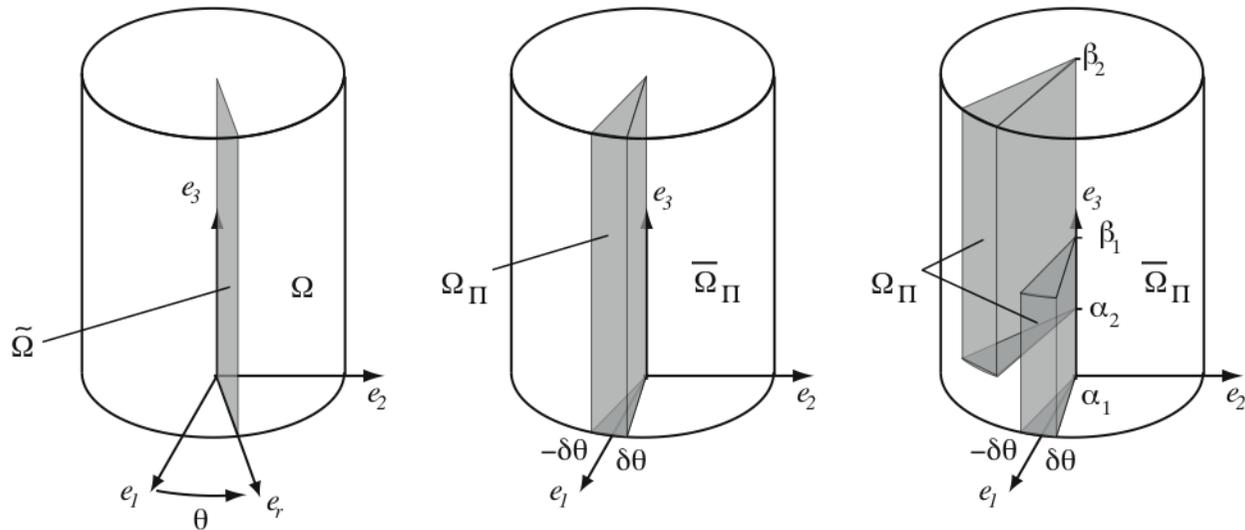
- Formulation à intégration restreinte de problèmes symétriques
- Postulat pour une intégration restreinte par la méthode d'hyper-réduction
- Méthode de construction d'un domaine d'intégration restreinte
- Approximation à variables séparées pour les équations inséparables
- Construction incrémentale d'une représentation à variables séparées
- Analyse séquentielle de modèles paramétriques
- Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques
à un niveau de séparation
- Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques
à deux niveaux de séparation

Formulation à intégration restreinte de problèmes symétriques

Symmetry and separation of variables for the Helmotz and Laplace equations [Boyer et al. 1977]

Séparation de variables [L'Hôpital 1750] (<http://mathworld.wolfram.com>)

Définir un domaine d'intégration restreinte en introduisant des fonctions tests tronquées dans les puissances virtuelles.



Cas d'une intégration restreinte à un domaine non connexe.

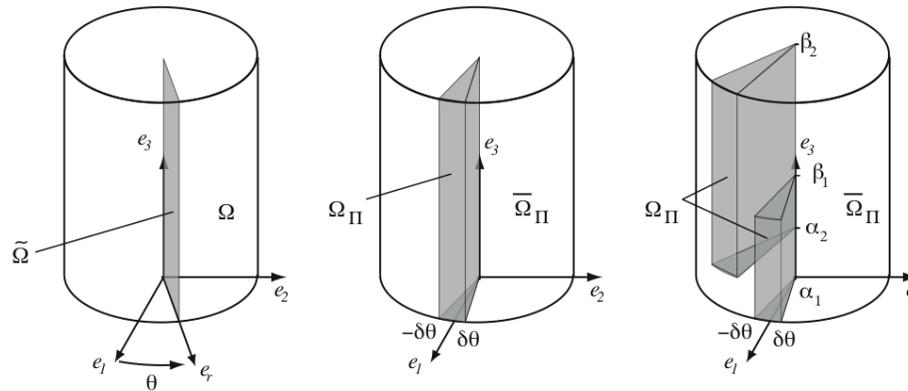
Exemple d'état symétrique

$$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_c \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \right\}$$

Cas élastique linéaire avec précontrainte.

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}_c}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \theta} = 0$$

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) \in \tilde{\mathcal{U}}$$



$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \right\}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\mathcal{P}_i = -2 \Pi \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \left(\underline{\mathbf{B}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}) \right) d\tilde{\Omega}$$

$$\mathcal{P}_e = 2 \Pi \int_{\partial_f \tilde{\Omega}} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} d\tilde{\Gamma}$$

$$\mathcal{V}_\Pi = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \times [0, 2 \Pi] \cup \bar{\Omega}_\Pi \right\}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_\Pi$$

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega_\Pi} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \left(\underline{\mathbf{B}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}) \right) d\Omega$$

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial_f \Omega_\Pi} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} d\Gamma$$

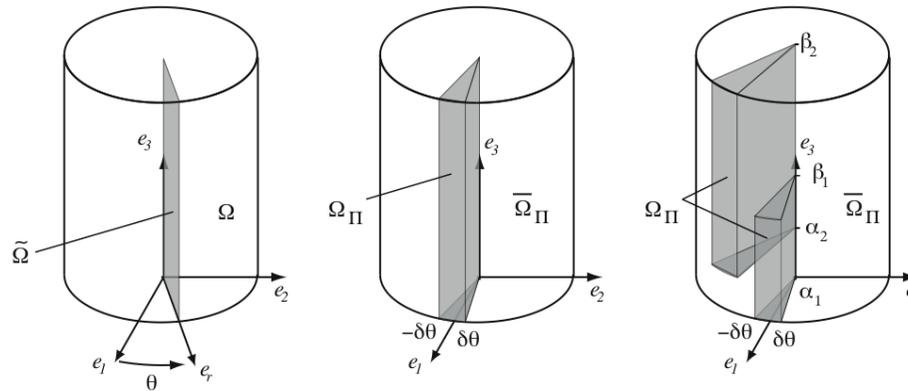
Exemple d'état symétrique

$$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_c \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \right\}$$

Cas élastique linéaire avec précontrainte.

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}_c}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \theta} = 0$$

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) \in \tilde{\mathcal{U}}$$



$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \right\}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\mathcal{P}_i = -2 \Pi \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) : (\underline{\mathbf{B}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}})) d\tilde{\Omega}$$

$$\mathcal{P}_e = 2 \Pi \int_{\partial_f \tilde{\Omega}} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} d\tilde{\Gamma}$$

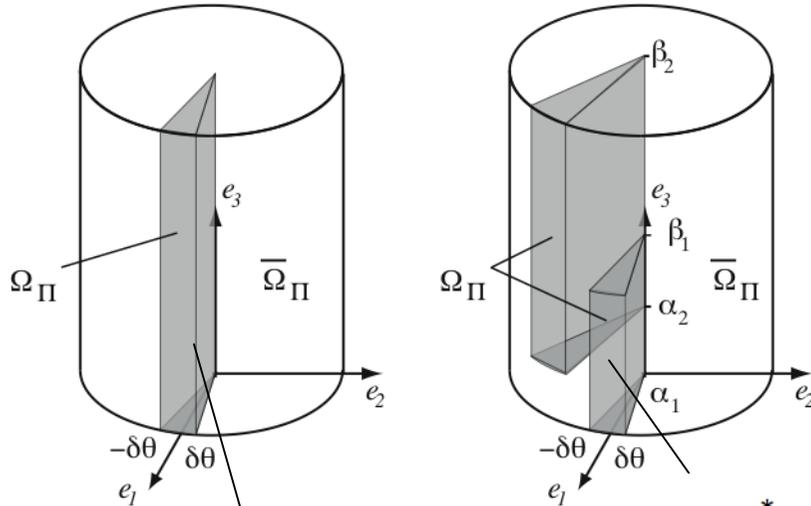
$$\mathcal{V}_\Pi = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \times [0, 2 \Pi] \cup \bar{\Omega}_\Pi \right\}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_\Pi$$

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega_\Pi} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) : (\underline{\mathbf{B}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}})) d\Omega$$

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial_f \Omega_\Pi} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} d\Gamma$$

Intégration restreinte,
sans modification du schéma d'intégration.



Intégration restreinte
en introduisant des fonctions tests tronquées:
méthode d'hyper-réduction

$$\underline{\mathbf{u}}^* = (\Lambda(\theta) h(z) + \Lambda(\theta + \Delta\theta) (1 - h(z))) \underline{\mathbf{v}}^* \quad \underline{\mathbf{v}}^* \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* = \Lambda(\theta) \underline{\mathbf{v}}^* \quad \underline{\mathbf{v}}^* \in \tilde{\mathcal{V}} \quad \Lambda(\theta) = 0 \text{ sur } [-\Pi, -\delta\theta] \cup [\delta\theta, \Pi]$$

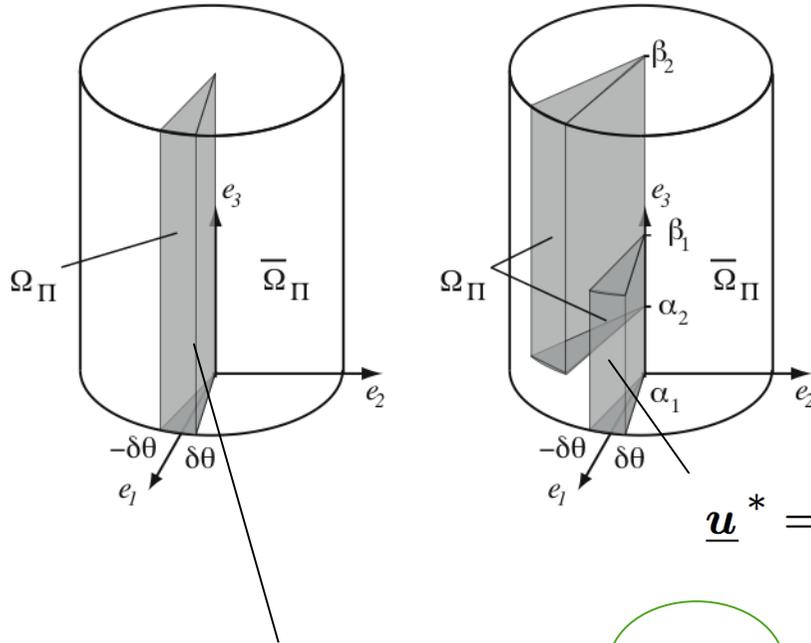
$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \Lambda(\theta) \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{v}}^*) + \Lambda'(\theta) \hat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^*$$

$$\mathcal{P}_e = \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda(\theta) d\theta \int_{\partial_f \tilde{\Omega}} \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} d\Gamma$$

$$-\mathcal{P}_i = \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda(\theta) d\theta \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{v}}^*) : \left(\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{K}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) \right) d\Omega +$$

$$\int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda'(\theta) d\theta \int_{\tilde{\Omega}} \hat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^* : \left(\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{K}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) \right) d\Omega$$

Formulation de type Petrov-Galerkin



Intégration restreinte
en introduisant des fonctions tests tronquées:
méthode d'hyper-réduction

$$\underline{u}^* = (g(\theta) h(z) + g(\theta + \Delta\theta) (1 - h(z))) \underline{v}^* \quad \underline{v}^* \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\underline{u}^* = \Lambda(\theta) \underline{v}^* \quad \underline{v}^* \in \tilde{\mathcal{V}} \quad \Lambda(\theta) = 0 \text{ sur } [-\Pi, -\delta\theta] \cup [\delta\theta, \Pi]$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) = \Lambda(\theta) \underline{\varepsilon}(\underline{v}^*) + \Lambda'(\theta) \underline{\widehat{\varepsilon}}^*$$

$$\mathcal{P}_e = \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda(\theta) d\theta \int_{\partial_f \tilde{\Omega}} \underline{v}^* \cdot \underline{f} d\Gamma$$

$$-\mathcal{P}_i = \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda(\theta) d\theta \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\varepsilon}(\underline{v}^*) : (\underline{B} + \underline{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})) d\Omega +$$

$$\int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \Lambda'(\theta) d\theta \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\widehat{\varepsilon}}^* : (\underline{B} + \underline{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})) d\Omega$$

= 0

Formulation équivalente à la formulation classique.

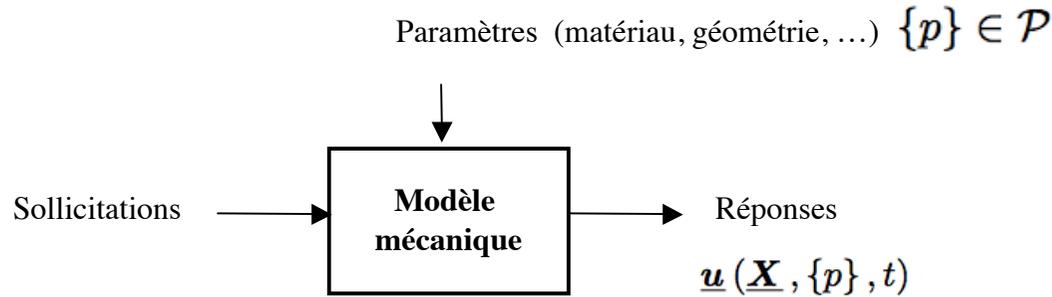
Postulat pour l'intégration restreinte par la méthode d'hyper-réduction

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) \in \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} &= \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \tilde{\Omega} \right\} \\ \exists \Lambda \in C_0(\Omega) \quad | \quad \mathcal{V}_\Pi &= \left\{ \underline{\mathbf{u}}^* = \Lambda \underline{\mathbf{v}}^* \in H^1(\Omega) \mid \underline{\mathbf{v}}^* \in \tilde{\mathcal{U}}, \Lambda = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}_\Pi \right\} \\ \text{avec } \underline{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{U}} &\rightarrow \frac{\langle \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}} \rangle}{\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_\Pi} \text{ bijective} \\ \text{pour } \underline{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{U}} &\rightarrow \frac{\langle \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}} \rangle}{\underline{\mathbf{u}}^* \in \tilde{\mathcal{U}}} \text{ bijective} \end{aligned}$$

En pratique $\Lambda = 1$ dans Ω_Π sauf au voisinage du bord de $\overline{\Omega}_\Pi$.
C'est une fonction bulle de support Ω_Π .

Comme pour exploiter la symétrie d'un problème, nous cherchons le sous-espace auquel appartiennent les états admissibles et nous cherchons un domaine restreint pour l'intégration des équations.

Postulat pour l'intégration restreinte des modèles paramétriques

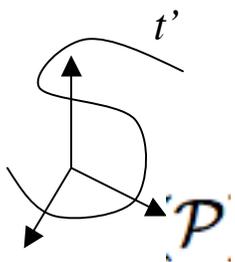


Approche séquentielle avec un parcours linéique de l'espace des paramètres

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \underline{u}(\underline{X}, t') \in \mathcal{U} = \{ \underline{u} \in H^1(\Omega) \mid \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \}$$

$$t' = (\{p\}, t)$$

$$\exists \Lambda \in C_0(\Omega) \quad | \quad \mathcal{V}_\Pi = \{ \underline{u}^* = \Lambda \underline{v}^* \mid \underline{v}^* \in \mathcal{U}, \Lambda = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}_\Pi \}$$

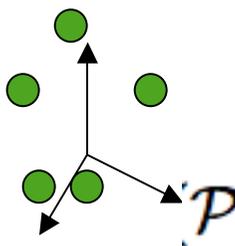


Approche multidimensionnelle pour une simulation simultanée d'un ensemble de cas

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, \cdot) = \underline{u}(\underline{X}', \cdot) \in \mathcal{U} = \{ \underline{u} \in L^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega)) \mid \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \}$$

$$\underline{X}' = (\underline{X}, \{p\})$$

$$\exists \Lambda \in C_0(\Omega \times \mathcal{P}) \quad | \quad \mathcal{V}_\Pi = \{ \underline{u}^* = \Lambda \underline{v}^* \mid \underline{v}^* \in \mathcal{U}, \Lambda = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}'_\Pi \subset \Omega \times \mathcal{P} \}$$

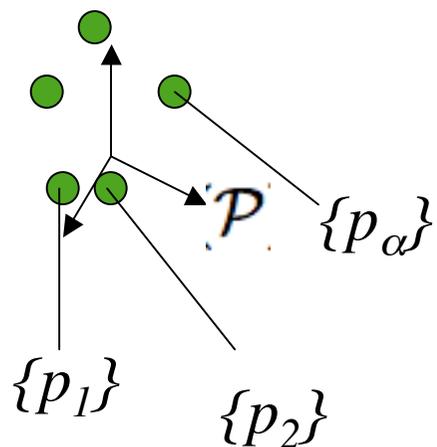


Approche multidimensionnelle pour une simulation simultanée d'un ensemble de cas

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, \cdot) = \underline{u}(\underline{X}', \cdot) \in \mathcal{U} = \{ \underline{u} \in L^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega)) \mid \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \}$$

$$\underline{X}' = (\underline{X}, \{p\})$$

$$\exists \Lambda \in C_0(\Omega \times \mathcal{P}) \mid \mathcal{V}_\Pi = \{ \underline{u}^* = \Lambda \underline{v}^* \mid \underline{v}^* \in \mathcal{U}, \Lambda = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}'_\Pi \subset \Omega \times \mathcal{P} \}$$

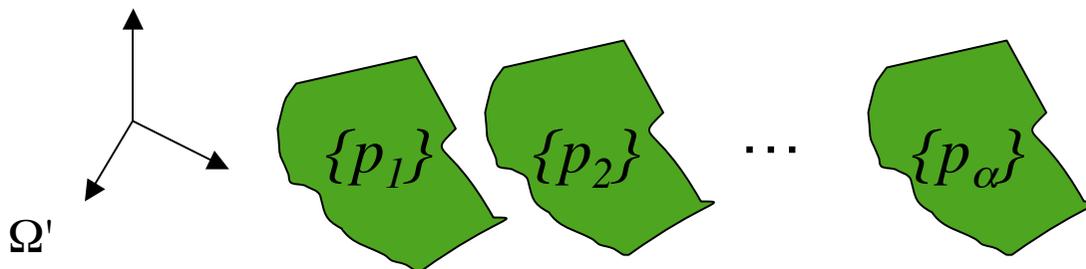


Point de vue:

Ce qui compte en mécanique des matériaux, c'est le caractère **synchrone** ou asynchrone des transformations. La position relative des cas de simulation dans l'espace $\Omega \times P$ n'a pas d'influence dans le cadre des problèmes traités.

Nous proposons donc d'exploiter, pour les modèles de simulation simultanée, un espace euclidien virtuel de dimension 3.

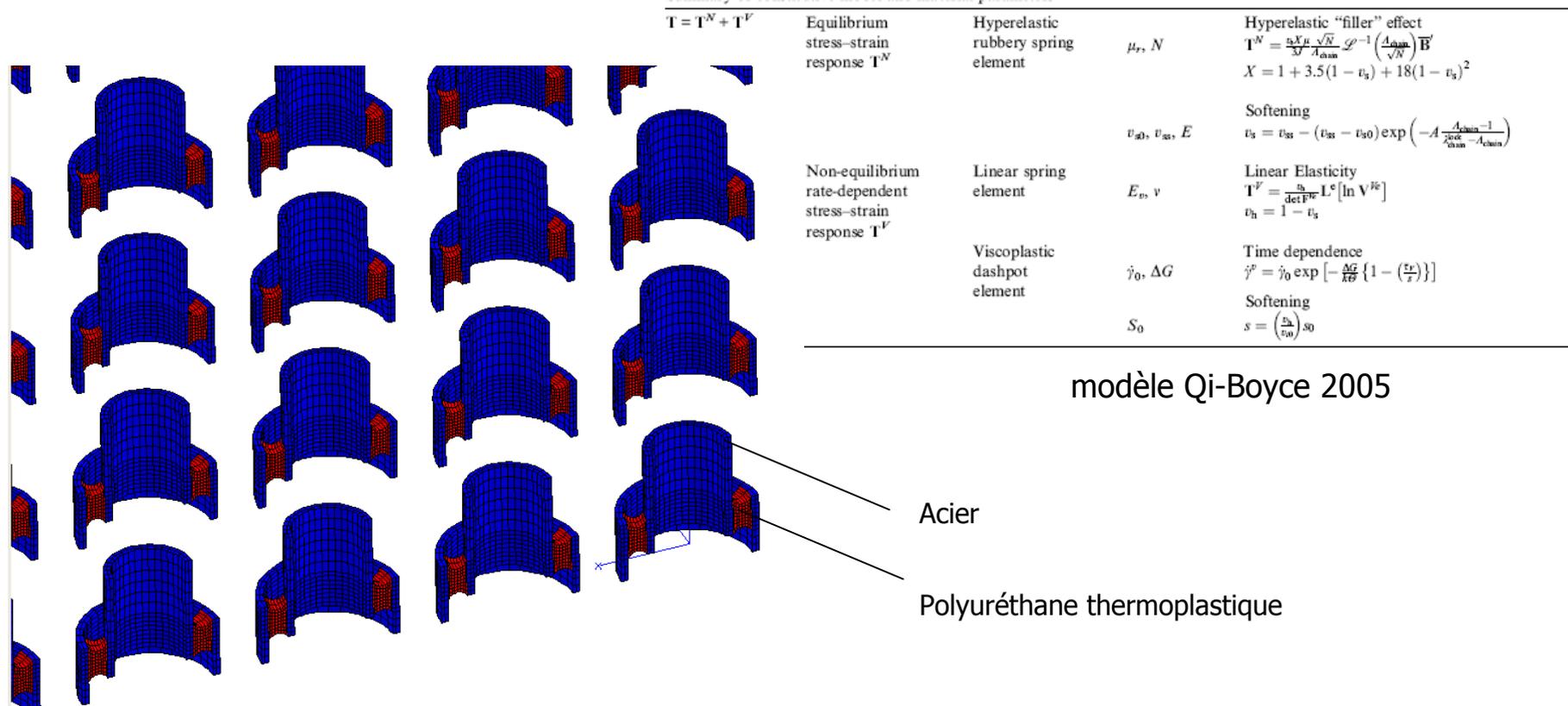
$$\Omega' = \Omega \times P$$



Un domaine correspond à un point d'intégration dans P .

Exemple de modèle éléments finis pour une simulation simultanée de différentes transformations:

Objectif : caractérisation conservative et dissipative d'une liaison souple à l'aide d'un modèle physique détaillé.
(F. Vincent, F. Daim, S. Cantournet)



Modèle éléments finis dans un espace euclidien virtuel de dimension 3.

$$\Omega' = \Omega \times P$$

Méthode de construction d'un domaine d'intégration restreinte pour un sous-espace admissible de dimension finie.

Un principe : chaque mode empirique doit avoir une contribution distincte au volume du domaine d'intégration restreinte.

$$\mathcal{V}_{ROM} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^{j=\gamma} \underline{\psi}_j a_j \mid \underline{\psi}_j \in \mathcal{V} \forall j \right\}$$

$$\mathcal{V}_{ROM} \rightarrow \mathcal{V}_{\Pi ROM}$$

$$B_j = \text{boule}(\underline{\mathbf{M}}_j, h)$$

$$\underline{\mathbf{M}}_j = \arg \max_{\underline{\mathbf{X}}' \in \Omega', \underline{\mathbf{X}}' \notin B_1 \cup \dots \cup B_{j-1}} (\|\underline{\xi}(\psi_j)\|)$$

$$\Omega'_{\Pi} = \cup_{j=1}^{j=\gamma} B_j \cup Z_R \cup Z_I$$

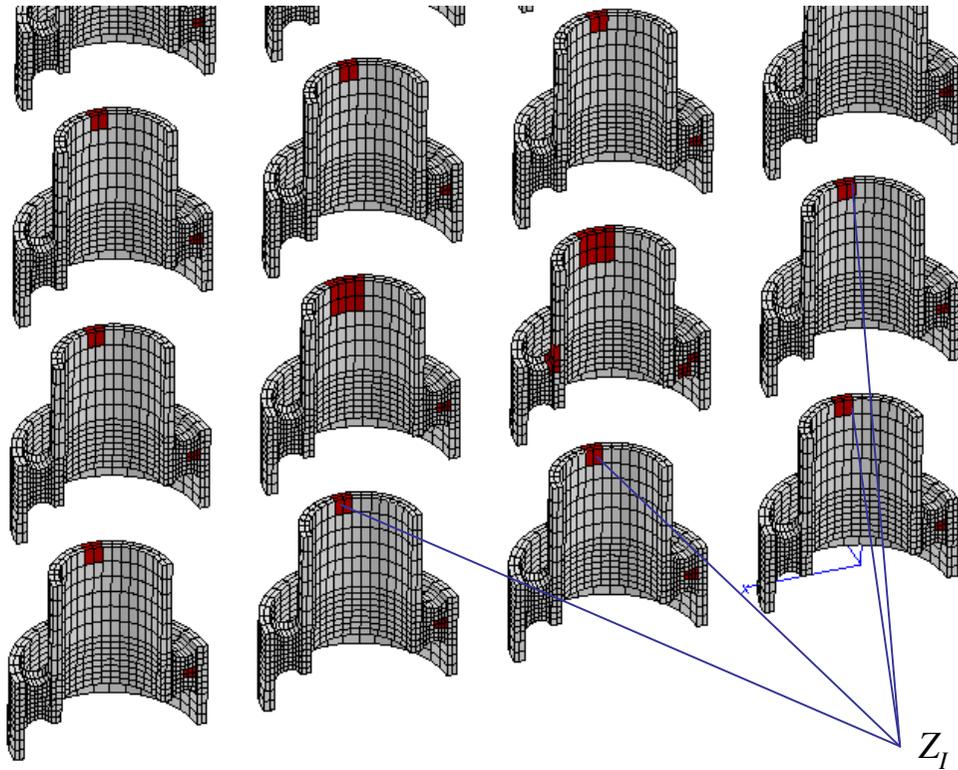
Z_R permet de s'assurer de la visibilité des sollicitations

Z_I est une zone d'intérêt que l'on peut ajouter

Propriété : plus la base des modes empiriques est petite plus Ω'_{Π} est petit.

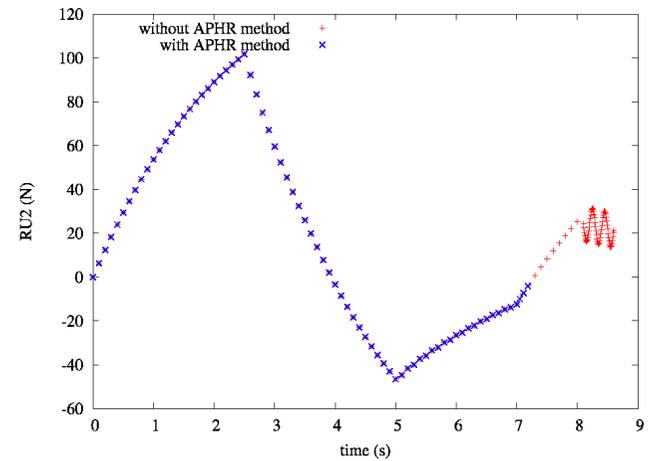
Exemple de modèle éléments finis pour une simulation simultanée de différentes transformations:

Objectif : caractérisation conservative et dissipative d'une liaison souple à l'aide d'un modèle physique détaillé.



Exemple de domaine pour l'intégration restreinte, en rouge.

$$\Omega'_{\Pi}$$



Effort axial d'un des cas.

Simulation en cours

Approximations à variables séparées pour les équations inséparables

Approximations à variables séparées

Approches a posteriori, \underline{u} est connu

- méthodes de décomposition
- méthode POD (Karhunen-Loève) [Lumley 1967]
- méthode snapshot POD [Sirovich 1987]

Approches a priori

- analytique [L'Hôpital 1750], et problèmes symétriques [Boyer et al. 1977]
- incrémentale sans simplification : méthode EF

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{i=1}^{i=n} \underline{N}_i(\underline{X}) q_i(\{p\}, t)$$

- non incrémentale : méthode LATIN [Ladevèze 1985]

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma} \underline{\psi}_j(\underline{X}) a_j(\{p\}, t)$$

- incrémentale : méthode APHR [Ryckelynck 2005]

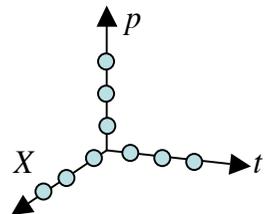
$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma} \underline{\psi}_j(\underline{X}) a_j(\{p\}, t)$$

- multidimensionnelle pour équations séparables [Ammar & Chinesta 2006]

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma} \underline{\psi}_j(\underline{X}) g_j(\{p\}) a_j(t)$$

$$\mathcal{R} = \sum_{j=1}^{j=\gamma} \mathcal{R}_{Xj} \mathcal{R}_{pj} \mathcal{R}_{tj}$$

pour les
équations
inséparables



Intégration numérique séparée

Construction incrémentale d'une représentation à variables séparées

Hypothèses pour la mise en œuvre de la méthode APHR

Equation de conservation
linéaire en $\underline{\mathbf{u}}^*$
sous une forme variationnelle

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}$$

$\in \mathcal{U}$

R est une grandeur extensive, c'est une somme de contributions:

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} r_v(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} r_b(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) d\Gamma$$

Approche séquentielle

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega' \times \mathcal{P}} r_v(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) d\Omega d\{p\} + \int_{\partial_f \Omega' \times \mathcal{P}} r_b(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}) d\Gamma d\{p\}$$

Approche multidimensionnelle

Pas d'intégrale sur le temps pour les approches incrémentales.

La méthode APHR

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}) a_j^{(n)}(t') + \underline{\mathbf{u}}_c \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}') a_j^{(n)}(t) + \underline{\mathbf{u}}_c$$

simulation séquentielle simulation simultanée

$$\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)} \quad \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n)}$$

Algorithme multiniveau

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_{ROM} + \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}_c \quad \text{pour } t = t_k$$

$$\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)} \quad \delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h$$

□ Initialisation n=0

□ Prévion en base réduite avec hyper-réduction pour $t = t_k$

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n-1)} + \underline{\mathbf{u}}_c) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n-1)}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)}$$

□ Evaluation d'un indicateur de la norme du résidu des équations de conservation

□ Si nécessaire :

▪ Correction sans séparation et intégration complète

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n-1)} + \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}_c) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_h$$

$$\delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h$$

▪ Adaptation de la base réduite

$$\mathcal{V}_{ROM}^{(n-1/2)} = \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)} \oplus \{\mu \delta \underline{\mathbf{u}}\}$$

$$\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} = POD(\{a\}^{(n-1/2)})$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n-1)} + \delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$$

▪ Adaptation du domaine d'intégration restreinte $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} \rightarrow \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n)}$

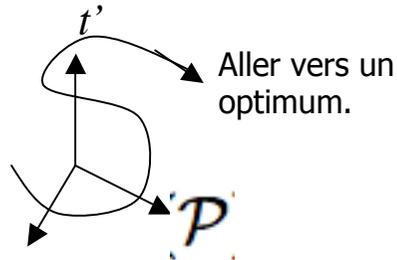
□ Traitement de l'incrément suivant $t = t_{k+1}$



Analyse séquentielle de modèles paramétriques (séparation espace-temps t')

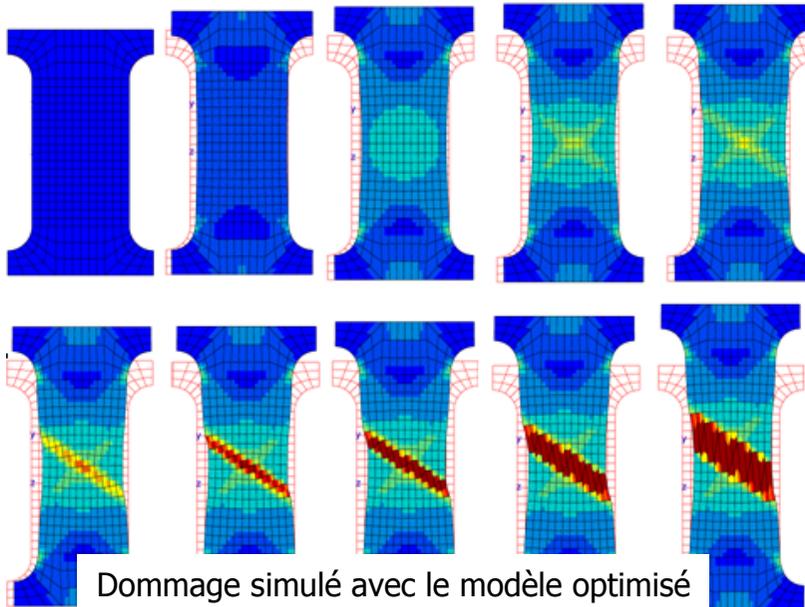
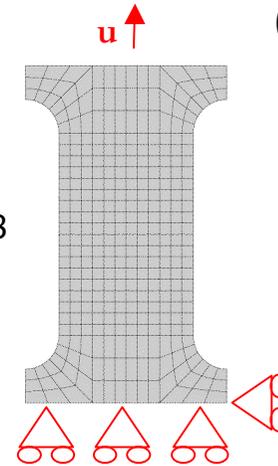
Optimisation par méthode inverse de coefficients matériaux

(S. Cartel, D.-M. Benziane, J. Besson)



Les simulations se succèdent et la base réduite s'enrichit.

Acier A508



Domage simulé avec le modèle optimisé

Équations du modèle de Rousselier

Définition de la déformation plastique et élastique

$$\underline{F} = \nabla \underline{u}$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}$$

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \text{ avec } \underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T) \text{ et } \underline{W} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T)$$

$$\underline{F} = \underline{Q} \cdot \underline{U}$$

Tenseurs globaux : \underline{D} et \underline{S} } définis par :
Tenseurs locaux : $\underline{\dot{\epsilon}}$ et $\underline{\dot{\sigma}}$ }

$$\underline{\sigma} = \underline{Q}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{Q} \text{ et } \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{Q}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{Q} \quad (\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p)$$

Relation contrainte-déformation

$$\underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{C} : \underline{\dot{\sigma}}$$

Loi d'écroutissage isotrope

$$R(p) = R_0 + Q(1 - e^{-bp})$$

Critère de limite élastique

$$\Phi(\underline{\sigma}, f, R) = \frac{\sigma_{Mises}}{\rho} + \sigma D f e^{\frac{\sigma_m}{\rho \sigma_1}} - R(p)$$

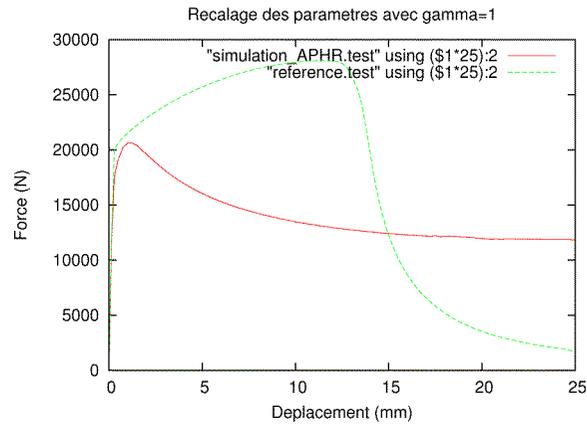
Loi de normalité

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\sigma}}$$

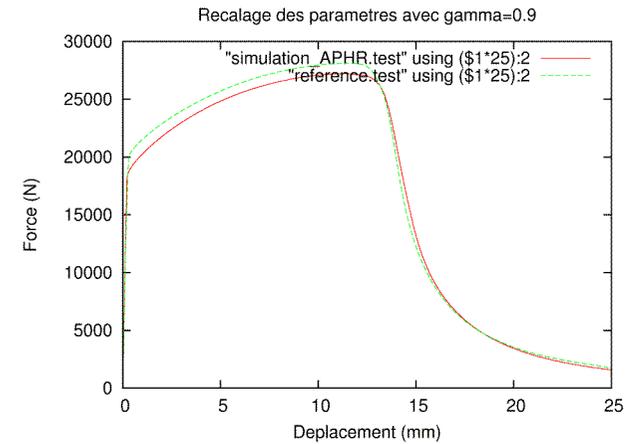
Équation de porosité

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr}(\underline{\dot{\epsilon}}^p)$$

Courbes effort-déplacement



Sans adaptation de la base réduite



Méthode APHR

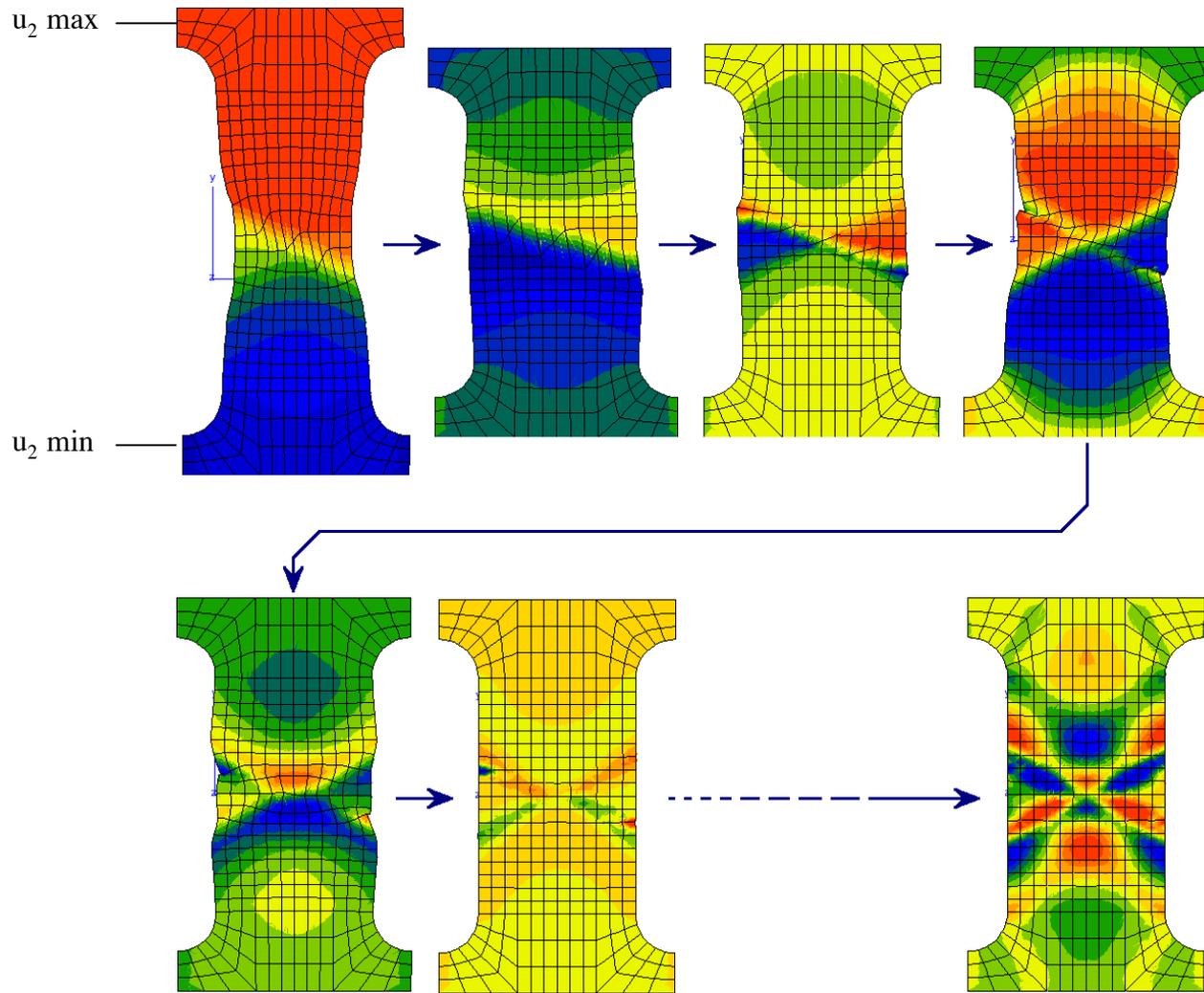
Performances de la méthode APHR

Échec de l'hyper-réduction, intégration complète.
Mais réduction du nombre de résolutions de problèmes linéaires.

| | | APHR | | | |
|----------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| γ | EF | 1 | 0.9 | 0.5 | 0 |
| Nb simulations | 104 | 109 | 105 | 84 | 92 |
| Nb Pb lin. EF | 108762 | 40362 | 37043 | 43921 | 53014 |
| Gain/EF | | 2.69 | 2.93 | 2.48 | 2.05 |

Modes empiriques de la base réduite

$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \phi_j^{(n)}(\underline{X}) a_j^{(n)}(t') + \underline{u}_c$$

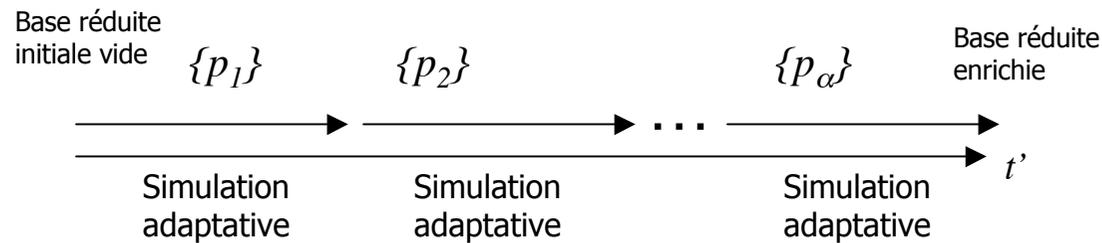


11 modes empiriques

La méthode APHR permet de construire et d'enrichir des modèles d'ordre réduit.

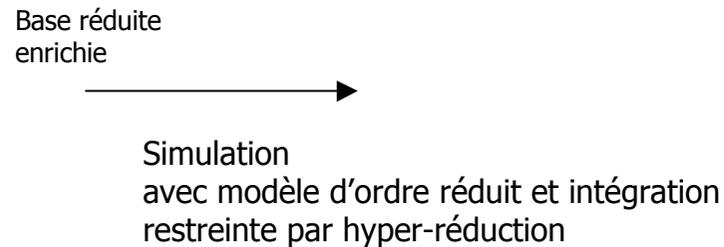
$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \phi_j^{(n)}(\underline{X}) a_j^{(n)}(t') + \underline{u}_c$$

Modes empiriques de la base réduite



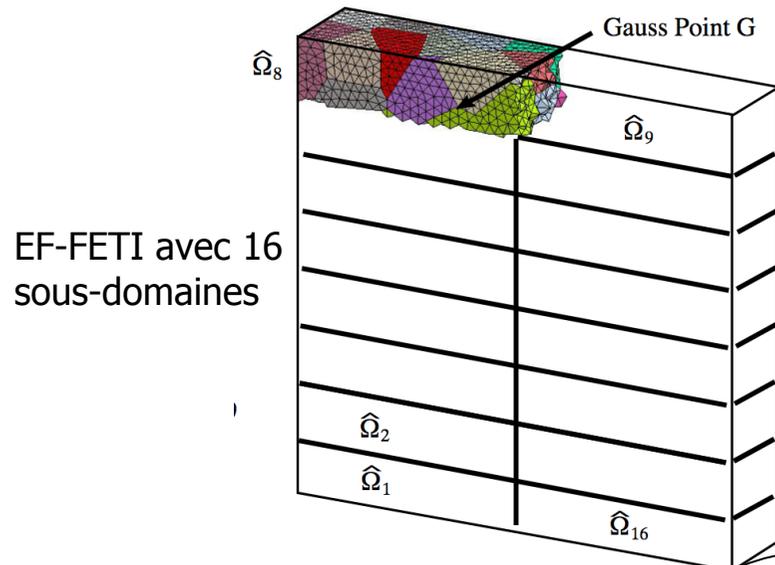
Les résultats de simulation sont agrégés pour former une base réduite enrichie.

Certains résultats peuvent être oubliés pour favoriser la représentation des derniers résultats (Th. S. Cartel).



Exemple d'utilisation d'un modèle hyper-réduit (séparation espace-temps t')
Hiérarchisation des paramètres d'un modèle de plasticité cristalline

(D.-M. Benziane, A. Museinko, G. Cailletaud)



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$$

$$\mathbf{S}^e = \det(\mathbf{F}^e) \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{e-T} \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{T} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{eT} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{e-T}$$

$$\rho^o = \rho \det(\mathbf{F})$$

$$\mathbf{S}^e = \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{E}^e; \quad x^s = c \alpha^s; \quad r^s = R_0 + b Q h_s (1 - \exp(-b v^s))$$

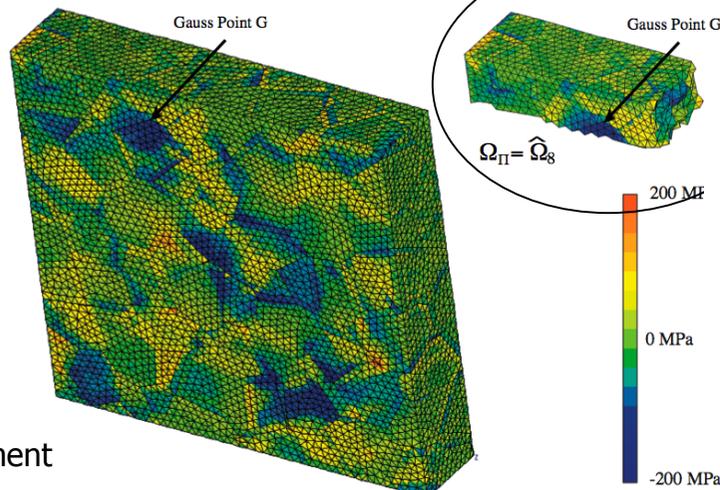
$$\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^p = \sum_s \dot{\gamma}^s \mathbf{N}^{s0}$$

$$\dot{v}^r = |\dot{\gamma}^s|$$

$$\dot{\alpha}^s = \dot{\gamma}^s - d \dot{v}^s \alpha^s$$

$$\dot{\gamma}^s = \left\langle \frac{|\tau^s - x^s| - r^s}{K} \right\rangle^n \text{sign}(\tau^s - x^s)$$

$$\tau^s = \mathbf{T} : \mathbf{N}^{s0}$$



Intégration restreinte à un seul sous-domaine, sans adaptation de la base réduite.

Un cas de simulation 361 fois plus rapide que la simulation EF-FETI, réalisée sur un seul processeur.

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques

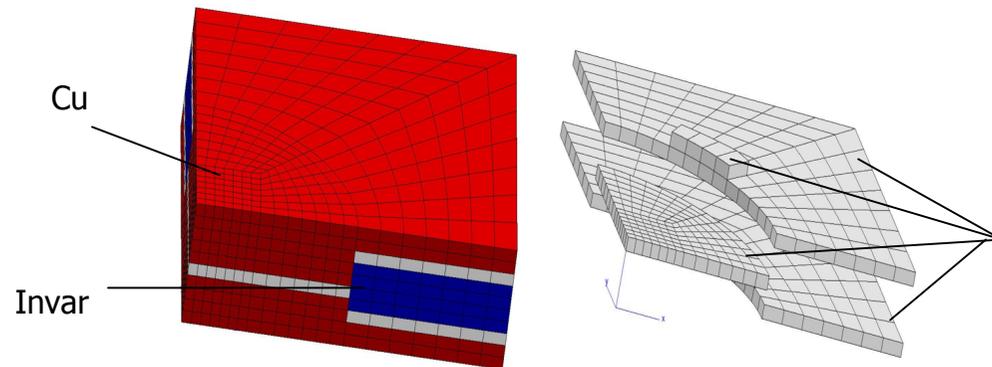
$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}') a_j^{(n)}(t) + \underline{\mathbf{u}}_c$$

- Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à un niveau de séparation (X' -temps)
- Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation (X - $\{p\}$ - t)

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à un niveau de séparation

(F. Daim, A. Kaabi, D.-M. Benziane, Y. Bienvenu)

Evaluation de la sensibilité de performances à des dommages donnés
afin de savoir s'il est nécessaire de maîtriser ces dommages



Imperfections du procédé de colaminage modélisées avec 6 paramètres de dommages à valeurs dans $\{0.8, 0.9\}$.

Substrat pour application mécatronique
Conductivité élevée, dilatation faible
(Th. A. Kaabi, Brevet No. 0956865)

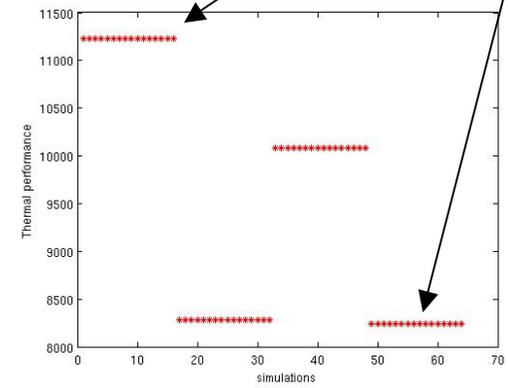
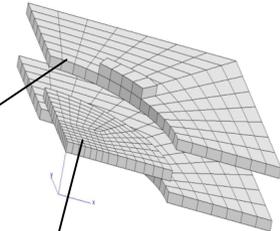
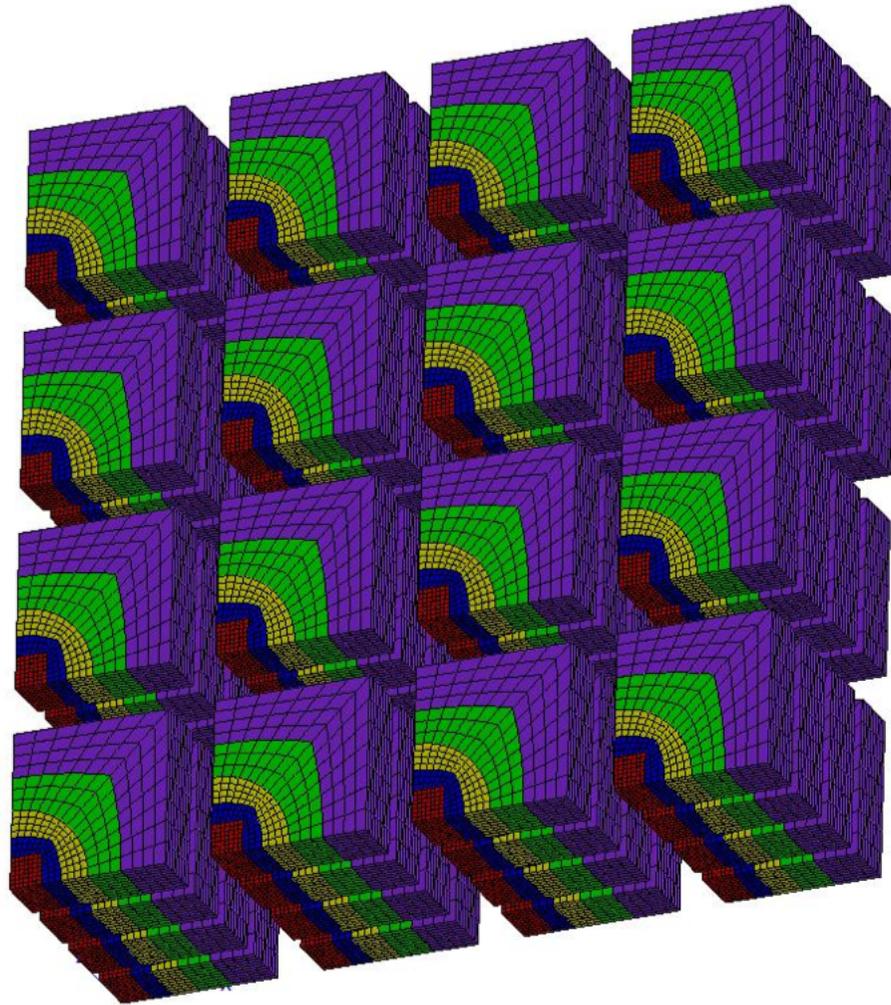
Problème multiphysique faiblement couplé

$$\int_{\Omega \times \mathbf{P}} \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}, t) \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) w(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \int_{\Omega \times \mathbf{P}} k(\mathbf{x}, t, T) \nabla T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \nabla w(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \int_{\Gamma_1 \times \mathbf{P}} h (T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - T_D) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} = \int_{\Gamma_2 \times \mathbf{P}} \Phi w(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p},$$

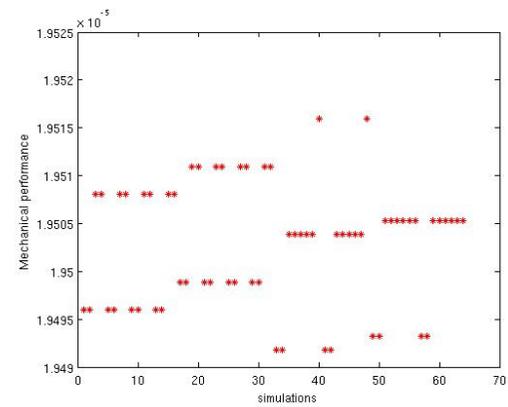
and

$$\int_{\Omega \times \mathbf{P}} \epsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) : \epsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} d\mathbf{p} = \alpha \int_{\Omega \times \mathbf{P}} (T(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - T_D) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{p},$$

$2^6 = 64$ cas de simulation traités de façon simultanée



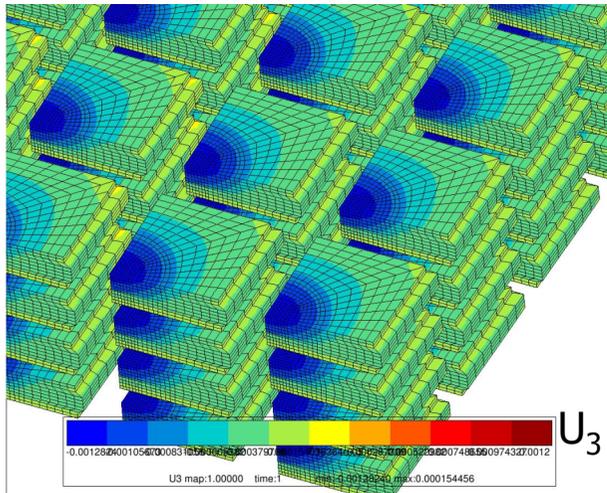
Dommages thermiques



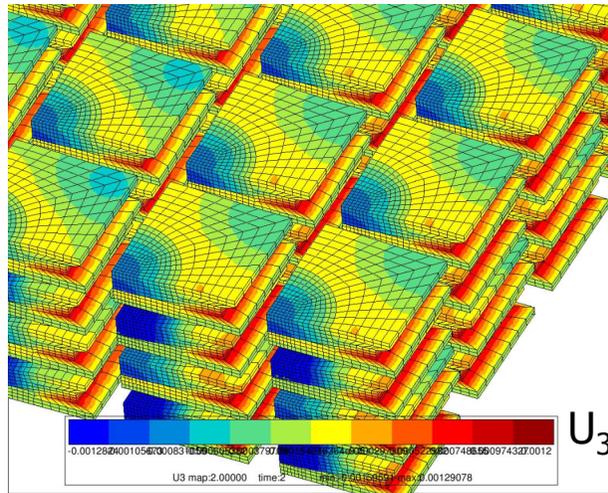
Erreur de prévision par la méthode APHR : 2%

Modes empiriques visualisés dans l'espace euclidien virtuel

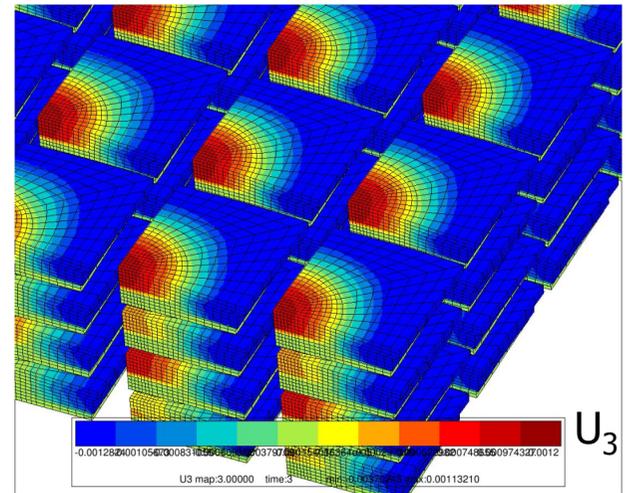
$$\underline{u}(\underline{X}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{X}') a_j^{(n)}(t) + \underline{u}_c \quad \gamma = 3$$



Φ_1



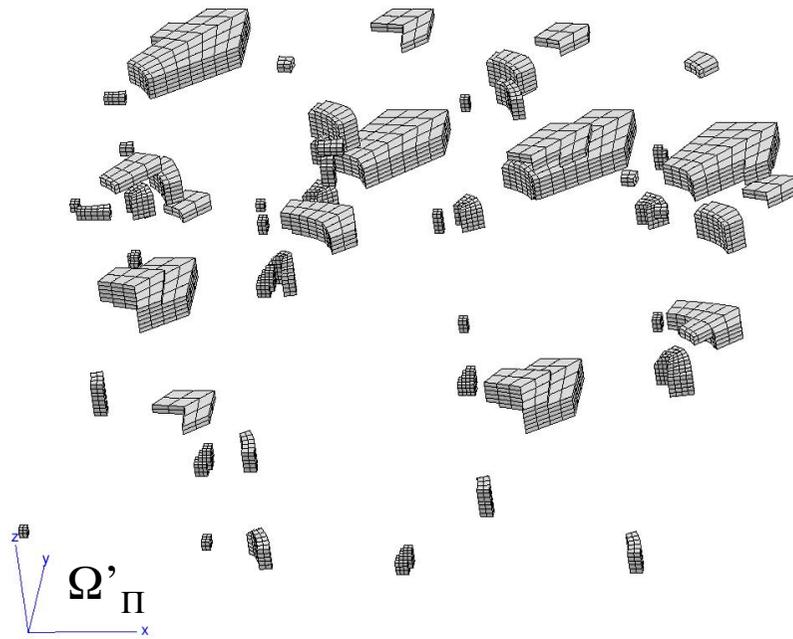
Φ_2



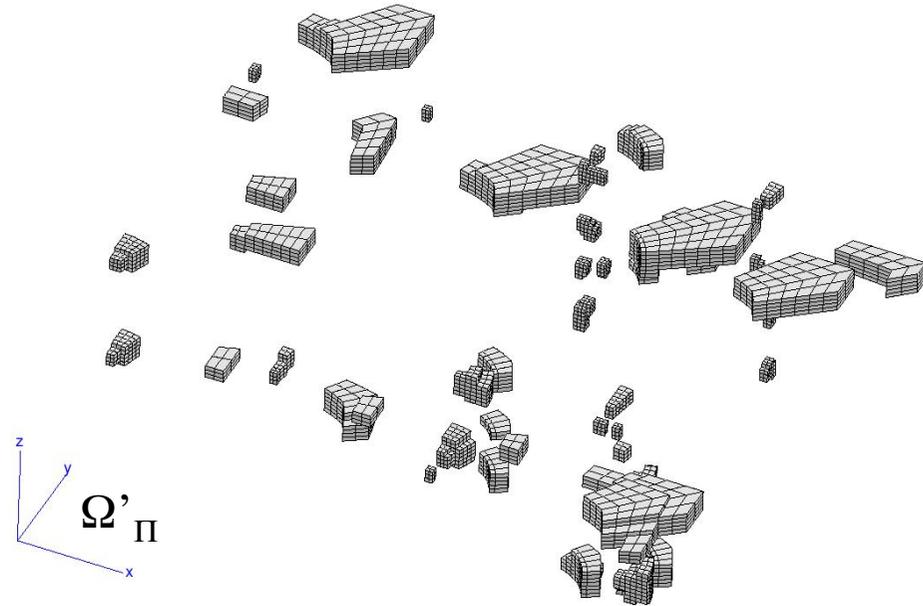
Φ_3

Domaines pour l'intégration restreinte

Pour le modèle thermique



Pour le modèle mécanique

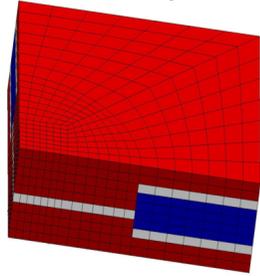


Les paramètres n'ont pas la même influence en thermique et en mécanique donc les domaines sont différents.

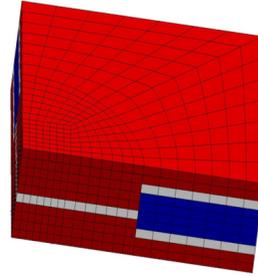
Efficacité de la méthode APHR

EF

Thermique



Mécanique

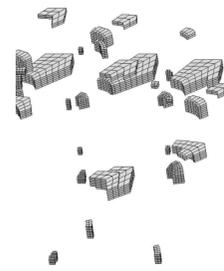


CPU : 18228s

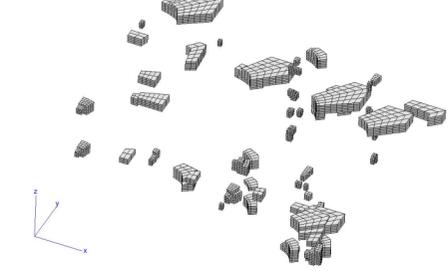
157115s

APHR

Thermique



Mécanique



1981s

9003s

Gains : 89%

94%

Construction incrémentale d'une représentation à variables séparées par la méthode APHR

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}) a_j^{(n)}(t') + \underline{\mathbf{u}}_c \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n)}} \underline{\phi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}') a_j^{(n)}(t) + \underline{\mathbf{u}}_c$$

simulation séquentielle simulation simultanée

$$\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)} \quad \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n)}$$

Algorithme multiniveau, à un niveau de séparation

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_{ROM} + \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}_c \quad \text{pour } t = t_k$$

$$\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)} \quad \delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h$$

□ Initialisation n=0

□ Prévion en base réduite avec hyper-réduction pour $t = t_k$

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n-1)} + \underline{\mathbf{u}}_c) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n-1)}$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)}$$

□ Evaluation d'un indicateur de la norme du résidu des équations de conservation

□ Si nécessaire :

▪ Correction sans séparation et intégration complète

$$\mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}_{ROM}^{(n-1)} + \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}_c) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_h$$

$$\delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h$$

▪ Adaptation de la base réduite $\mathcal{V}_{ROM}^{(n-1/2)} = \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)} \oplus \{\mu \delta \underline{\mathbf{u}}\}$

$$\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} = POD(\mathcal{V}_{ROM}^{(n-1/2)})$$

▪ Adaptation du domaine d'intégration restreinte $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} \rightarrow \mathcal{V}_{\Pi ROM}^{(n)}$

□ Traitement de l'incrément suivant $t = t_{k+1}$

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation

Algorithme multiniveau à deux niveaux de séparation

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_{ROM} + \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}_c \quad \text{pour } t = t_k$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{ROM} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n-1)} \quad \delta \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{ROM}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t) = \sum_{j=1}^{j=\gamma^{(n-1)}} \underline{\phi}_j^{(n-1)}(\underline{\mathbf{X}}') a_j^{(n-1)}(t)$$

$$\underline{\mathbf{X}}' = (\underline{\mathbf{X}}, \{p\}) \quad \text{Simulation simultanée}$$

$$\underline{\phi}_j^{(n-1)}(\underline{\mathbf{X}}') \in \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in L^2(\mathcal{P}; H^1(\Omega)) \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

- Initialisation n=0
- Prévion en base réduite avec hyper-réduction pour $t = t_k$
- Evaluation d'un indicateur de la norme du résidu des équations de conservation
- Si nécessaire :
 - Correction avec séparation $(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t)$, mais intégration complète

$$\delta \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, \{p\}, t_k) = \sum_{j=1}^{j=\beta} \underline{\psi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}) \quad g_j^{(n)}(\{p\})$$

$$\underline{\psi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}) \in H^1(\Omega)$$

$$\underline{\psi}_j^{(n)}(\underline{\mathbf{X}}) = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* = \underline{\mathbf{R}}_X^*(\underline{\mathbf{X}}) R_p(\{p\}) + \underline{\mathbf{R}}_X(\underline{\mathbf{X}}) R_p^*(\{p\})$$

- Adaptation de la base réduite
- Adaptation du domaine d'intégration restreinte
- Traitement de l'incrément suivant $t = t_{k+1}$

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation

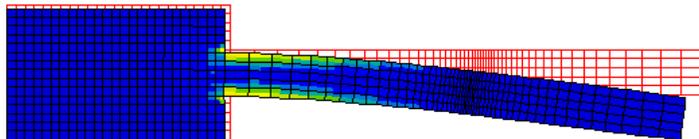
(B. Sarbandi, S. Cartel, D.-M. Benziane, J. Besson)

Evaluation de l'aptitude d'un essai à permettre l'identification de coefficients d'une loi de comportement complexe.



Céramique Imérys

Déformation thermiques et mécaniques irréversibles obtenues par frittage.



Simulation EF validée expérimentalement

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\epsilon}_{th} \underline{\underline{1}} + \dot{\epsilon}_s(f, T) \underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{R}}^T \cdot (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^T) \cdot \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$$

$$\dot{\epsilon}_s(f, T) = -f^y A_s \exp\left(\frac{-Q_s}{RT}\right)$$

$$\underline{\underline{G}} = \eta(T) \underline{\underline{M}}^{(4)}(T, f) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}$$

$$\underline{\underline{M}}^{(4)}(T, f) = F(f) \underline{\underline{I}}^{(4)} + \frac{3}{2} C(f) \underline{\underline{J}}^{(4)}$$

$$\underline{\underline{I}}^{(4)} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} = Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}) \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{J}}^{(4)} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} - \frac{1}{3} Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}) \underline{\underline{1}}$$

$$C(f) = 1 + x f^n \quad F(f) = z f^m$$

$$\eta(T) = B_s \exp\left(\frac{-Q_s}{RT}\right)$$

$$\dot{f} = (1 - f) Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\epsilon}_{th} \underline{\underline{1}})$$

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation

Evaluation de l'aptitude d'un essai à permettre l'identification de coefficients d'une loi de comportement complexe.

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\epsilon}_{th} \underline{\underline{1}} + \dot{\epsilon}_s(f, T) \underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{R}}^T \cdot (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}) \cdot \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$$

$$\dot{\epsilon}_s(f, T) = -f^y A_s \exp\left(\frac{-Q_s}{RT}\right)$$

$$\underline{\underline{G}} = \eta(T) \underline{\underline{M}}^{(4)}(T, f) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}$$

$$\underline{\underline{M}}^{(4)}(T, f) = \underline{\underline{F}}(f) \underline{\underline{I}}^{(4)} + \frac{3}{2} C(f) \underline{\underline{J}}^{(4)}$$

$$\underline{\underline{I}}^{(4)} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} = Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}) \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{J}}^{(4)} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp} - \frac{1}{3} Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{vp}) \underline{\underline{1}}$$

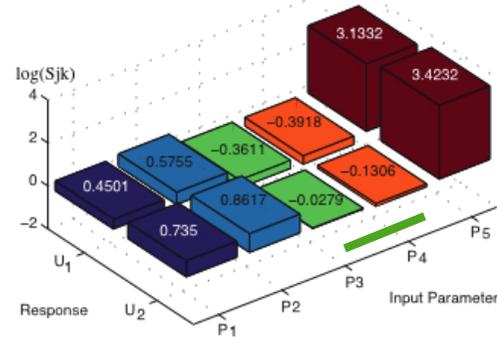
$$C(f) = 1 + x f^n \quad \underline{\underline{F}}(f) = z f^m$$

$$\eta(T) = B_s \exp\left(\frac{-Q_s}{RT}\right)$$

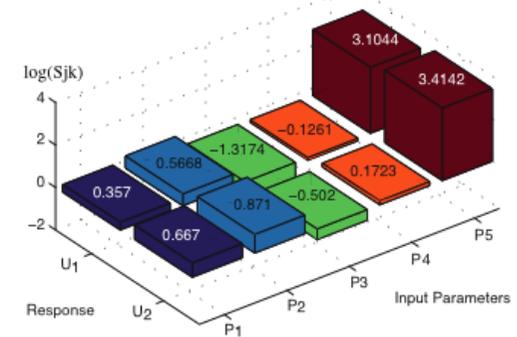
$$\dot{f} = (1 - f) Tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\epsilon}_{th} \underline{\underline{1}})$$

Sensibilité de la mesure de la flèche

Using the sequential FE simulations



Using the Simultaneous Simulation

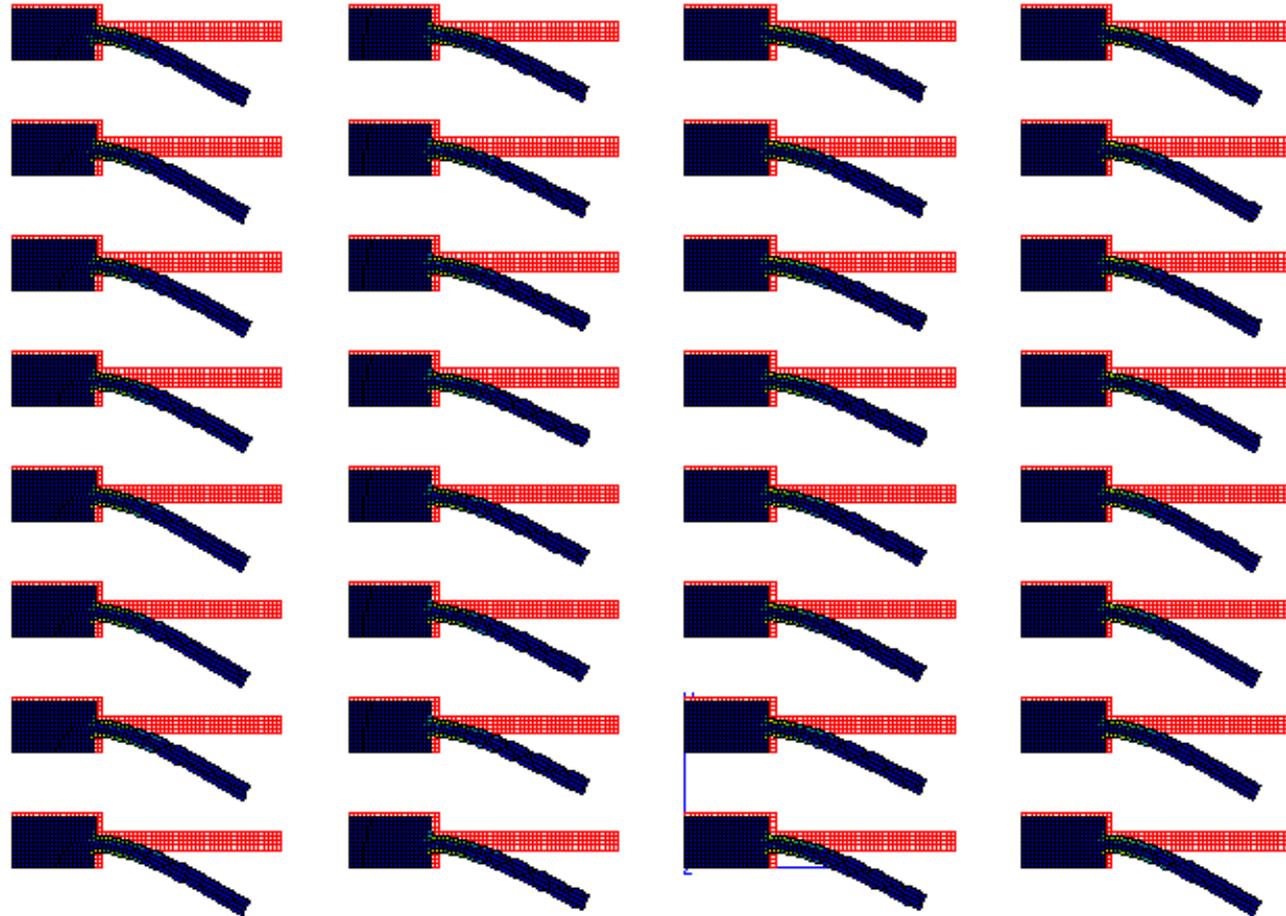


Erreur de prévision par la méthode APHR : 1%

$$\{p\} = \begin{pmatrix} x \\ n \\ z \\ m \\ B_s \end{pmatrix} \quad \text{Paramètres peu influents}$$

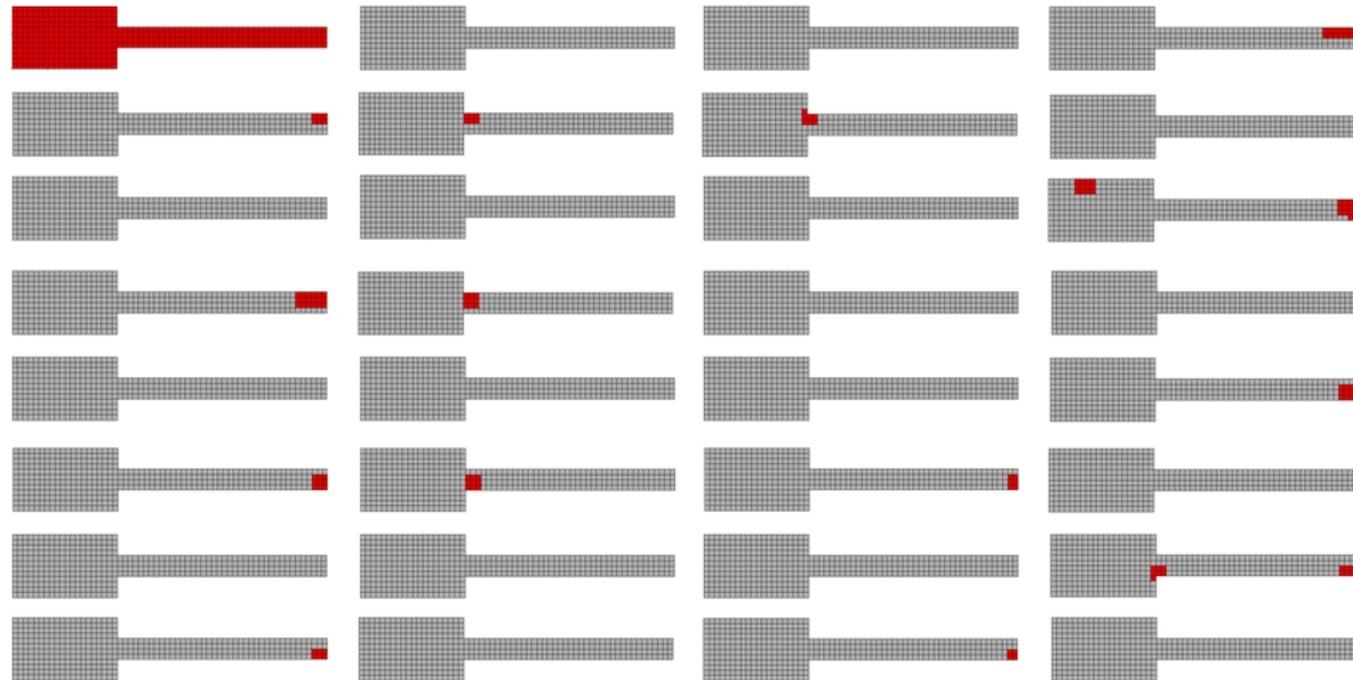
2 valeurs par paramètres induisent 32 cas de simulation.

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation



Simulation simultanée de 32 cas,
contrainte équivalente de Von Mises à l'instant final.

Analyse multidimensionnelle de modèles paramétriques à deux niveaux de séparation



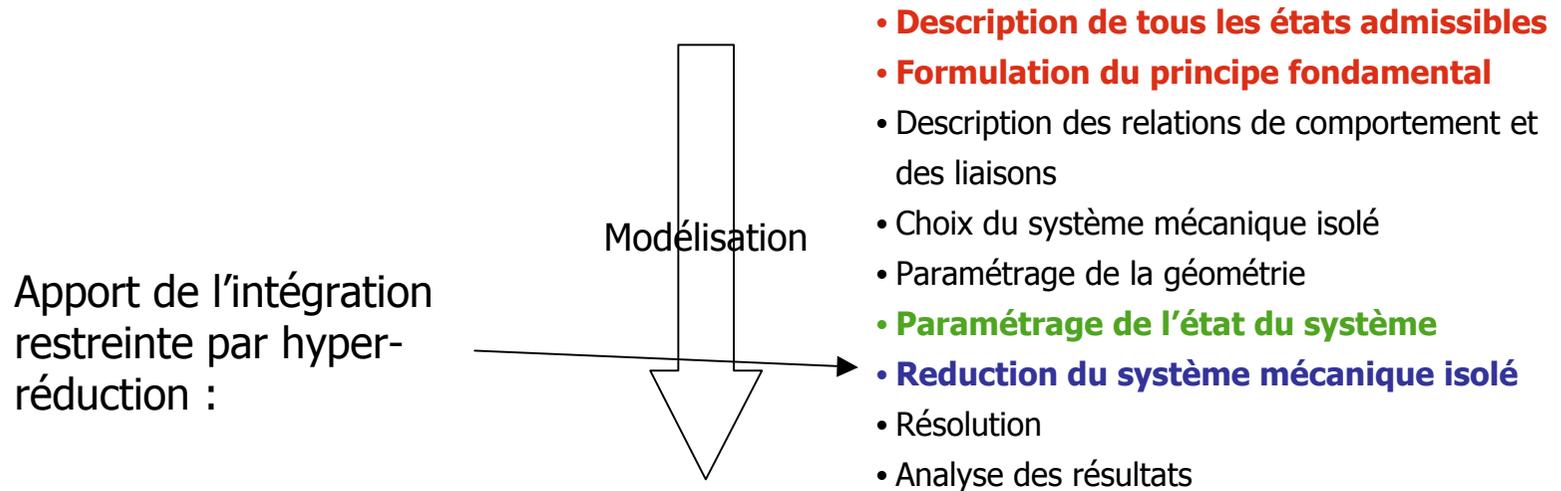
Simulation simultanée de 32 cas,
domaine d'intégration restreinte en rouge.

| Stratégies | Problèmes linéaires | Evaluation de la relation de comportement | Inconnues |
|--|-------------------------|---|-----------|
| EF séquentiel | $32 \times 981 = 31392$ | $32 \times 1,569,600 = 50.227.200$ | 946 |
| Simulation simultanée $\Omega_{II} = \Omega$ | 1399 | 60.108.800 | 1399 |
| Simulation simultanée avec hyper-réduction | 1399 | 7.760.400 | 1399 |

Nombre d'opérations et d'inconnues

Conclusion

Concernant les étapes de la modélisation en mécanique des milieux continus.



Une transformation symétrique est une transformation synchrone.

La méthode proposée pour la séparation de variables permet une représentation efficace des transformations quasiment synchrones.

Les simulations simultanées sont avantageusement traitées par représentation séparée et intégration restreinte.

La méthode APHR est robuste, mais pas toujours efficace.

Elle offre la possibilité d'une utilisation raisonnée des moyens de calcul.

Elle requière beaucoup de mémoire.

Si on en a les moyens, il vaut mieux traiter chaque problème dans sa globalité.