

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Méthodes numériques

Introduction

Jacques Besson, Andrei Constantinescu, Arnaud
Delaplace, Ivan Iordanoff, David Ryckelynck

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- Formulation des problèmes linéaires
- Éléments discrets
- Transformations finies
- Algorithmes de résolution de problèmes de dynamique
- Intégration des lois de comportement
- Résolution des problèmes non-linéaires et réduction de modèle
- Calculs cycliques et durée de vie
- Identification de lois de comportement, comparaison essais/calculs
- Changement d'échelle
- Stabilité et localisation des déformations

Pourquoi s'intéresser à la mécanique numérique ?

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Motivations

- la méthode des éléments finis est un outils largement utilisé par les ingénieurs des secteurs d'activités proches de la mécanique,
- la puissance croissante des moyens de simulation permet de modéliser des matériaux de plus en plus complexes,
- les concepts doivent être compris pour maîtriser les erreurs inhérentes à toute modélisation.

Objectifs

- donner une présentation structurée de la mécanique numérique des milieux continus,
- fournir des connaissances de base pour la modélisation du comportement non-linéaire des matériaux.

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Formulation des équations d'un problème d'élasticité

- Remarques sur la théorie des milieux continus
- Rappels sur le principe des puissances virtuelles
- Domaines 3D élastiques
- Théorème de l'énergie potentielle
- Théorème de l'énergie complémentaire
- Illustrations, étude de treillis

Objectifs de ces deux premières séances de cours

- Rappeler les principaux concepts de la théorie des milieux continus
- Insister sur la structure des équations

Remarques sur la théorie des milieux continus

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- La puissance de la mécanique des milieux continus est de pouvoir écrire les équations d'équilibre et de comportement en adoptant un paramétrage très général de l'état du système étudié.
- Pas de problème global sans continuité ! Il faut une continuité des liaisons mécaniques pour obtenir un problème global.
- Pourquoi n'utilise-t-on pas la méthode des différences finies ?

Remarques sur la méthode des différences finies

Contexte

Objectifs

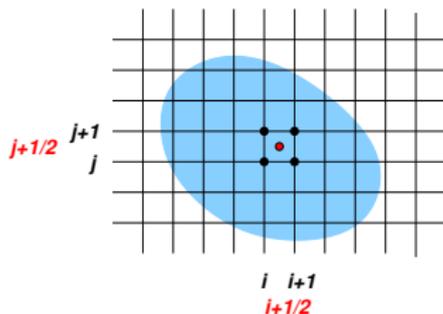
Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses



- avec une grille régulière de nœuds il est difficile de tenir compte des conditions aux limites,
- $\frac{\partial u_k}{\partial x}(x_{i+1/2}) \approx \frac{u_k(x_{i+1}) - u_k(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$
- utilisée en mécanique des fluides,
- très répandue pour les fonctions du temps
- $\dot{u}_k \approx \frac{u_k(t_{i+1}) - u_k(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$

Rappels sur le principe des puissances virtuelles

Contexte

Objectifs

Remarques sur les milieux continus

Rappels sur le PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and Trusses

- Les conditions de conservation de la quantité de mouvement dans un système mécanique sont données par :

$$\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_a$$

pour tout champ de vitesses virtuelles continu compatible avec les liaisons et pour tout système mécanique,

- avec par définition :

$\mathcal{P}_i = 0$ pour tout mouvement virtuel de corps rigide.

$\mathcal{P}_a = 0$ pour les transformations quasi-statiques.

- En statique, pour qu'un problème soit bien posé, il faut une absence de mode de corps rigide compatible avec les liaisons.

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Le milieu continu occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

espace 3D avec repère cartésien (x_1, x_2, x_3)

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

Figure

- champ de déplacements \mathbf{u} ;
- champ de déplacements connus \mathbf{u}^D appliqués sur $\partial\Omega^d$;
- champ de tenseurs de déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$;

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\mathbf{u} \quad (1)$$

- l'espace des champs cinématiquement admissibles $\mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$, champs "réguliers" ($\in H^1(\Omega)$) compatibles avec les liaisons ;

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = \mathbf{u}^D \text{ sur } \partial\Omega^d \} \quad (2)$$

- champ de tenseurs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$;
- champ de vecteurs de forces surfaciques connues \mathbf{t}^D appliquées sur $\partial\Omega^t$;
- champ de forces volumiques connues \mathbf{f}^D ;

Domaines 3D : Quelles équations en statique ?

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- **champs cinématiquement admissibles** : déplacements (displacements)
- **cinématique** (kinematic) : déformations (strains)
- **loi de comportement** (constitutive law) : élasticité linéaire (linear elasticity)
- **équilibre des forces** (balance of forces) : contraintes (stresses)
- **conditions aux limites** (boundary conditions) : efforts imposés ou déplacements imposés
- **puissances virtuelles** (virtual powers) : forme faible (weak form) des équations d'équilibre,
- **énergie** : théorèmes de l'énergie, potentielle ou complémentaire.

Domaines 3D : Quelles équations en statique ?

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\mathbf{u} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

$$\mathcal{P}_i(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_e(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(0, \partial\Omega^d) \quad (6)$$

- *Conditions aux limites en déplacement et régularité (3)*
- *Relation cinématique(4)*
- *Comportement linéaire élastique (5)*
- *Equation d'équilibre (equilibrium equation) (6)*

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- *Encastrement* (Encastre) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e. } u_i = 0 \quad \forall i \quad (7)$$

- *Surface libre* (Traction-free surface) :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \forall i \quad (8)$$

- *Contact sans frottement* (Frictionless sliding contact) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u^d \quad \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (9)$$

- *Effort normal et efforts tangentiels imposés* (Prescribed normal and shear tractions) :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + q_1\mathbf{t}_1 + q_2\mathbf{t}_2 \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p$$

$$\mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = q_1$$

$$\mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = q_2$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Puissance virtuelle des efforts extérieurs connus

$$\mathcal{P}_e(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^D \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{t}^D \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Puissance virtuelle des quantités d'accéléérations

$$\mathcal{P}_a(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dv$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs

$$\mathcal{P}_i(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dv$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \qquad (11)$$

$$\sigma_{23} = C_{2311} \varepsilon_{11} + C_{2312} \varepsilon_{12} + C_{2313} \varepsilon_{13} + C_{2321} \varepsilon_{21} + \dots$$

C - fourth rank order of the *elastic moduli* :

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \qquad (12)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

C tenseur des rigidités élastiques - tenseur du quatrième ordre des modules élastiques :

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (13)$$

Symétries de **C** :

- symétrie du tenseur de déformation ε : $C_{ijkl} = C_{ijlk}$
- symétrie du tenseur de contrainte σ : $C_{ijkl} = C_{jikl}$.
- existence d'une énergie potentielle : $C_{ijkl} = C_{klij}$.
ce qui revient à :

$$\varepsilon_1 : \mathbf{C} : \varepsilon_2 = \varepsilon_2 : \mathbf{C} : \varepsilon_1$$

Stabilité :

$$\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon \geq 0 \quad \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma \geq 0$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Notation standard

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2233} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3323} & C_{2323} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3323} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Notation de Voigt

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Crystal	Symmetry	s_{11}^V	s_{12}^V	s_{44}^V	s_{33}^V	s_{13}^V	s_{14}^V	s_{66}^V
Sodium chloride		2.21	-0.45	7.83	0	0	0	0
Aluminium		1.59	-0.58	3.52	0	0	0	0
Copper		1.49	-0.63	1.33	0	0	0	0
Nickel		7.99	-0.312	8.44	0	0	0	0
Tungsten		0.257	-0.073	0.660	0	0	0	0
Sodium chloride		2.2	-0.6	8.6	0	0	0	0
Tin		1.85	0.99	5.70	1.18	-0.25	0	13.5
ADP		1.8	0.7	11.3	4.3	-1.1	0	16.2
Zinc		0.84	0.11	2.64	2.87	-0.78	0	0
Cadmium		1.23	-0.15	5.40	5.55	0.93	0	0
Quartz		1.27	-0.17	2.01	0.97	-0.15	-0.43	0
Tourmaline		0.40	-0.10	1.51	0.63	-0.016	-0.058	0

TAB.: Elastic compliances [$10^{10} Pa$] in the Voigt notation for a series of crystals at room temperature [Nye 1985].

isotropic / anisotropic elasticity

Contexte

Objectifs

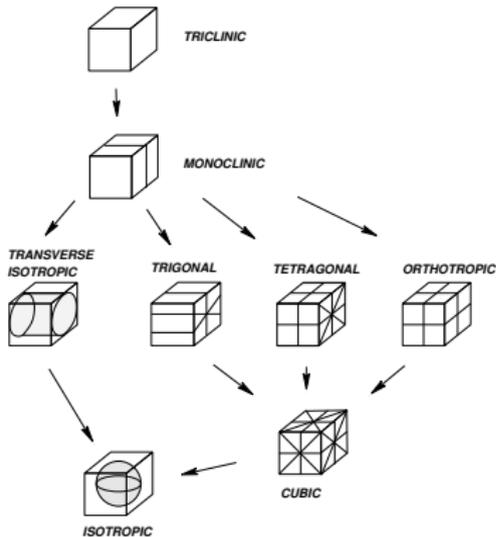
Remarques sur les milieux continus

Rappels sur le PPV

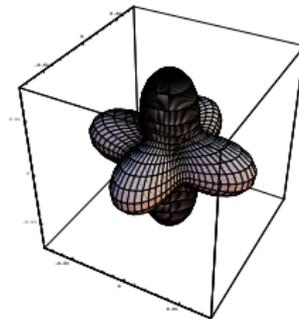
Domaines 3D

Éléments finis

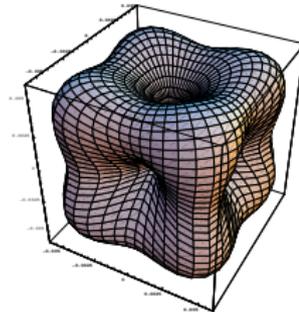
Bars and Trusses



Variation of tensile modul with spatial angle



austenite



Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

C tenseur des rigidités élastiques (Stiffness) et **S** tenseur des souplesses (Compliance)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{array} \right) \quad (16)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$S_{ijkl} = \frac{-\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{(1 + \nu)}{2Y} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (18)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

\mathbf{u}

↓

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\mathbf{u} \longleftrightarrow \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \longleftrightarrow \mathcal{P}_i(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_e(\mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{u}|_{S^d} = \mathbf{u}^D$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$$

champs

cinématiquement admissibles

$\boldsymbol{\sigma}$

↓

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(0, \partial\Omega^d)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}^D, \mathbf{t}^D, \partial\Omega^t)$$

champs

statiquement admissibles

Pour une approche en déplacement, on élimine $\boldsymbol{\sigma}$ des équations du problème de mécanique.

Bilan des équations du problème en déplacement

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{f}^D \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{t}^D \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0 \quad (19)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(0, \mathcal{S}^D)$$

Puis calculer $\boldsymbol{\sigma}$ par la relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Pour $\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dv \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, dv - \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^D \, ds. \end{aligned}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
TrussesPour $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(\mathbf{f}^D, \mathbf{t}^D, \partial\Omega^t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p^*(\mathbf{s}) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{s} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{s} \, dv & (20) \\ &+ \int_{\partial\Omega^d} \mathbf{u}^D \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \, ds. \end{aligned}$$

Propriété :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p(\mathbf{u}) &= \mathcal{U}_p^*(\boldsymbol{\sigma}). & (21) \\ \mathbf{u} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d) & \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\mathbf{f}^D, \mathbf{t}^D, \partial\Omega^t) \end{aligned}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

\mathbf{u} solution of a regular thermoelastic problem *minimises* the strain energy potential over all kinematically admissible displacement fields :

$$\mathcal{U}_p(\mathbf{v}) \geq \mathcal{U}_p(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d). \quad (22)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ solution of a regular thermoelastic problem *maximises* the complementary energy potential over all statically admissible stress fields :

$$\mathcal{U}_p^*(\boldsymbol{\sigma}) \geq \mathcal{U}_p^*(\mathbf{s}) \quad \forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}(\mathbf{f}^D, \mathbf{t}^D, \partial\Omega^t). \quad (23)$$

Minimum potential energy : proof

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

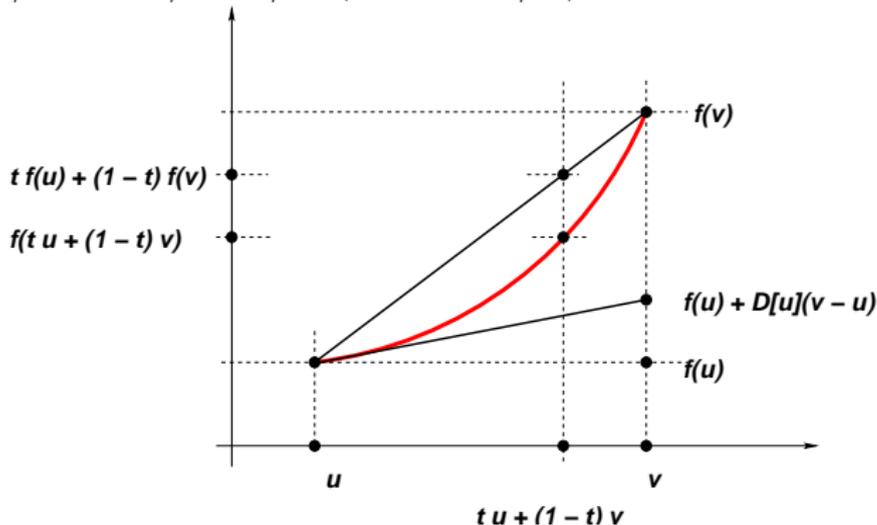
Proof

- Convexité de l'énergie potentiel :

$$t\mathcal{U}_p(\mathbf{v}) + (1-t)\mathcal{U}_p(\mathbf{u}) \geq \mathcal{U}_p(t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{u}) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall \mathbf{v}$$

- Développement de Taylor autour de $\lambda = 0$:

$$dt\mathcal{U}_p(\mathbf{v}) + (1-dt)\mathcal{U}_p(\mathbf{u}) \geq \mathcal{U}_p(\mathbf{u}) + \langle dt(\mathbf{v} - \mathbf{u}), D\mathcal{U}_p(\mathbf{u}) \rangle \quad \forall d\lambda \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}$$



Comment traiter les équations du problème en déplacement ?

Contexte

Objectifs

Remarques sur les milieux continus

Rappels sur le PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and Trusses

Le paramétrage des déplacements s'effectue en choisissant un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$

- solveur FFT, utilisation de séries
- approche en énergie : méthode de Ritz-Raleigh / Galerkin
 - méthode des éléments finis (Finite Elements), XFEM (Extended FE Method)
 - méthode des éléments naturels (Natural Element Method)
 - méthodes sans maillage (meshless methods)
 - méthodes de réduction de modèle

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \alpha_i = [\mathbf{w}(\mathbf{x})] \cdot [\alpha] \quad [\alpha] \in \mathcal{R}^n$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

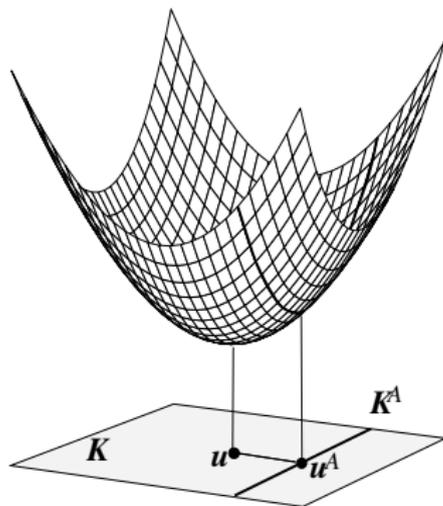
Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

The approximate solution $\mathbf{u}^A \in \mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$ minimises the strain energy potential over the subset \mathcal{K}_A of admissible displacement fields, i.e. :

$$\mathbf{u}^A = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}_A} \mathcal{U}_p[\mathbf{v}].$$



Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Displacement field and unknowns :

$$\mathbf{v}[\boldsymbol{\alpha}] = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{w}_m, \quad [\boldsymbol{\alpha}] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]^T \in \mathbb{R}^M$$

potential strain energy

$$\mathcal{U}_p(\mathbf{v}[\boldsymbol{\alpha}]) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\alpha}]^T \cdot \mathbf{K} \cdot [\boldsymbol{\alpha}] - [\boldsymbol{\beta}]^T \cdot [\boldsymbol{\alpha}].$$

with stiffness matrix :

$$K_{m\ell} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_m) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_\ell) dv \quad m, \ell = 1..M$$

- positive definite
- symmetric

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$[\alpha] = \arg \min_{[\alpha] \in \mathbb{R}^M} \mathcal{U}_p(\mathbf{v}[\alpha])$$

Potential strain energy

$$\mathcal{U}_p(\mathbf{v}[\alpha]) = \frac{1}{2} [\alpha]^T \cdot \mathbf{K} \cdot [\alpha] - [\beta]^T \cdot [\alpha].$$

Equation

$$\mathbf{K} \cdot [\alpha] - [\beta] = [0] \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[\alpha] = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{w}_m, \quad (25)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- basis functions of $L^2(\Omega)$
 - polynomials - \mathbf{K} full matrix and badly conditioned (unstable numerical inversion) :

degree n	eigenvalues				
3	591.	3.52	0.23		
5	9148.	150.	2.81	0.28	0.01
7	$1.19 \cdot 10^7$	9329	...	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$
9	$1.48 \cdot 10^9$	665281.	...	$7 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$

- \sin, \cos - particular domain, \mathbf{K} full matrix
- finite elements
 - polynomials
 - domain partition \longrightarrow continuous on subdomains

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Eléments finis

Bars and
Trusses

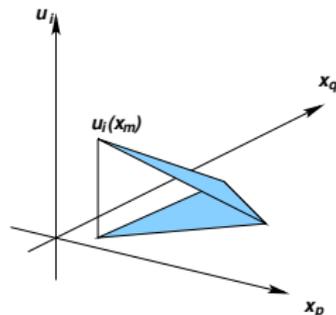
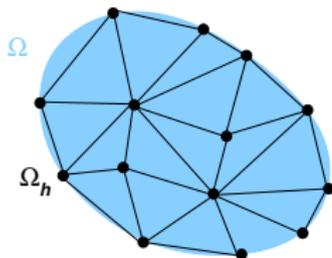
EF = Rayleigh-Ritz/Galerkin avec une interpolation de déplacements nodaux $u_i(\mathbf{x}_m)$.

$\mathbf{u} \in \mathcal{K}_A(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$ si et seulement si $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$ et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{m=1}^M q_{i+3(m-1)} \mathbf{N}_m(\mathbf{x}),$$

$$u_j(\mathbf{x}_m) = q_{i+3(m-1)}$$

$n = 3m$ en 3D



- $\Omega_h \rightarrow \Omega$ quand $h \rightarrow 0$
- $\mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}$ quand $h \rightarrow 0$

Formulation matricielle des équations éléments finis

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{K}_A(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{f}^D \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{t}^D \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0 \quad (26)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_A(0, \mathbf{S}^D)$$

Equations discrétisées :

$$[\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{q}] = [\mathbf{F}]$$

$$[\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{q}] = [\mathbf{q}]^D$$

On peut montrer que :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}]$$

Contexte

Objectifs

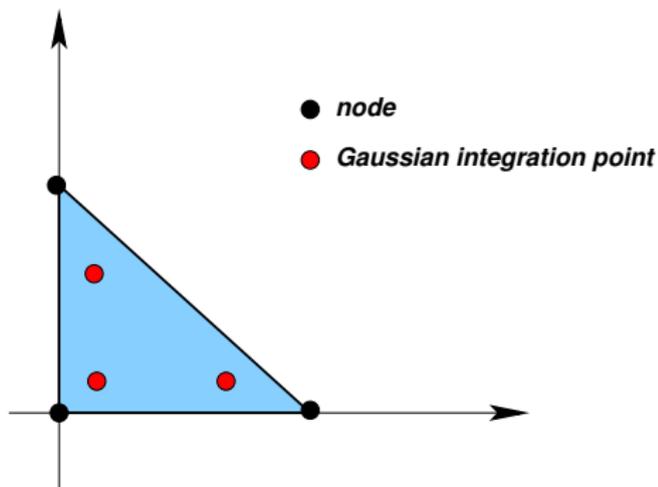
Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses



nodes

$$\begin{array}{l} [\mathbf{u}] \rightarrow [\mathbf{B}] \rightarrow \\ [\mathbf{f}] \leftarrow [\mathbf{B}] \leftarrow \end{array}$$

Gauss points for integration

$$\begin{array}{l} [\boldsymbol{\varepsilon}] \\ [\boldsymbol{\sigma}] \end{array}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Continuous

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{u} & & \boldsymbol{\sigma} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\mathbf{u} & \longleftrightarrow & \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \longleftrightarrow \mathcal{P}_i(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_e(\mathbf{v}) = 0 \\
 \mathbf{u} \in \mathcal{K}_A(\mathbf{u}^D, \partial\Omega^d) & & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_A(\mathbf{0}, \partial\Omega^d)
 \end{array}$$

Discrete

$$\begin{array}{ccc}
 [\mathbf{u}] & & [\boldsymbol{\sigma}] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\boldsymbol{\varepsilon}] = [\mathbf{B}][\mathbf{u}] & \longleftrightarrow & [\mathbf{C}][\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{\sigma}] \longleftrightarrow [\mathbf{B}]^T[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^D \\ \mathbf{t}^D \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{P}][\mathbf{u}] = [\mathbf{u}]^D & &
 \end{array}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- similar structure in all frameworks
- adjoint differential operator \longleftrightarrow transpose matrix
- unique solution due to convexity, i.e. positive definiteness of the energy

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

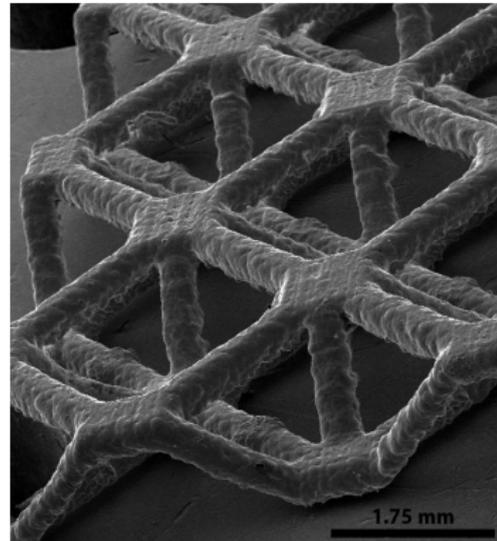
Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses



Crane and Bridge



nanocrystalline Ni around a rapid prototyped acrylic photopolymer micro-truss (Glenn D. Hibbard - U Toronto)

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

truss = assembly of m linear elastic bars
connected through n nodes

2D space under cartesian coordinates (x, y)

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$$

- L and ℓ : initial and actual length
- \mathbf{d} : direction (unit vector)
- \mathbf{u} : nodal displacement
- e : elongation
- ε : strain
- s : internal force
- σ : stress
- \mathbf{f} : external nodal forces

Figure

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- **kinematics** : elongation / strains
- **constitutive law** : linear elasticity
- **balance of forces** : stresses / imposed tractions

- **virtual power** : weak form of balance
- **energy** : minimum and maximum principle
- **boundary conditions** : imposed displacements

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Figure

$$\mathbf{e}_p = \ell_p - L_p = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \quad (27)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}_p \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cos \theta_p & \sin \theta_p & \cdot & \cdot & \cdot & -\cos \theta_p & -\sin \theta_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{ix} \\ u_{iy} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

The nodal displacement field can :

- include information about the encastred nodes, as tacitely done up to now, or
- consider the truss as free and consider an additional constraint for the displacement field :

$$\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}^D \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{kx} \\ u_{ky} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ u_{kx}^D \\ u_{ky}^D \\ \dots \end{bmatrix} \quad (31)$$

Contexte

Objectifs

Remarques sur les milieux continus

Rappels sur le PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and Trusses

End traction : $\mathbf{t}_i^{(p)} = s_p \mathbf{n}_p$

Balance of forces :

$$\sum_{p \in i} s_p \mathbf{n}_p = \mathbf{f}_i \quad (32)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} = \mathbf{f} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ t_{ix} \\ t_{iy} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos \theta_p & \cdot & \cdot & \cdot & -\cos \theta_q & \cdot & \cdot & \cdot & -\cos \theta_q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sin \theta_p & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin \theta_q & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin \theta_q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ s_p \\ \cdot \\ s_q \\ \cdot \\ s_r \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Bars

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} \mathbf{e} = \frac{EA}{L} \mathbf{e} \quad (35)$$

1D bar internal forces vs. 3D stresses

$$\sigma = \frac{\mathbf{s}}{A} \quad \varepsilon = \frac{\mathbf{e}}{L} \quad \sigma = \mathbf{E} \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_p & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_m \end{bmatrix} \quad (36)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (37)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (38)$$

Structure of the equations :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{u} & & \mathbf{s} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{u} & \longleftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{e} = \mathbf{s} \longleftrightarrow & \mathbf{A}^T \mathbf{s} = \mathbf{f} \\
 \text{kinematically} & & \text{statically} \\
 \text{admissible fields} & & \text{admissible fields}
 \end{array} \quad (39)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}$$

K - stiffness matrix

- symmetric, (existence of an energy potential)
- positive definite (stability of the structures)

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$P_{ext}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^T \mathbf{v} = \sum_{i \in \text{nodes}} \mathbf{f}_i^T \mathbf{v}_i \quad (40)$$

$$P_{int}(\mathbf{v}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{e}[\mathbf{v}] = \sum_{i \in \text{nodes}} -s_i \cdot e_i \quad (41)$$

Theorem : Principle of virtual power

$$P_{ext}(\mathbf{v}) + P_{int}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}$$

- balance :
- Virtual power :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} = \mathbf{f} \quad (42)$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{s})^T \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \quad (43)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continusRappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

$$\mathcal{U}_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (45)$$

Theorem : Minimum Principle for the Energy

At equilibrium the vector of nodal displacements \mathbf{u} minimizes the potential energy \mathcal{U}_p over all admissible displacements fields :

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u}' \in \mathcal{C}} \mathcal{U}_p(\mathbf{u}')$$

Complementary energy and Castigliano's principle

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

At equilibrium the vector of internal tensile forces \mathbf{s} maximizes the complementary energy \mathcal{U}_p^* over all statically admissible fields

$$\mathcal{U}_p^*(\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s} \quad (46)$$

\mathbf{s}' admissible, i.e satisfying the balance of forces :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s}' = \mathbf{f}$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Theorem : Minimum Principle under displacement constraints

At equilibrium the vector of nodal displacements \mathbf{u} minimizes the potential energy \mathcal{U}_p over all admissible displacements fields, i.e. subject to the kinematical constraint : $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}^D$:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u}' \in \mathcal{C}(\mathbf{u}^D)} \mathcal{U}_p(\mathbf{u}')$$

The associated Lagrangian functional is defined as :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{U}_p^*(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{u}^D) \quad (47)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

Lagrangian functional

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{U}_p^*(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{u}^D) \quad (48)$$

saddle point of Lagrangian functional :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{u}^D \end{bmatrix} \quad (50)$$

Contexte

Objectifs

Remarques
sur les milieux
continus

Rappels sur le
PPV

Domaines 3D

Éléments finis

Bars and
Trusses

- quadratic energy conducts to linear system of equations
- energy is well defined
- natural symmetry of the structure of equations with : kinematically and statically admissible fields
- natural solution looks like finite difference equations between the nodes