

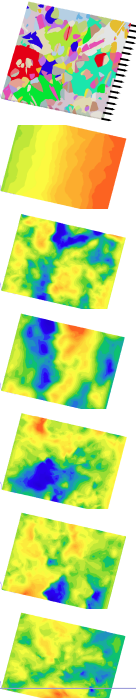
La mécanique partielle des structures et des microstructures

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech
David.Ryckelynck@mines-paristech.fr

Juillet 2013

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

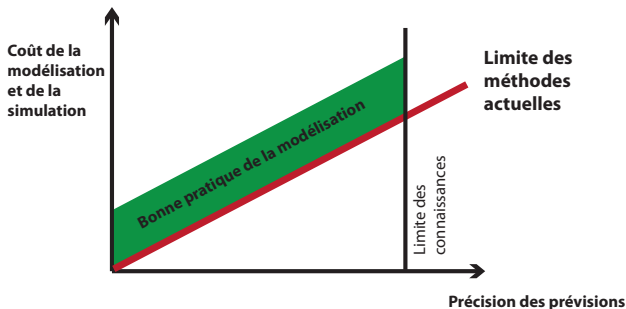
Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Assertion pour la mécanique partielle

La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Une compétition précision/temps de calcul



- ▶ Une méthode impose une borne inférieure aux coûts des prévisions.
- ▶ L'utilisateur idéal construit un modèle proche de cette borne (zone verte).
- ▶ La réduction d'ordre des modèles doit permettre de baisser la ligne rouge en réduisant le nombre d'équations à résoudre (**complexité**).

Une compétition précision/temps de calcul

Question fondamentale :

Comment concilier la modélisation à fort contenu physique et la modélisation à complexité faible ?

Une compétition précision/temps de calcul

Question fondamentale :

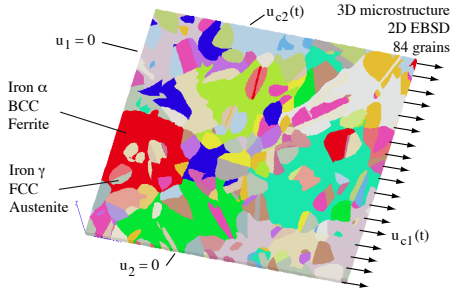
Comment concilier la modélisation à fort contenu physique et la modélisation à complexité faible ?

Réponses proposées avec la **mécanique partielle** :

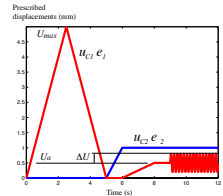
- ▶ Réfléchir au choix du paramétrage de l'état des systèmes en thermomécanique des milieux continus solides.
- ▶ Réfléchir au choix de l'étendu du système isolé ainsi qu'au traitement des conditions aux limites.
- ▶ Exploiter la mémoire de simulations antérieures pour réduire le nombre d'équations à résoudre,
- ▶ Développer des indicateurs d'erreur (en développement).

Exemple de modèle à forte complexité : agrégat cristallin élastoplastique

La complexité physique des modèles mécaniques est croissante.



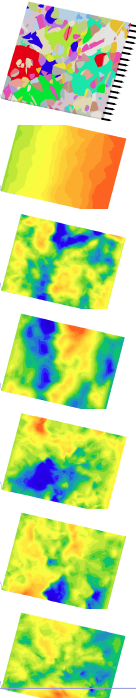
ANR MELOXEL project: pitting corrosion of a duplex stainless steel
V. Vignal, H. Pelletier, G. Cailletaud, D. M. Benziane, D. Ryckelynck



L'acier inoxydable duplex est composé de grains d'austénites et de grains de ferrite ($20 \mu m$). Dans chaque grain, il y a des systèmes de glissement orientés.

La plasticité (les glissements) peut induire une piqûration. Il est donc important de **comprendre** comment se développe la plasticité en surface.

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Assertion pour la mécanique partielle

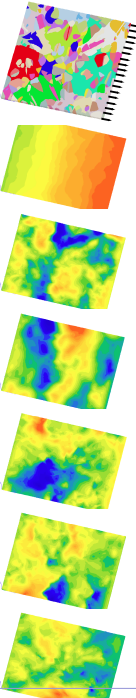
La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Le passage de la mécanique des systèmes articulés à la mécanique des milieux continus s'opère par un changement radical de méthode.

Le **paramétrage géométrique et cinématique** précède la formulation des équations du mouvement des systèmes articulés.

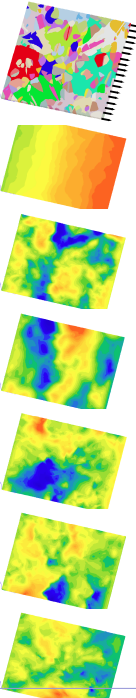


Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Le passage de la mécanique des systèmes articulés à la mécanique des milieux continus s'opère par un changement radical de méthode.

Le **paramétrage géométrique et cinématique** précède la formulation des équations du mouvement des systèmes articulés.

Alors que ce paramétrage est l'une des dernières étapes de modélisation en mécanique des milieux continus, avec entre autre la prise en compte de conditions aux limites.



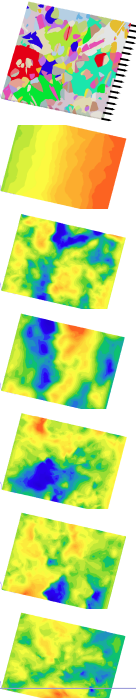
Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Le passage de la mécanique des systèmes articulés à la mécanique des milieux continus s'opère par un changement radical de méthode.

Le **paramétrage géométrique et cinématique** précède la formulation des équations du mouvement des systèmes articulés.

Alors que ce paramétrage est l'une des dernières étapes de modélisation en mécanique des milieux continus, avec entre autre la prise en compte de conditions aux limites.

En mécanique des milieux continus on adopte une **approche générique** que l'utilisateur particularise lors des dernières étapes de modélisation. Ce type d'approche est bien adapté à l'utilisation de **programmes informatiques**, comme ceux pour le calcul par éléments finis.



Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Le passage de la mécanique des systèmes articulés à la mécanique des milieux continus s'opère par un changement radical de méthode.

Le **paramétrage géométrique et cinématique** précède la formulation des équations du mouvement des systèmes articulés.

Alors que ce paramétrage est l'une des dernières étapes de modélisation en mécanique des milieux continus, avec entre autre la prise en compte de conditions aux limites.

En mécanique des milieux continus on adopte une **approche générique** que l'utilisateur particularise lors des dernières étapes de modélisation. Ce type d'approche est bien adapté à l'utilisation de **programmes informatiques**, comme ceux pour le calcul par éléments finis.

L'approche générique est source de complexité pour l'ingénieur !

En mécanique des milieux continus les modèles sont très génériques

Rappel succinct des équations de la théorie des milieux continus en mécanique (HPP, élasticité linéaire, sans contact) :

On cherche $\underline{u}(M, t) \in \mathcal{U}$ (suffisamment régulier en espace), pour $M \in \Omega$ et $t \in [0, T]$ tel que :

$$\underline{u} = \underline{u}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\underline{u}} = \underline{v}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (2)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \forall M \in \partial_u \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\mathbf{Grad}}^T(\underline{u})) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (4)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}^d = \rho \underline{\ddot{u}} \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (5)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \forall M \in \partial_F \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (6)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (7)$$

En mécanique des milieux continus les modèles sont très génériques

Rappel succinct des équations de la théorie des milieux continus en mécanique (HPP, élasticité linéaire, sans contact) :

On cherche $\underline{u}(M, t) \in \mathcal{U}$ (suffisamment régulier en espace), pour $M \in \Omega$ et $t \in [0, T]$ tel que :

$$\underline{u} = \underline{u}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\underline{u}} = \underline{v}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (2)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \forall M \in \partial_u \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\mathbf{Grad}}^T(\underline{u})) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (4)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}^d = \rho \underline{\ddot{u}} \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (5)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \forall M \in \partial_F \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (6)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (7)$$

A ce stade, Ω n'a pas de forme.

En mécanique des milieux continus les modèles sont très génériques

Rappel succinct des équations de la théorie des milieux continus en mécanique (HPP, élasticité linéaire, sans contact) :

On cherche $\underline{u}(M, t) \in \mathcal{U}$ (suffisamment régulier en espace), pour $M \in \Omega$ et $t \in [0, T]$ tel que :

$$\underline{u} = \underline{u}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\underline{u}} = \underline{v}_o \quad \forall M \in \Omega, \quad t = 0 \quad (2)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \forall M \in \partial_u \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\text{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\text{Grad}}^T(\underline{u})) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (4)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}^d = \rho \underline{\ddot{u}} \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (5)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d \quad \forall M \in \partial_F \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (6)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathcal{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T] \quad (7)$$

A ce stade, Ω n'a pas de forme. On sait que cette théorie est trop générale pour les milieux élancés comme les poutres. D'autres simplifications sont possibles...

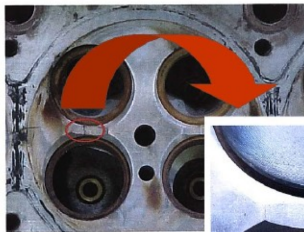
Illustration (thermo-élasto-viscoplasticité quasi-statique)

Fatigue of an Aluminium Cylinder Head

Compressive stresses at
shrunk-on valve seating

Temperature cycles

- 100°C at water channels
- up to 300°C at combustion chamber surface



Material

Cast Aluminium, for
example AS7U3G T5

Damage type

thermomechanical
fatigue damage

Ansys User Conference 2011, Stuttgart



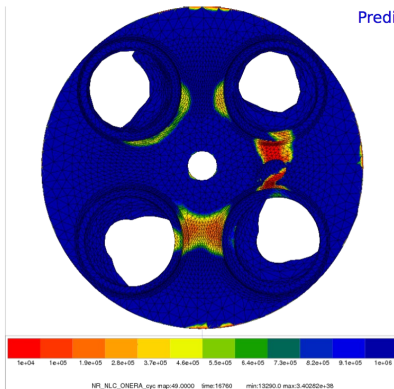
FIGURE: Culasse de moteur thermique, partie haute de la chambre de combustion [N. Osypov].

Avec la méthode des éléments finis, la cinématique
et la géométrie sont décrites juste avant la
simulation !

Lifetime Assessment: Creep-Fatigue Interaction

50th cycle **with aging state variable**

Predicted Lifetime: **13.000 cycles**



Le caractère générique de la méthode des éléments finis induit une complexité

Avec un même maillage, une même description cinématique, on peut traiter un très grand nombre de problèmes très différents, en faisant varier :

- les conditions aux limites,
- les lois de comportement,
- des paramètres externes comme un champ de température.

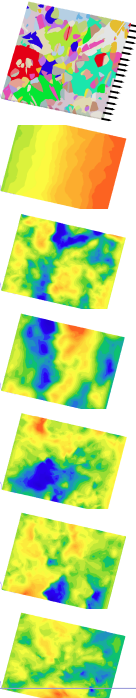
Le caractère générique de la méthode des éléments finis induit une complexité

Avec un même maillage, une même description cinématique, on peut traiter un très grand nombre de problèmes très différents, en faisant varier :

- les conditions aux limites,
- les lois de comportement,
- des paramètres externes comme un champ de température.

C'est utile :

- aux ingénieurs pour réaliser des études paramétriques,
- aux scientifiques pour caractériser (identifier) des lois de comportement avec effet de structure (cas de l'acier inox).



Le caractère générique de la méthode des éléments finis induit une complexité

Avec un même maillage, une même description cinématique, on peut traiter un très grand nombre de problèmes très différents, en faisant varier :

- les conditions aux limites,
- les lois de comportement,
- des paramètres externes comme un champ de température.

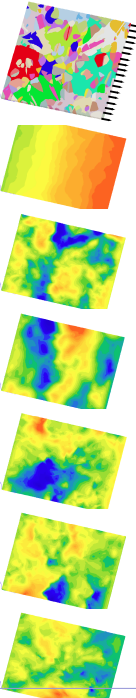
C'est utile :

- aux l'ingénieurs pour réaliser des études paramétriques,
- aux scientifiques pour caractériser (identifier) des lois de comportement avec effet de structure (cas de l'acier inox).

Les études paramétriques se font dans un domaine restreint, il est donc possible de **repenser le paramétrage cinématique** des modèles éléments finis, **au cas par cas, mais avec méthode.**

C'est l'objet des méthodes de réduction d'ordre des modèles.

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Assertion pour la mécanique partielle

La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Considérons le cas des systèmes discrets (éléments finis par exemple). Les inconnues cinématiques sont $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ ($\mathcal{N} > 10^5$).

Modèle de référence (base complète) en dynamique des structures :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (8)$$

Recherche de solutions du problème homogène ($\mathbf{F} = 0$) par **séparation des variables d'espace et de temps** :

$$\mathbf{q} = \phi \mathbf{a}(t), \quad \phi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{C}, \quad \dot{\phi} = 0 \quad (9)$$

On obtient une base de **modes propres** $(\phi_k)_{k=1, \dots, \mathcal{N}}$ avec :

$$(\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \phi_k = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\phi_k^T \mathbf{K} \phi_k}{\phi_k^T \mathbf{M} \phi_k} = \lambda_k, \quad \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \quad (11)$$

Propriété : $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ et $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, donc $\exists \mathbf{L}$, $\det(\mathbf{L}) \neq 0$ tel que : $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, et $(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T} - \lambda_k \mathbf{I}) \boldsymbol{\Upsilon}_k$, avec $\boldsymbol{\Upsilon}_k = \mathbf{L}^T \phi_k$.

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Il est alors possible de rechercher une solution du problème pour $\mathbf{F} \neq 0$ à l'aide d'une base tronquée : $(\phi_k)_{k=1,\dots,N < \mathcal{N}}$

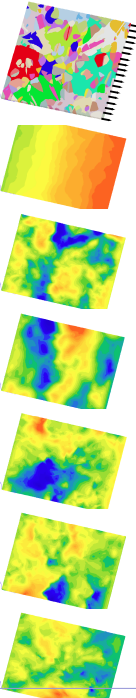
$$\mathbf{q}_{ROM}(t) = \sum_{k=1}^N \phi_k a_k(t), \quad (12)$$

où $(a_k)_{k=1,\dots,N}$ est la liste des coordonnées réduites. **Ce sont les nouveaux paramètres cinématiques** du modèle mécanique.

Adoptons la formulation matricielle suivante :

$$\mathbf{q}_{ROM}(t) = \mathbf{A} \mathbf{a}(t), \quad \mathbf{A} = [\phi_1, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N}, \quad \mathbf{a}^T(t) = [a_1(t), \dots, a_N(t)] \quad (13)$$

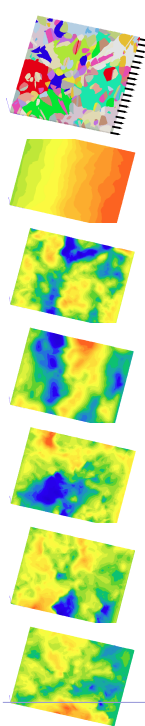
$\mathbf{A}$ est une matrice rectangulaire. Elle contient des modes qui ont un **fort sens physique**.



Quelques remarques sur la formulation matricielle de l'orthogonalité

Soient $\phi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$.

$$\phi \perp \mathbf{R} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \phi_i R_i = 0 \Leftrightarrow \phi^T \mathbf{R} = 0$$



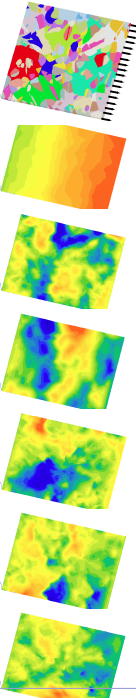
Quelques remarques sur la formulation matricielle de l'orthogonalité

Soient $\phi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$.

$$\phi \perp \mathbf{R} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \phi_i R_i = 0 \Leftrightarrow \phi^T \mathbf{R} = 0$$

Soit $(\phi_k)_{k=1,\dots,N}$ une liste de vecteurs rangés en colonne dans une matrice $\mathbf{A}$.

$$\phi_k \perp \mathbf{R} \forall k \in \{1, \dots, N\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \dots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} \mathbf{R}$$



Quelques remarques sur la formulation matricielle de l'orthogonalité

Soient $\phi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$.

$$\phi \perp \mathbf{R} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \phi_i R_i = 0 \Leftrightarrow \phi^T \mathbf{R} = 0$$

Soit $(\phi_k)_{k=1,\dots,N}$ une liste de vecteurs rangés en colonne dans une matrice $\mathbf{A}$.

$$\phi_k \perp \mathbf{R} \forall k \in \{1, \dots, N\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{R} = 0$$

Les dimensions des matrices sont pour $\mathbf{A}^T : N \times \mathcal{N}$; et pour $\mathbf{R} : \mathcal{N} \times 1$.

Formulation de Galerkin des équations en base réduite

La formulation des équations du mouvement en base réduite s'obtient par la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathbf{A} \perp (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{ROM} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) \quad (14)$$

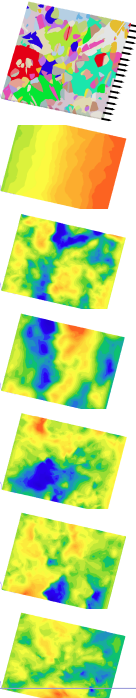
ou

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{ROM} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{q}_{ROM}(t) = \mathbf{A} \mathbf{a}(t) \quad (15)$$

Les modes propres étant orthogonaux, on obtient un système linéaire diagonal (découplé) :

$$\mathbf{M}_\phi \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_\phi \mathbf{a} = \mathbf{F}_\phi, \quad \mathbf{M}_\phi = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}, \quad \mathbf{K}_\phi = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}, \quad \mathbf{F}_\phi = \mathbf{A}^T \mathbf{F} \quad (16)$$

La solution est triviale puisqu'il s'agit de N équations indépendantes.



Formulation de Galerkin des équations en base réduite des problèmes non linéaires

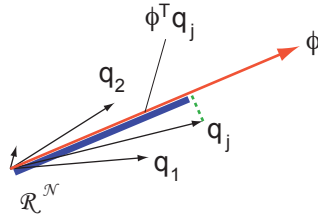
Les problèmes non linéaires, comme ceux de plasticité, requièrent la résolution d'une suite de systèmes linéaires :

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (17)$$

Une projection en base modale tronquée n'est pas forcément adaptée à ce type de problème.

La méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD en anglais) permet de construire des **bases réduites empiriques** (ou bases POD). Elles sont extraites de résultats de simulations.

Schéma de construction des bases POD (Proper Orthogonal Decomposition)



On cherche les modes empiriques qui maximisent leur projection sur des vecteurs connus $(\mathbf{q}_j)_{j=1, \dots}$:

$$\mu(\phi) = \max_{\phi \in \mathcal{R}^N} \frac{\sum_j (\phi^T \mathbf{q}_j)^2}{\phi^T \phi} \quad (18)$$

C'est un problème aux valeurs propres (plus précisément SVD). On choisit $\mu_j \geq \mu_{j+1}$.

Exemple de modes empiriques obtenus par le méthode POD

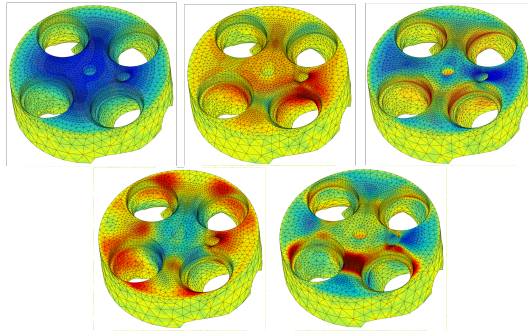
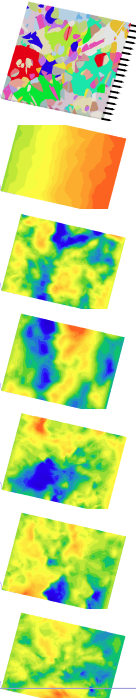


FIGURE: Cinq premiers modes empiriques (U_3) d'une culasse de moteur thermique, ils ont été extraits de solutions du problème élastoplastique. Erreur de représentation $< 1\%$.

A une colonne de **A** correspond une déformée modale ci-dessus.



Formulation de Galerkin des équations en base réduite des problèmes non linéaires

La formulation Galerkin des équations du mouvement en base réduite s'obtient par la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathbf{A} \perp (\mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) \quad (19)$$

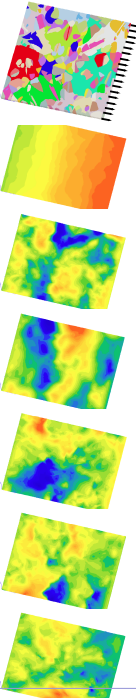
ou

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{q}_{ROM}(t) = \mathbf{A} \mathbf{a}(t) \quad (20)$$

Il n'y a pas de propriété physique d'orthogonalité des modes empiriques. La solution du système réduit n'est pas explicite.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{F} \quad (21)$$

De plus, il s'agit d'une suite de problèmes réduits à assembler et à résoudre. Or les produits $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^T \mathbf{F}$ ont une complexité qui dépend de $\mathcal{N}$.



Formulation de Galerkin des équations en base réduite des problèmes non linéaires

La formulation Galerkin des équations du mouvement en base réduite s'obtient par la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathbf{A} \perp (\mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) \quad (19)$$

ou

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{q}_{ROM}(t) = \mathbf{A} \mathbf{a}(t) \quad (20)$$

Il n'y a pas de propriété physique d'orthogonalité des modes empiriques. La solution du système réduit n'est pas explicite.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{F} \quad (21)$$

De plus, il s'agit d'une suite de problèmes réduits à assembler et à résoudre. Or les produits $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^T \mathbf{F}$ ont une complexité qui dépend de $\mathcal{N}$.

En mécanique fortement non linéaire l'approche Galerkin n'est pas suffisante pour réduire la complexité des équations

Quelques explications à partir d'un cas linéaire

Formulation variationnelle classique (Galerkin) :

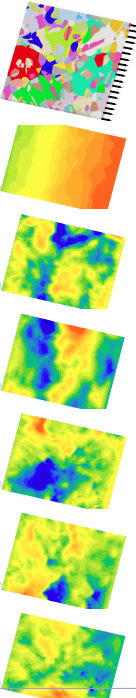
$$\mathbf{A}^T (\mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) - \mathbf{F}(t)) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{F}(t)$$

$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ matrice carrée de dimension $N \times N < \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Mais il faut $2 N^2 \mathcal{N} + 2 \mathcal{N} \omega N$ opérations pour l'assemblage de la matrice réduite. Ici ω est la largeur de bande de la matrice $\mathbf{K}$.

La complexité numérique dépend de $\mathcal{N}$.

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Assertion pour la mécanique partielle

La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Assertion pour la mécanique partielle

Pour trouver la formulation en base réduite de dimension N , il est suffisant d'exploiter un sous-système du problème de référence à l'aide d'une matrice de sélection $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} \mathbf{R} = \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) - \mathbf{Z} \mathbf{F}(t) \quad (22)$$

où $\mathbf{Z}$ est une matrice identité tronquée, avec $m < \mathcal{N}$ lignes :

$$(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})_{ij} = \delta_{ij} S_i \quad \text{et} \quad \text{si } i \in \mathcal{F} S_i = 1, \text{ sinon } S_i = 0$$

Exemple, pour la sélection de 3 équations parmi 6 :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \{2, 4, 5\}$$

Assertion pour la mécanique partielle

Pour trouver la formulation en base réduite de dimension N , il est suffisant d'exploiter un sous-système du problème de référence à l'aide d'une matrice de sélection $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} \mathbf{R} = \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) - \mathbf{Z} \mathbf{F}(t) \quad (22)$$

où $\mathbf{Z}$ est une matrice identité tronquée, avec $m < \mathcal{N}$ lignes :

$$(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})_{ij} = \delta_{ij} S_i \quad \text{et} \quad \text{si } i \in \mathcal{F} \text{ } S_i = 1, \text{ sinon } S_i = 0$$

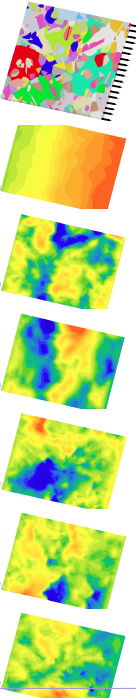
Exemple, pour la sélection de 3 équations parmi 6 :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \{2, 4, 5\}$$

Différentes approches sont en cours de développement (début en 2004, 2005), on a :

- ▶ formulation par reconstruction d'un résidu complet dans $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ (gappy POD, POD-EIM)
- ▶ formulation par hyper-réduction

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

Assertion pour la mécanique partielle

La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Méthode d'Hyper-réduction dans le cas linéaire

Rappel de la formulation de Galerkin :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{F}(t)$$

Le rang de $\mathbf{K} \mathbf{A}$ doit être N pour obtenir un problème réduit bien posé (à solution unique).

Il suffit d'extraire m ($N \leq m \leq \mathcal{N}$) équations de rang N , avec $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times \mathcal{N}}$ tel que :

$$\text{rang}(\mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A}) = N \quad (23)$$

Méthode d'Hyper-réduction dans le cas linéaire

Principe

$$\mathbf{Z} \mathbf{R} \perp \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad (24)$$

On en déduit la formulation Hyper-réduite :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{F}(t) \quad (25)$$

La complexité numérique du produit $\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A}$ est $2 \omega m N + 2 m N^2$.
Elle ne dépend plus de $\mathcal{N}$.

Méthode d'Hyper-réduction dans le cas linéaire

Principe

$$\mathbf{Z} \mathbf{R} \perp \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad (24)$$

On en déduit la formulation Hyper-réduite :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{F}(t) \quad (25)$$

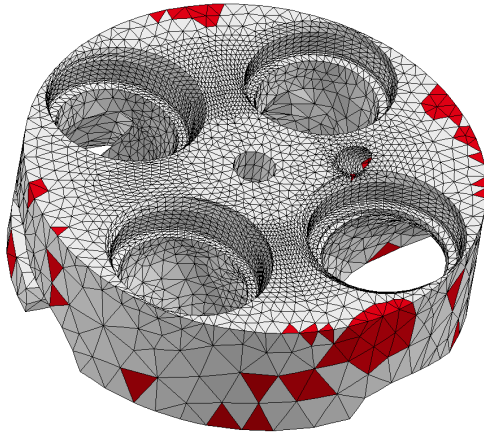
La complexité numérique du produit $\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{K} \mathbf{A}$ est $2 \omega m N + 2 m N^2$.
Elle ne dépend plus de $\mathcal{N}$.

La matrice de la base réduite tronquée, notée $\mathbf{A}_Z$, est nulle en dehors d'un domaine Ω_Π .

$$\mathbf{A}_Z = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad , \text{ et } \mathbf{A}_Z \perp (\mathbf{K} \mathbf{q}_{ROM} - \mathbf{F})$$

Nous isolons un domaine réduit pour écrire les conditions d'équilibre.

Exemple de maillage partiel



Le domaine réduit, isolé pour l'analyse en base réduite, est représenté en rouge. Seuls les éléments rouges sont pris en compte dans cette analyse. Il y a ici des transformations importantes sur les bords du modèle de référence.

Exemple de résultat reconstruit à partir du maillage partiel

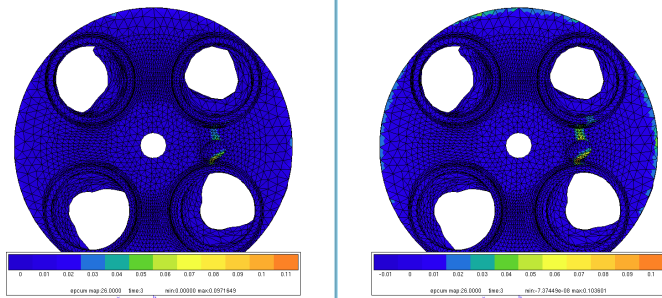
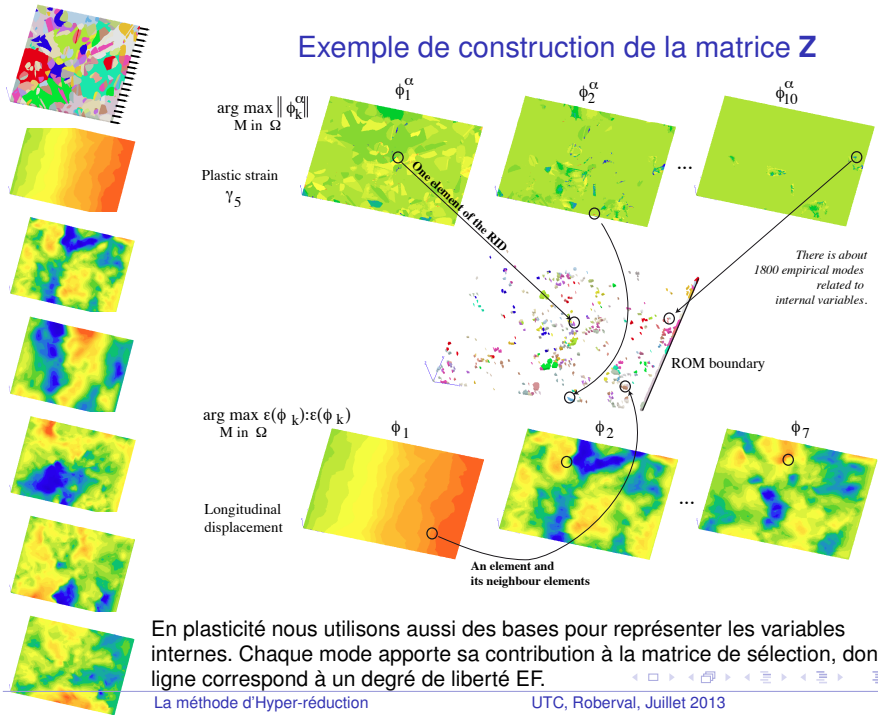


FIGURE: Prévision EF en base complète / prévision par hyper réduction, représentation d'une variable de plasticité cumulée.

Tous les champs sont reconstruits à partir des prévisions obtenues sur le maillage partiel. Speed up = 20.

Exemple de construction de la matrice $\mathbf{Z}$



En plasticité nous utilisons aussi des bases pour représenter les variables internes. Chaque mode apporte sa contribution à la matrice de sélection, dont une ligne correspond à un degré de liberté EF.

Exemple de simulation par Hyper-réduction

Prévision de l'intensité de certains glissement plastiques.

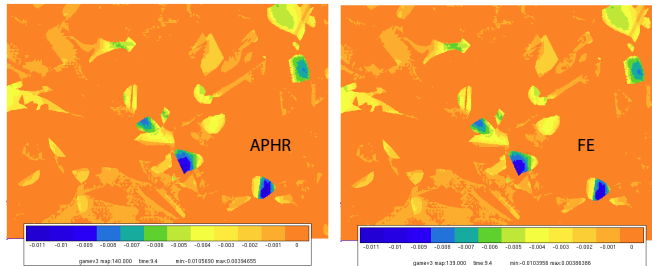


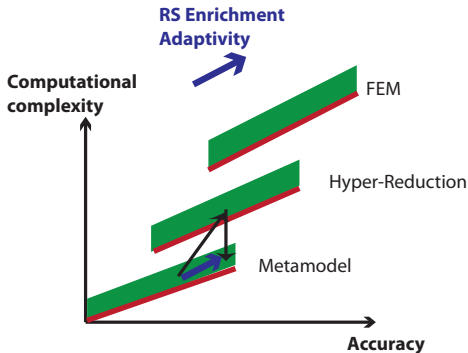
FIGURE: Variable du troisième système de glissement.

Erreur < 2.5%, Speed up = 17.7.

Bien que seule une partie du domaine soit isolée pour écrire l'équilibre réduit, les champs sont reconstruits sur tout le domaine.

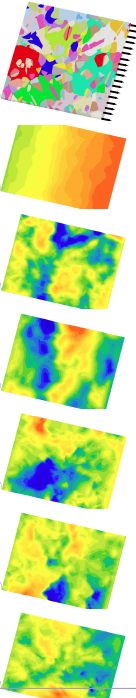
Une compétition précision/temps de calcul

Il faut avoir de la mémoire pour gagner du temps ! Mais une base réduite seule ne suffit pas à éliminer la dépendance à la complexité du problème de référence.



La mécanique partielle fournit des modèles intermédiaires en terme de précision et de complexité entre la méthode des éléments finis et les méthodes de surface de réponse qui ne sont que la mémoire des calculs antérieurs.

Plan



Une compétition précision/temps de calcul

Les modèles mécaniques sont-ils trop complexes ?

Qu'est ce qu'un modèle d'ordre réduit ?

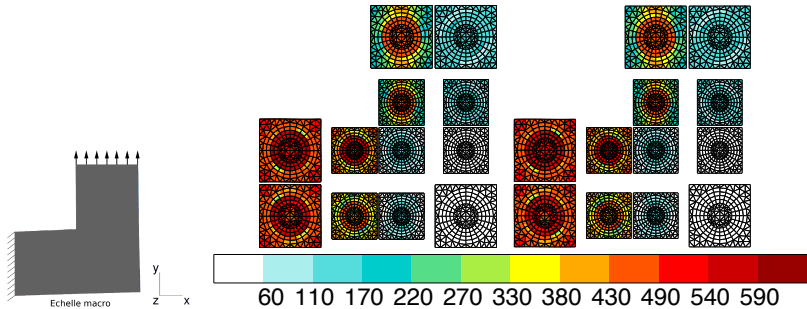
Assertion pour la mécanique partielle

La méthode d'Hyper-réduction

Perspectives

Perspectives

La mécanique partielle devrait participer à l'essor des modèles à forte complexité physique.



Comparaison de simulation de la contrainte de Von Mises par FE2-Hyper-réduite et FE2.

Nous devrions pouvoir factoriser des simulations réalisées par calcul multidimensionnel.

$$\underline{u}(M_{\text{micro}}, M_{\text{macro}}, t)$$

Perspectives

- ▶ Traiter des cas difficilement séparables comme en dynamique rapide.
- ▶ Développer l'approche multidimensionnelle pour le calcul multi-échelles.
- ▶ Développer l'approche multidimensionnelle pour les calculs de sensibilité.
- ▶ Faire du calcul intensif à factorisation d'opérations.

Workshop pour découvrir la réduction de modèle en mécanique des matériaux

1st International Workshop on Order-Reduction Methods for application to mechanics of materials (1st WORM 2013)

Aug. 25–28 2013, Bad Herrenalb, Germany

Scope

The prediction of the constitutive properties of microstructured materials using numerical methods is associated with a high demand in CPU time and memory. During the past two decades, order-reduction techniques have been given increased attention by both academia and industry. These methods can help to significantly reduce not only the computational time, but also the storage requirements (RAM and disk space) which are essential features when it comes to mechanics of materials. The workshop deals with this particular subdomain of model order-reduction for application to the mechanics of materials.

