

# Champ de déformation et de contraintes en pointe de fissure dans un monocristal

Sylvain FLOURIOT, Samuel FOREST

Ecole des Mines de Paris/CNRS

Centre des Matériaux/UMR 7633

B.P. 87, 91003 Evry Cedex, France

sylvain.flouriot@ensmp.fr, samuel.forest@ensmp.fr

## 1 Introduction et Rappels

### 1.1 Loi de Schmid

Les matériaux cristallins se déforment plastiquement à basse température par du glissement le long de plans cristallographiques. Dans une structure cristalline Cubique à Faces Centrées (CFC) (cf. figure 1) il existe 12 systèmes de glissement (cf. tableau 1) de plan  $\{111\}$  et de direction de glissement  $\langle 110 \rangle$ . Pour produire un glissement le long d'un plan cristallographique, il faut exercer une cisssion sur ce plan au moins égale à une valeur critique  $\tau_c$ , il s'agit de la loi de Schmid. Cette loi peut s'écrire :

$$\tau = \underline{\sigma} : \underline{m}^s = \underline{m}^s \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}^s = \tau_c \quad (1)$$

avec  $\underline{m}^s = \frac{1}{2} (\underline{m}^s \otimes \underline{n}^s + \underline{n}^s \otimes \underline{m}^s)$

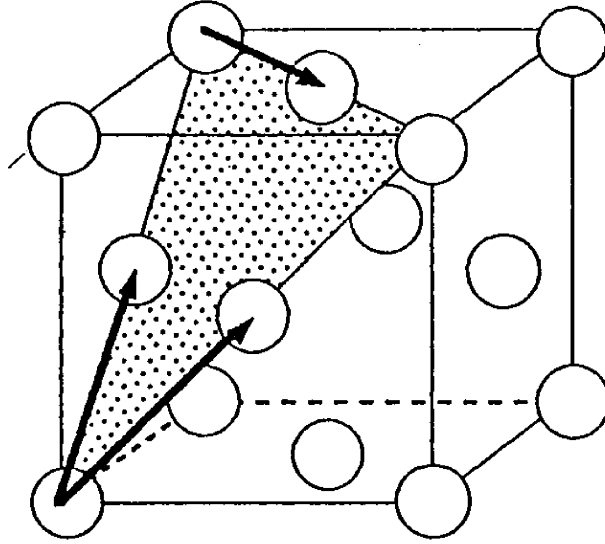


FIG. 1 – Illustration d'un des quatre plans de glissement octaédrique d'un cristal C.F.C.

### 1.2 Champ de Prandtl

On rappelle d'abord le champ en pointe de fissure dans le cas d'un matériau isotrope rigide-parfaitement plastique. En mode I et en déformation plane pour un matériau parfaitement plastique obéissant à un critère de

Système	Plan	Direction
1	(111)	$\begin{bmatrix} \bar{1}01 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} 011 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 110 \end{bmatrix}$
4	$(1\bar{1}1)$	$\begin{bmatrix} \bar{1}01 \end{bmatrix}$
5		$\begin{bmatrix} 011 \end{bmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} 110 \end{bmatrix}$
7	$(\bar{1}11)$	$\begin{bmatrix} 0\bar{1}1 \end{bmatrix}$
8		$\begin{bmatrix} 110 \end{bmatrix}$
9		$\begin{bmatrix} 101 \end{bmatrix}$
10	$(11\bar{1})$	$\begin{bmatrix} 110 \end{bmatrix}$
11		$\begin{bmatrix} 101 \end{bmatrix}$
12		$\begin{bmatrix} 011 \end{bmatrix}$

TAB. 1 – Liste des systèmes de glissement. La numérotation donnée correspond à celle employée dans le code de calcul par EF.

plasticité isotrope (von Mises ou Tresca) (cf. figure 2), le champ de contraintes en pointe de fissure peut être obtenu en utilisant le critère de plasticité et les équations d'équilibre. Pour un solide rigide plastique en déformation plane, l'incrément  $\dot{\varepsilon}_{33}^p = 0$ . Pour un critère de Mises par exemple, cela implique que la composante  $s_{33}$  du déviateur est nulle, ce qui implique

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (2)$$

L'équation de la surface de charge est alors

$$\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 = k^2 \quad (3)$$

avec  $k = R_0/\sqrt{3}$  pour un critère de Mises et  $k = R_0/2$  pour Tresca. On constate dans la pratique que ce résultat reste une approximation valide dans le cas élastique parfaitement plastique.

La solution peut être établie à l'aide du principe des lignes de glissement (méthode dite des caractéristiques). On montre alors comme l'indique la figure 3 que l'on distingue trois zones. Dans les deux zones  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  et  $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$  les composantes cartésiennes du tenseur des contraintes sont constantes et indépendantes de l'angle.

$$\begin{aligned}
0 \leq \theta \leq \pi/4 & \begin{cases} \sigma_{11} = \pi k \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = (2 + \pi)k \end{cases} \\
\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4 & \begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) k \\ \sigma_{r\theta} = k \\ \sigma_{rr} = \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) k \end{cases} \\
3\pi/4 \leq \theta \leq \pi & \begin{cases} \sigma_{11} = k \\ \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

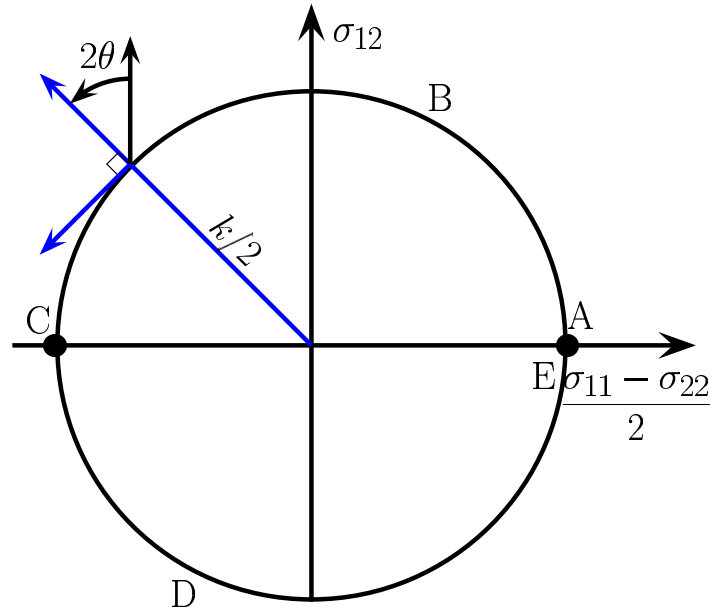


FIG. 2 – Critère de von Mises dans le plan  $(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2, \sigma_{12})$

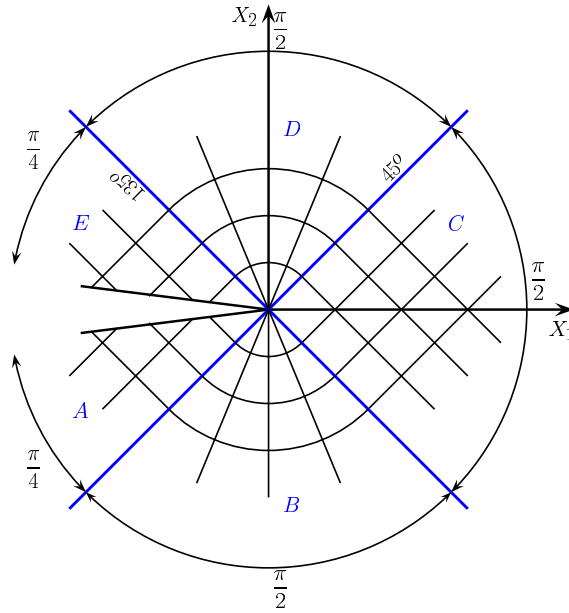


FIG. 3 – Champ de Prandtl

## 2 Champ de contraintes et de déformation en pointe de fissure dans un monocristal

Tout d'abord on considère un matériau élastique parfaitement plastique en déformations planes. Dans un monocristal C.F.C., la condition de déformation plane ne peut être respectée que dans un plan de symétrie de la

structure cristalline. Dans un CFC il n'existe que deux familles de plans de symétrie  $\{100\}$  et  $\{110\}$ .

## 2.1 Calculs par éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée pour déterminer le champ de contraintes et de déformations en pointe de fissure dans un monocristal. Les calculs sont effectués sur des maillages d'épouvettes CT16 (Compact Tension). Deux maillages sont proposés, un premier radial le second régulier. Ces deux maillages sont stockés dans le répertoire TP\_DEA\_MM\_2003/GEOF sous les noms CT16\_160\_radial.geof et CT16\_160\_regulier.geof. Pour les visualiser taper [Zmaster CT16\\_160\\_radial.geof](#) ou [Zmaster CT16\\_160\\_regulier.geof](#)

On s'intéresse dans un premier temps à une seule orientation du cristal. L'orientation choisie est  $(001)[110]$ . Le premier terme désigne le plan dans lequel se propage la fissure, le second la direction de propagation de la fissure (cf. figure 4). Les mises en données des calculs sont sauvegardées dans le repertoire TP\_DEA\_MM\_2003/INP les lois de comportement sont dans le repertoire TP\_DEA\_MM\_2003/MAT. Pour éditer ces fichiers faites :

[xemacs CT16\\_160\\_001\\_110\\_radial.inp](#) ou  
[xemacs CT16\\_160\\_001\\_110\\_regulier.inp](#)

[xemacs crystal.mat](#)

Pour lancer le calcul :

[Zrun CT16\\_160\\_001\\_110\\_radial.inp](#)  
[Zrun CT16\\_160\\_001\\_110\\_regulier.inp](#)

Pour dépouiller le calcul :

[Zmaster CT16\\_160\\_001\\_110\\_radial](#)  
[Zmaster CT16\\_160\\_001\\_110\\_regulier](#)

- Que pouvez vous dire de la déformation et des contraintes en pointe de fissure ? Pour cela on pourra dépouiller les contraintes le long d'un contour (lisset nommé contour).
- Identifier les systèmes de glissement actifs en pointe de fissure.
- Que dire de l'orientation des bandes ? On pourra comparer l'orientation des bandes au traces des plans de glissement actifs dans ces bandes. (cf. figure 5)

## 2.2 Analyse asymptotique

### 2.2.1 Déformations planes et super-systèmes

Seules certaines combinaisons de systèmes de glissement permet d'obtenir des déformations planes. Dans la suite sont énumérés les couples de systèmes permettant d'obtenir des déformations planes. Lorsque la quantité de glissement est identique pour les deux systèmes (pour des raisons de symétrie par exemple), chaque couple permet de définir un système de glissement effectif, dit super-système.  $\underline{N}$  et  $\underline{S}$  sont respectivement la normale au plan de glissement et la direction de glissement du super-système.

- système (1) :  $(001)[110] \left\{ \begin{array}{l} (\bar{1}11)[110] \\ (1\bar{1}1)[110] \end{array} \right.$

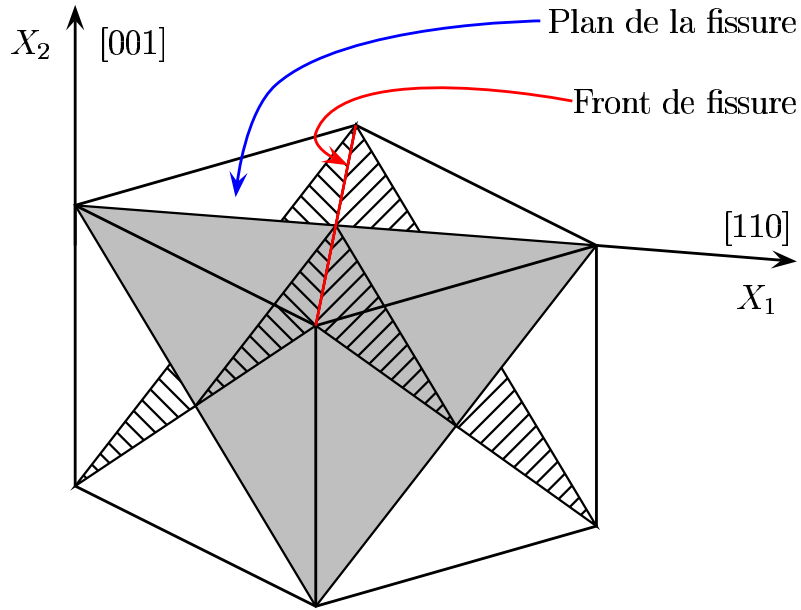


FIG. 4 – Fissure d'orientation (001)[110]

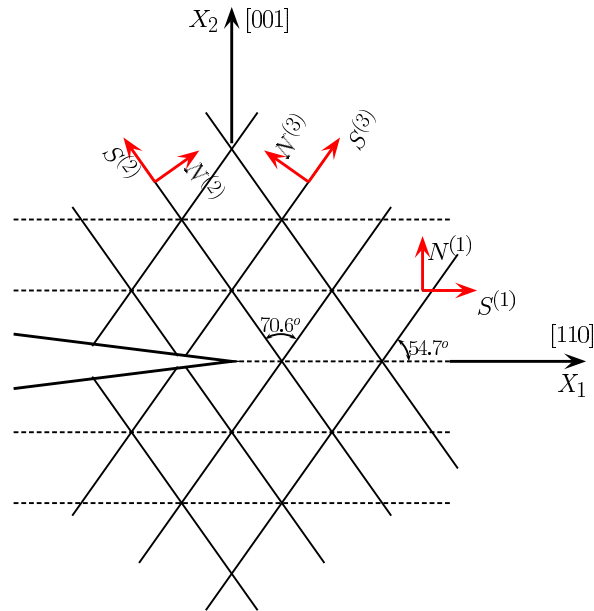


FIG. 5 – Traces des plans de glissement pour l'orientation (001)[110]

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{N}}^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}} \\ \underline{\mathbf{S}}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{cristal} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}\end{aligned}$$

– système (2) :  $(111)[\bar{1}\bar{1}2] \left\{ \begin{array}{l} (111)[\bar{1}01] \\ (111)[0\bar{1}1] \end{array} \right.$

$$\underline{\mathbf{N}}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

$$\underline{\mathbf{S}}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

– système (3) :  $(11\bar{1})[112] \left\{ \begin{array}{l} (11\bar{1})[101] \\ (11\bar{1})[011] \end{array} \right.$

$$\underline{\mathbf{N}}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

$$\underline{\mathbf{S}}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

– système (4) :  $(001)[110] \left\{ \begin{array}{l} (1\bar{1}\bar{1})[\bar{1}01] \\ (1\bar{1}\bar{1})[011] \\ (\bar{1}11)[101] \\ (\bar{1}11)[011] \end{array} \right.$

$$\underline{\mathbf{N}}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

$$\underline{\mathbf{S}}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{cristal} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{éprouvette}}$$

## 2.3 Surface de charge

La surface de charge pour le monocristal est déterminée à l'aide de la loi de Schmid

– (1)  $(001)[110]$

$$\tau = \underline{\mathbf{m}}^6 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^6 = \underline{\mathbf{m}}^8 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^8 \quad (4)$$

$$\underline{\mathbf{m}}^6 = \underline{\mathbf{m}}^8 = \underline{\mathbf{S}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{cristal} \quad (5)$$

$$\underline{\mathbf{n}}^6 + \underline{\mathbf{n}}^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{2}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{N}}^1 \quad (6)$$

En raison de la symétrie des systèmes, les cissions résolues sont identiques :

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{m}}^6 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\underline{\mathbf{n}}^6 + \underline{\mathbf{n}}^8) = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{S}}^1 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{N}}^1 \quad (7)$$

– (2) (111)[ $\overline{1}\overline{1}2$ ] (valable pour (3) aussi)

$$\underline{\mathbf{n}}^1 = \underline{\mathbf{n}}^2 = \underline{\mathbf{N}}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} \quad (8)$$

$$\underline{\mathbf{m}}^1 + \underline{\mathbf{m}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{cristal} = \sqrt{3} \underline{\mathbf{S}}^2 \quad (9)$$

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{m}}^1 + \underline{\mathbf{m}}^2) \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\mathbf{S}}^2 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{N}}^2 \quad (10)$$

– (4) (001)[110]

$$\begin{aligned} \tau &= -\tau_4 = -\underline{\mathbf{m}}^4 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^4 \\ &= \tau_5 = \underline{\mathbf{m}}^5 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^5 \\ &= -\tau_7 = -\underline{\mathbf{m}}^7 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^7 \\ &= \tau_9 = \underline{\mathbf{m}}^9 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^9 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\underline{\mathbf{n}}^4 = \underline{\mathbf{n}}^5 \text{ et } \underline{\mathbf{n}}^7 = \underline{\mathbf{n}}^9$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{m}}^5 - \underline{\mathbf{m}}^4) \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^4 \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{m}}^9 - \underline{\mathbf{m}}^7) \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^7 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\underline{\mathbf{m}}^5 - \underline{\mathbf{m}}^4 = \underline{\mathbf{m}}^9 - \underline{\mathbf{m}}^7$$

$$\tau = \frac{1}{4} (\underline{\mathbf{m}}^5 - \underline{\mathbf{m}}^4) \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\underline{\mathbf{n}}^4 + \underline{\mathbf{n}}^7) \quad (13)$$

$$\underline{\mathbf{m}}^5 - \underline{\mathbf{m}}^4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{cristal} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\mathbf{S}}^4 \quad (14)$$

$$\underline{\mathbf{n}}^4 + \underline{\mathbf{n}}^7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{cristal} = \frac{2}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{N}}^4 \quad (15)$$

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{3}} \underline{\mathbf{S}}^4 \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{N}}^4 \quad (16)$$

On peut donc établir une loi de Schmid effective valable dans le plan

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{N}}}=\beta\tau \quad (17)$$

avec

- (1)  $\beta = \sqrt{3}$
- (2) et (3)  $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- (4)  $\beta = 2\sqrt{3}$

L'équation générale de cette surface de charge est

$$\underset{\sim}{\sigma} = \left( \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{array} \right)_{\text{éprouvette}} \quad (18)$$

$$\underline{\mathbf{S}}.\underline{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & 0 \end{pmatrix}_{\text{épreuve}} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\text{épreuve}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{épreuve}} = \beta\tau \quad (19)$$

$$2N_1N_2\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)+(N_2^2-N_1^2)\sigma_{12}=\beta\tau \quad (20)$$

où l'on a tenu compte du fait que  $S_1 = N_2, S_2 = -N_1$ .

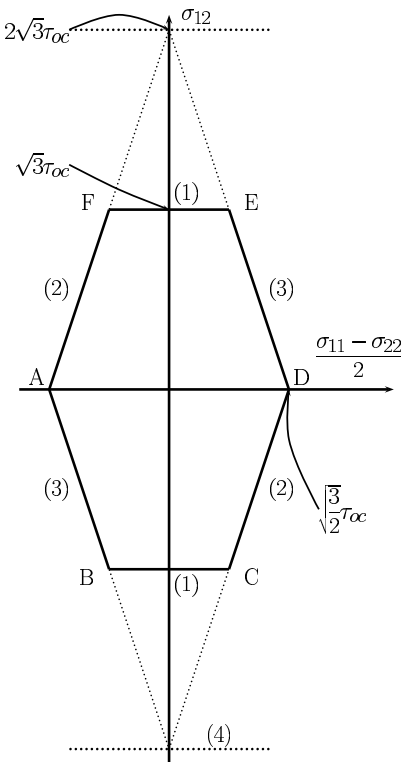


FIG. 6 – surface de charge pour l'orientation (001)[110]



## 2.4 Equations d'équilibre

Le champ des contraintes doit vérifier en l'absence de force de volume l'équation d'équilibre :

$$\text{div} \underline{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

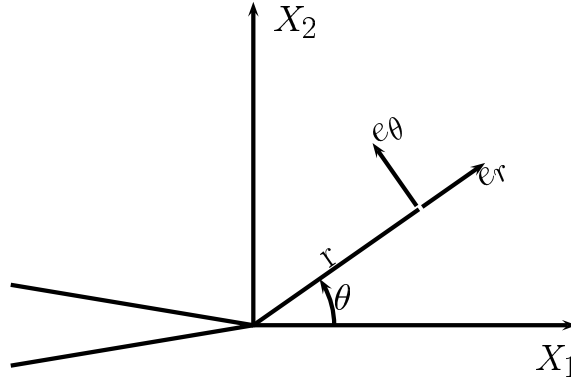


FIG. 7 – Repère cylindrique

Les composantes cartésiennes des contraintes seront exprimées dans la suite en fonction des coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$ . On pose  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$ . La matrice jacobienne du changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta / r & \cos \theta / r \end{pmatrix} \quad (24)$$

Les termes des équations (22) s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (25)$$

Les équations d'équilibre (22) s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Ces équations deviennent alors en les multipliant par  $r$

$$\begin{cases} r \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \sin \theta + r \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \cos \theta = 0 \\ r \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \sin \theta + r \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (27)$$

On admettra que les contraintes sont bornées en pointe de fissure ou plus précisément que

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} = 0 \quad (28)$$

On renvoie aux la référence [1, 2] pour la démonstration de ce résultat. Il en résulte que

$$\begin{cases} -\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \right) \sin \theta + \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \right) \cos \theta = 0 \\ -\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} \right) \sin \theta + \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \right) \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Si l'on considère que le critère de plasticité quelque soit l'angle  $\theta$  en pointe de fissure et En dérivant l'équation (20) de la surface de charge par rapport à  $\theta$  on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} = -\frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \frac{\partial (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial \theta} \quad (30)$$

Les équations (29) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial \theta} \sin \theta + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \cos \theta = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial \theta} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (31)$$

En posant

$$\begin{cases} a = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\partial \theta} \\ b = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial \theta} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} = \frac{a + b}{2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} = \frac{a - b}{2} \end{cases} \quad (33)$$

on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a \sin \theta + b \left( 2 \frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \cos \theta + \sin \theta \right) = 0 \\ a \cos \theta + b \left( 2 \frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \sin \theta - \cos \theta \right) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène à deux inconnues. Les solutions sont  $a = b = 0$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

sauf si le déterminant du système linéaire précédent est nul. Les composantes cartésiennes des contraintes sont donc constantes, i.e. indépendantes de  $\theta$ , sauf pour certaines valeurs de  $\theta$  qui vérifient l'équation suivante :

$$\left( 2 \frac{N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \right) = 0 \quad (36)$$

Cette relation peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$N_1 N_2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (N_2^2 - N_1^2) \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (37)$$

$$N_1 N_2 \cos 2\theta + (N_2^2 - N_1^2) \frac{\sin 2\theta}{2} = 0 \quad (38)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2N_1 N_2}{N_2^2 - N_1^2} \quad (39)$$

Ces équations admettent les solutions suivantes

$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{épreuvette}$ $\tan 2\theta = 0$ $2\theta = k\pi$ $\theta = k\frac{\pi}{2}$	$N = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{épreuvette}$ $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$ $2\theta = \arctan(2\sqrt{2}) + k\pi$ $\theta = \begin{cases} 35.26^\circ \\ 125.26^\circ \end{cases}$	$N = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{épreuvette}$ $\tan 2\theta = -2\sqrt{2}$ $2\theta = \arctan(-2\sqrt{2}) + k\pi$ $\theta = \begin{cases} 54.74^\circ \\ 144.74^\circ \end{cases}$
---	---	--

Les composantes cartésiennes des contraintes sont donc constantes par secteur. On aura donc une discontinuité de la contrainte entre chaque secteur. Mais le vecteur contrainte doit être continu au passage de la ligne de discontinuité. Cette condition s'écrit sous la forme suivante :

$$[\![\underline{\sigma}]\!] \cdot \underline{e}_\theta = 0 \quad (40)$$

avec

$$\underline{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (41)$$

d'où

$$\begin{cases} -\sin \theta [\sigma_{11}] + \cos \theta [\sigma_{12}] = 0 \\ -\sin \theta [\sigma_{12}] + \cos \theta [\sigma_{22}] = 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} -\sin \theta \cos \theta [\sigma_{11}] + \cos^2 \theta [\sigma_{12}] = 0 \\ -\sin^2 \theta [\sigma_{12}] + \cos \theta \sin \theta [\sigma_{22}] = 0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} [\sigma_{11}] = \cos^2 \theta [\sigma_{11} + \sigma_{22}] \\ [\sigma_{22}] = \sin^2 \theta [\sigma_{11} + \sigma_{22}] \\ [\sigma_{12}] = \cos \theta \sin \theta [\sigma_{11} + \sigma_{22}] \end{cases} \quad (44)$$

$$[\sigma_{22}] = \tan^2 \theta [\sigma_{11}] \quad (45)$$

## 2.5 Construction d'une solution

Les conditions aux limites sur le bord libre de la fissure sont

$$\begin{cases} \sigma_{22} = 0. \\ \sigma_{12} = 0. \\ \sigma_{11} \neq 0. \end{cases} \quad \text{L'état de contrainte se situe donc nécessairement aux points A ou D de la surface de charge (cf. figure 6).}$$

On va tout d'abord essayer de construire une première solution en considérant que l'on est au point D.

Notons D le premier secteur, on a alors

$$\begin{cases} \sigma_{22}^D = 0. \\ \sigma_{12}^D = 0. \\ \sigma_{11}^D = \sqrt{6}\tau_c. \end{cases}$$

Pour obtenir une solution unique on admettra que l'état de contraintes dans les secteurs est défini aux sommets de la surface de charge. De plus l'orientation de la discontinuité est déterminée par le système actif le long du segment reliant les deux sommets.

On peut essayer de construire une solution en considérant que le second secteur est défini au point E. On a la discontinuité à  $\theta = 144.74^\circ$ .

$$\begin{cases} \sigma_{12}^E = \sqrt{3}\tau_c \\ \frac{\sigma_{11}^E - \sigma_{22}^E}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{22}^E - \sigma_{12}^D = \tan \theta (\sigma_{12}^E - \sigma_{12}^D) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_{12}^E - \sigma_{12}^D) \\ \sigma_{12}^E = \sqrt{3}\tau_c \\ \sigma_{11}^E = 0 \\ \sigma_{22}^E = -\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \end{cases}$$

Le secteur suivant sera défini au point F, donc la ligne de discontinuité entre les deux secteurs aura pour orientation

$\theta = 90^\circ$  et

$$\begin{cases} \sigma_{12}^F = \sqrt{3}\tau_c \\ \frac{\sigma_{11}^F - \sigma_{22}^F}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{11}^F - \sigma_{12}^E = 0 \\ \sigma_{12}^F = \sqrt{3}\tau_c \\ \sigma_{11}^F = 0 \\ \sigma_{22}^F = \sqrt{6}\tau_c \end{cases}$$

Le dernier secteur est alors déterminé au point A et la discontinuité entre les deux secteurs F et A aura un angle de  $\theta = 35^\circ$ . On a alors

$$\begin{cases} \sigma_{12}^A = 0 \\ \frac{\sigma_{11}^A - \sigma_{22}^A}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{22}^A - \sigma_{22}^F = \tan \theta (\sigma_{12}^A - \sigma_{12}^F) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_{12}^A - \sigma_{12}^F) \\ \sigma_{12}^A = 0 \\ \sigma_{11}^A = -\sqrt{6}\tau_c \\ \sigma_{22}^A = 0 \end{cases}$$

Cette solution est physiquement inacceptable, car la contrainte normale en point de fissure ne peut pas être nulle.

On peut construire une autre solution. On considère toujours que notre état de contraintes dans le secteur au bord de la fissure est dans l'état D. Considérons maintenant que le second secteur soit défini en C. Le segment entre ces deux sommets de la surface est dû au super-système (2),  $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$ , prenons  $\theta = 125^\circ$ . On a alors

$$\begin{cases} \sigma_{12}^C = -\sqrt{3}\tau_c \\ \frac{\sigma_{11}^C - \sigma_{22}^C}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{22}^C - \sigma_{22}^D = \tan \theta (\sigma_{12}^C - \sigma_{12}^D) = -\sqrt{2} (\sigma_{12}^C - \sigma_{12}^D) \\ \sigma_{12}^C = -\sqrt{3}\tau_c \\ \sigma_{11}^C = \frac{3}{2}\sqrt{6}\tau_c \\ \sigma_{22}^C = \sqrt{6}\tau_c \end{cases}$$

L'état de contrainte du second secteur est déterminé au point B avec comme angle  $\theta = 90^\circ$

$$\begin{cases} \sigma_{12}^C = -\sqrt{3}\tau_c \\ \frac{\sigma_{11}^C - \sigma_{22}^C}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{11}^E - \sigma_{11}^F = 0 \\ \sigma_{12}^C = -\sqrt{3}\tau_c \\ \sigma_{11}^C = \frac{3}{2}\sqrt{6}\tau_c \\ \sigma_{22}^C = 2\sqrt{6}\tau_c \end{cases}$$

Enfin le quatrième secteur est défini au point A. La discontinuité a pour orientation  $54.7^\circ$  et

$$\begin{cases} \sigma_{12}^C = 0 \\ \frac{\sigma_{11}^C - \sigma_{22}^C}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\tau_c \\ \sigma_{22}^C - \sigma_{22}^D = \tan \theta (\sigma_{12}^C - \sigma_{12}^D) = \sqrt{2} (\sigma_{12}^C - \sigma_{12}^D) \\ \sigma_{12}^C = 0 \\ \sigma_{11}^C = 2\sqrt{6}\tau_c \\ \sigma_{22}^C = 3\sqrt{6}\tau_c \end{cases}$$

On a pu construire une solution qui comporte trois lignes de discontinuité comme l'indique la figure 8.

Vérifier que cette solution est conforme aux résultats du calcul par éléments finis.

### 3 Applications à d'autres orientations

Dans un premier temps on pourra tester l'orientation (110)[001]

Copier le premier fichier de mise ne donnée :

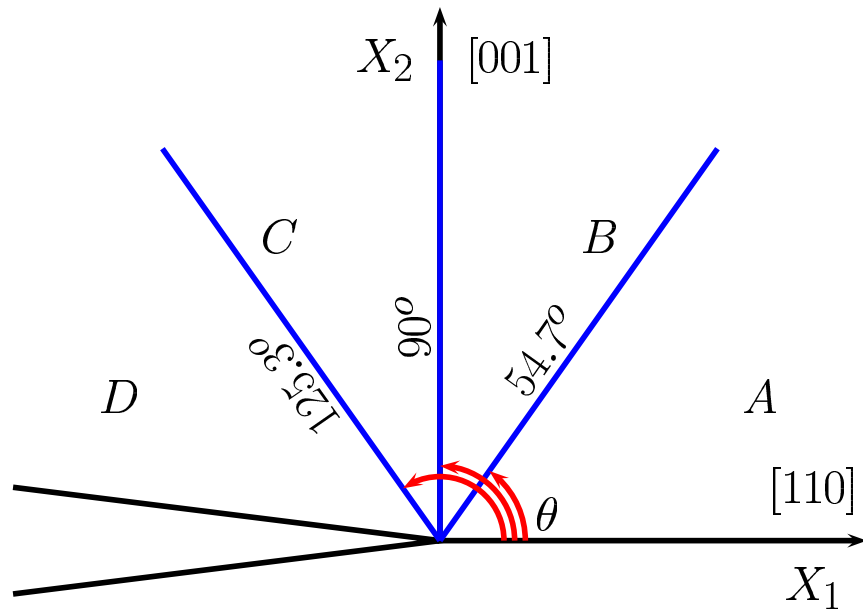


FIG. 8 – Discontinuité du champ des contraintes en pointe de fissure

cp CT16\_160\_001\_110\_radial.inp CT16\_160\_110\_001\_radial.inp ou  
cp CT16\_160\_001\_110\_regulier.inp CT16\_160\_110\_001\_regulier.inp

Editer le fichier et modifier l'orientation cristalline : xemacs CT16\_160\_110\_001\_radial.inp ou  
xemacsCT16\_160\_110\_001\_regulier.inp

Pour lancer le calcul :

Zrun CT16\_160\_110\_001\_radial.inp  
Zrun CT16\_160\_110\_001\_regulier.inp

Pour dépouiller le calcul :

Zmaster CT16\_160\_110\_001\_radial  
Zmaster CT16\_160\_110\_001\_regulier

Que pouvez-vous conclure, vous pourrez comparer ce calcul au précédent. Que dire de l'orientation des bandes de localisation. Justifier à l'aide de la figure 9.

Essayer d'autres orientations à votre guise.

## Références

- [1] W.J. Drugan. On the asymptotic continuum analysis of quasistatic elastic-plastic crack growth and related problems. *Journal of Applied Mechanics*, 52 :601–605, 1985.
- [2] J.R. Rice. Tensile crack tip fields in elastic-ideally plastic crystals. *Mechanics of Materials*, 6 :317–335, 1987.

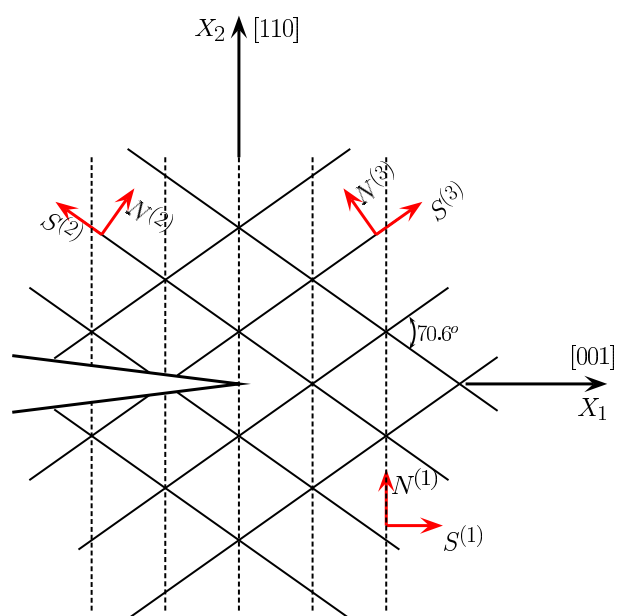


FIG. 9 – traces des plans de glissement pour l'orientation  $(110)[001]$